POZARYSKI

Elektrotechni

PODSTAWY NAUKOWE
ELEKTROTECHNIKI

ŁĄCZNIE Z ZASADAMI POMIARÓW

NAPISAŁ

MIECZYSŁAW POŻARYSKI

INŻYNIER-ELEKTROTECHNIK

Z 427 RYSUNKAMI W TEKSCIE

Z ZAPOMOGI KASY POMOCY DLA OSÓB PRACUJĄCYCH NA
POLU NAUKOWEM IM. D-RA MED. JÓZEFA MIANOWSKIEGO

WARSZAWA
SKŁAD GŁÓWNY W KSIĘGARNI GEBETHNERA I WOLFFA

1915

Дозволено Военною Цензурою.

Варшава, 23 Сентября 1914 г.

Druk Rubieszewskiego i Wrotnowskiego w Warszawie.

PRZEDMOWA.

Książka ta powstała przez uzupełnienie treści moich wykładów w szkole średniej technicznej i stanowi wstęp do elektrotechniki.

Wybór i układ materjału zostały dokonane w przeświadczeniu, iż rzecz, ujęta w pewien logiczny całokształt, łatwiej i trwalej układa się w świadomości człowieka od luźnego zespołu nie powiązanych wyraźnie ze sobą przedmiotów. Poza tem cel wykładu—podanie zasad naukowych elektrotechniki praktycznej—rozstrzygał także w wielu razach przy opracowaniu treści książki.

W wykładzie została zupełnie pominięta hipoteza elektronowa elektryczności ze względu na to, że w przyjętej postaci rozważania jest ona zupełnie zbyteczną. Zresztą czytelnik ma rzecz powyższą dość szeroko i umiejętnie wyłożoną w III tomie „Zasad fizyki“ prof. A. Witkowskiego. Na książkę prof. Witkowskiego powołuję się zawsze, gdy chodzi o zwrócenie uwagi czytelnika na szczegóły, stanowiące przedmiot fizyki.

Studjowanie poważnie ujętych zasad teoretycznych elektrotechniki jest możliwe tylko po zdobyciu elementarnych wiadomości o zjawiskach elektromagnetycznych, chociażby w zakresie dobrego podręcznika fizyki dla szkół średnich. To też wykład w tej książce prowadzony jest w przypuszczeniu, że czytelnik zna najważniejsze zjawiska elektryczne, magnetyczne i elektromagnetyczne, chociażby bez ścisłego ujęcia matematycznego. W niektórych wypadkach odsyłam czytelnika do rozdziałów dalszych po uzasadnienie stosowanych wzorów. Nie sądzę jednak, aby to utrudniło zrozumienie treści wykładu, natomiast w ten sposób staje się możliwem przeprowadzenie pewnej jednolitej myśli przewodniej, którą wyjaśniam na wstępie.

Zasady pomiarów elektrycznych podałem w tym celu, aby czytelnik dowiedział się, w jaki sposób dochodzimy do liczb, wyrażających różne wielkości, i zapoznał się z zasadami najważniejszych sposobów mierzenia w praktyce elektrotechnicznej. Mając to na względzie, opuściłem wiele wskazówek praktycznych, niezbędnych przy przeprowadzaniu pomiarów. Czytelnik, mający zamiar przystąpić do pomiarów,

powinien zapoznać się ze szczegółami tej sprawy jeszcze z innej książki, poświęconej wyłącznie temu działowi elektrotechniki. Literatura tego przedmiotu w językach francuskim i niemieckim jest dość obszerna. W języku polskim mamy książkę p. K. Drewnowskiego „Pomiary elektrotechniczne“, w której jest dość dużo wskazówek praktycznych.

Wobec braku ustalonego słownictwa elektrotechnicznego wprowadziłem kilka wyrazów nowych, używanych przeze mnie od szeregu lat przy wykładach. Gdy chodzi jednak o wyrazy ważniejsze, podaję zawsze obok przyjętych przeze mnie, inne nazwy, stosowane w książkach polskich.

Prof. W. Biernackiemu winien jestem wdzięczność za uwagi, dotyczące wstępu, p. W. Wernerowi za przejrzenie i uwagi względem treści całej książki, p. S. Landauowi za przejrzenie niektórych rozdziałów, p. K. Sławińskiemu za uwagi w dziale elektrochemji, a pp. S. Kossuthowi, L. Buszkowskiemu i S. Twardowskiemu za korektę literacką.

Rysunki, pomieszczone w książce, są oryginalne, za wyjątkiem: 20 i 21, wziętych z dzieła Dr. G. Mie „Lehrbuch der Elektricität und des Magnetismus“, rys. 194 z książeczki I. Hermann'a „Elektrotechnik“, rys. 210 i 211 z książki Benischke'go „Grundlagen der Elektrotechnik“, rys. 299 z katalogu Hartman'a i Braun'a, rys. 300 z książki p. H. Pellat'a „Cours d'électricité“, rys. 303 i 304 z książki pp. Hallo i Land'a „Messungen und Messinstrumente“, rys. 306 z książki p. H. Pellat'a, wspomnianej wyżej, oraz za wyjątkiem rysunków, wykonanych według fotograficznych zdjęć przyrządów; te rysunki są zaczerpnięte z katalogów firm: Hartmann'a & Braun'a, Siemens'a & Halske'go, Carpantier'a i Arona.

Autor.

Warszawa w lutym 1915 r.

SPIS RZECZY.

WSTĘP.

CZĘŚĆ I.

Wielkości charakterystyczne dla prądu elektrycznego.

CZĘŚĆ II.

Własności obwodu elektrycznego.

CZĘŚĆ III.

Prawa przepływu prądów w obwodach elektrycznych.

CZĘŚĆ IV.

Przemiany energji w obwodach prądu elektrycznego.

CZĘŚĆ V.
Pomiary elektrotechniczne.

Uzupełnienie.

SPROSTOWANIE.

Str. 24, wiersz 26 zgóry — po słowie „stężenie" opuszczono wyraz: „często".

Str. 284, wiersz 7 zgóry — zamiast „maksuel" powinno być: „makswel".

Str. 287, wiersz 6 zgóry — zamiast „mikrofada" powinno być: „mikrofarada".

Str. 304, wiersz 19 zgóry — dodać: patrz odsyłacz 1 na str. 405.

Str. 325, na rys. 335 opory w obwodzie A należy oznaczyć przez r_1 i r_2.

WSTĘP.

Elektrotechnika współczesna należy do tych nauk podstawowych, z któremi mają związek prawie wszystkie gałęzie techniki. Przedmiot elektrotechniki obejmuje bowiem urządzenia, mające na celu przenoszenie i rozdział energji za pomocą prądu elektrycznego, albo też przetwarzanie energji z jednej postaci w drugą również za pomocą prądu elektrycznego.

W książce niniejszej starałem się ująć w jednolity układ zasady naukowe, stanowiące podstawę elektrotechniki. Określam więc pojęcia, jakiemi się ona posługuje i zestawiam prawa, które kojarzą powyższe pojęcia w związki, wyrażone ściśle za pomocą wzorów matematycznych.

Jednym z najbardziej podstawowych pojęć jest bezwątpienia pojęcie energji. Określać go nie będę, należy to bowiem do zasad fizyki; przypomnę tylko czytelnikowi te postacie, jakie przybiera energja. Oto krótkie ich zestawienie:

Energja cieplna istnieje wszędzie, gdzie jest materja w temperaturze wyższej od bezwzględnego zera. Energja chemiczna tkwi w ciałach, zdolnych do takich przemian chemicznych, przy których wydzielają się inne postacie energji, np. w ciałach palnych i t. p. Energję potencyalną ciążenia powszechnego mają wszystkie ciała przyrody, ktore mogą zbliżać się do siebie; w szczególności zaś, gdy chodzi tylko o siłę ciężkości, możemy mówić o energji ciał, zdolnych spaść niżej, według naszych ziemskich wyobrażeń. Energję ruchu czyli energję kinetyczną mają wszystkie ciała poruszające się, a nawet, według kinetycznej teorji materji, ciepło jest energją kinetyczną cząsteczek ciał, które, zgodnie z tą teorją, znajdują się w bezustannym ruchu. Wreszcie jest jeszcze energja elektryczna i energja magnetyczna, w polu elektrycznym i magnetycznym; jako szczególny wypadek dwu ostatnich rodzajów energji należy uważać także energję promieniowania.

Energją cieplną, chemiczną i mechaniczną zajmują się szczegółowo odpowiednie działy nauk przyrodniczych; w książce niniejszej będzie o nich mowa o tyle, o ile mają one związek ze zjawiskami elektrycznemi. Energji zaś elektrycznej i magnetycznej poświęcam kilka rozdziałów. Tutaj zauważyć należy, że elektryczność, ściślej mówiąc — ładunek elektryczny, któremu przypisujemy istnienie

realne, nie stanowi energji. Energja elektryczna nie zawsze tam się znajduje, gdzie są ładunki elektryczne. Na to żeby istniał pewien zasób energji elektrycznej musi być koniecznie przestrzeń, w której działają siły elektryczne, czyli musi być pole elektryczne; tam jest energja. Podobnież energja magnetyczna znajduje się w takiej przestrzeni, gdzie działają siły magnetyczne. Energja elektryczna i magnetyczna mogą się przenosić z miejsca na miejsce. Promieniowanie jest ruchem energji elektromagnetycznej. Ciała promieniujące wysyłają w przestrzeń energję elektromagnetyczną.

Po tym pobieżnym przejrzeniu różnych postaci energji zastanowimy się przedewszystkim nad kilku prostemi zjawiskami, znanemi dobrze każdemu technikowi.

Gdy naciśniemy przycisk dzwonka elektrycznego, to spostrzeżemy łatwo rozpuszczanie się cynku w ogniwie galwanicznym i usłyszymy dźwięk dzwonka; badając przewodniki dokładnie, przekonamy się, że one się ogrzały. Mamy więc tu do czynienia ze znikaniem energji w jednej postaci (energji chemicznej) i z powstawaniem w innej postaci (ciepło i ruch) w różnych miejscach.

Elektrownia, przeznaczona do oświetlenia i wprawiania w ruch silników elektrycznych w mieście, zużywa pod kotłami wielkie ilości węgla, który, spalając się, wyzwala energję w nim zawartą. Energję tę spostrzegamy znowu w innym miejscu, gdzie świecą lampy i obracają się silniki połączone drutami z maszynami naszej elektrowni. Wiemy również, że są w użyciu grzejniki elektryczne, tym sposobem z tej samej elektrowni czerpiemy ciepło w różnych punktach miasta lub okolicy. Możemy także zasilać energją przyrządy elektrolityczne, gdzie mamy do czynienia z przemianami chemicznemi, pochłaniającemi energję.

Badanie dokładne zjawisk tego rodzaju doprowadziło do wyobrażenia sobie prądu elektrycznego, który przebiega po obwodzie zamkniętym, utworzonym z przewodników elektryczności, połączonych w zamknięty obieg. Zresztą przy prądzie zmiennym taki obieg może być zamknięty i przez izolatory, jak to zobaczymy dalej.

Prąd elektryczny i jego obwód. Prąd elektryczny przedstawiamy sobie jako ruch elektryczności dodatniej lub ujemnej, albo też obydwu razem, lecz w przeciwne strony. Powstawanie ruchu elektryczności w obwodzie odbywa się szybko: bodziec [1]) wprawiający w ruch elektryczność obiega obwód z szybkością spółmierną z prędkością rozchodzenia się promieni świetlnych $= 3.10^{10}$ *cm/sek.*

Obwód, po którym płynie prąd elektryczny, stanowią: **źródła prądu, odbieracze** i **przewody**, łączące te przyrządy w jeden obieg zamknięty. Źródłami prądu nazywamy takie przyrządy, które pochłaniają energję z zewnątrz obwodu, odbieraczami zaś inne przyrządy, które wydzielają energję nazewnątrz. Najlepsze przewody łączące byłyby takie, które zachowywałyby się biernie wobec przemian energji w obwodzie. Te jednak przewody, z jakiemi mamy do czynienia w technice, wydzielają zawsze ciepło, są więc właściwie także odbieraczami.

---

[1]) Bodźcem tym są siły elektromagnetyczne, powstające i przenoszące się w przestrzeni, otaczającej przewodnik.

Przemiany energji. Z powyższych rozważań widzimy, że teorja prądu elektrycznego stanowi rdzeń podstaw naukowych elektrotechniki. Istotną zaś cechą prądu elektrycznego są przemiany energji, które zachodzą w obwodzie prądu. Ujmujemy te przemiany w sposób następujący:

W źródłach prądu energja, przypływająca do obwodu, wytwarza pracę prądu. W odbieraczach praca prądu wytwarza energję, wydzielającą się na zewnątrz obwodu. Prąd przenosi energję z jednego miejsca na drugie tak samo, jak to czyni wał i pas pędni mechanicznej, woda doprowadzona pod ciśnieniem do pras hydraulicznych, czy powietrze sprężone w rurociągu, doprowadzającym je do nitownic lub innych tego rodzaju narzędzi.

Dogodność przewodów elektrycznych i łatwość otrzymywania pracy prądu elektrycznego z dowolnej postaci energji, a głównie prostota budowy przyrządów do przetwarzania pracy prądu w dowolną postać energji i małe straty przy przenoszeniu na znaczne odległości stanowią o przewadze przenoszenia i rozdziału energji za pomocą prądu elektrycznego w porównaniu z innemi sposobami.

Zasada zachowania energji. Z powyższych względów za nić przewodnią przy rozważaniu podstaw naukowych elektrotechniki w tej książce obrałem przemiany energji, a zasadę podstawową — **zasadę zachowania energji** — za pewnik, z którego wyprowadzam większą część związków najważniejszych pomiędzy wielkościami, charakteryzującemi prąd elektryczny. Wszystkie postacie energji są równoważne, wszystkie można mierzyć jedną miarą. Gdy zniknie gdzieś pewna ilość energji w jednej postaci, zawsze — według powyższej zasady — powstanie taka sama ilość energji w innym miejscu, w tej samej lub w innej postaci.

Praca mechaniczna i równorzędna z nią praca prądu elektrycznego nie są postaciami energji. Są to pojęcia, utworzone dla ułatwienia opisu zjawisk, zachodzących przy przemianach energji. Weźmy najprostszy przykład z mechaniki:

Gdy ciało znajduje się na pewnej wysokości ponad powierzchnią ziemi, mówimy, że posiada ono energję potencjalną. Pozwólmy mu spadać; wtedy energja potencjalna stopniowo zamienia się na kinetyczną. Przejście jednej postaci energji w drugą możemy opisać, mówiąc że energja potencjalna ciała wytwarza pracę mechaniczną siły ciężkości, a skutkiem tej pracy otrzymujemy z kolei energję kinetyczną.

Tak samo należy rozumieć powyżej użyte wyrażenia o przemianie energji w pracę prądu elektrycznego i o otrzymywaniu z tej pracy energji w różnych postaciach. Rozważanie zjawisk elektromagnetycznych prowadzi do ujęcia energji jako rzeczy mającej rozciągłość, zajmującej pewną określoną objętość w przestrzeni, przez to jej niezniszczalność staje się dla nas twierdzeniem bardziej uchwytnym i zrozumiałym. Przez to uwydatnia się również wyraźniej różnica, jaka zachodzi pomiędzy pojęciem energji a pojęciem pracy.

Druga zasada termodynamiki. Druga zasada, dotycząca przemian energji, rozważana zazwyczaj w termodynamice, twierdzi, że ciepło wyróżnia się z pośród wszystkich postaci energji. Dowolną ilość energji każdej postaci można zawsze przetworzyć w ciepło, ciepło zaś może się zamienić na inną postać energji tylko wtedy, gdy jednocześnie pewna ilość ciepła przejdzie z wyższej do niższej temperatury. Pozatem przy wszystkich przemianach energji, zachodzących w przyro-

dzie część przetwarzającej się energji zamienia się zawsze w ciepło. W zjawiskach elektromagnetycznych spostrzegamy wszędzie przemiany tego rodzaju.

Zasada zachowania ilości elektryczności. Przy wywodach teoretycznych posługiwać się będziemy jeszcze **zasadą niezniszczalności ładunku elektrycznego.** Według tej zasady ilość elektryczności w przyrodzie jest niezmienna, powstawać lub znikać elektryczność nie może. Wszystkie zjawiska elektryczne polegają na ruchu lub na zmianie rozkładu ładunków. Według spółczesnych poglądów oba rodzaje elektryczności: elektryczność dodatnia i ujemna stanowią istotne składniki materji; nie znamy materji niezawierającej elektryczności. Materja obojętna elektrycznie, zawiera jednakową ilość elektryczności dodatniej i ujemnej tak rozłożonej, że wpływów tych ładunków elektrycznych nazewnątrz nie spostrzegamy. Możnaby zresztą przyjąć pogląd, według którego połączenie elektryczności dodatniej z ujemną stanowi właśnie materję; wtedy zasada zachowania ilości elektryczności byłaby tylko innym sposobem wyrażenia zasady zachowania materji.

Wszystkie te poglądy przytoczyłem tu tylko po to, aby ułatwić czytelnikowi tworzenie sobie obrazów myślowych tych zjawisk, które są omawiane w niniejszej książce, wszystkie zaś dalsze wywody opieram na ścisłych twierdzeniach, wyrażonych wzorami matematycznemi, które są zupełnie niezależne od tego, jakie będziemy tworzyli sobie wyobrażenia o istocie elektryczności.

Porządek wykładu. Obierając prąd elektryczny za zjawisko podstawowe, a zasadę zachowania energji za podstawę rozumowania, określam przedewszystkim w części pierwszej wielkości charakterystyczne dla prądu elektrycznego. W części drugiej omawiam własności obwodu, ujmując go razem z otoczeniem; rozpatruję więc sam przewodnik oraz ośrodek, w którym powstają pola elektryczne i magnetyczne. Część trzecia przeznaczona została na wyprowadzenie praw Ohma i Kirchhoffa, które rządzą przepływem prądu w obwodach. W części czwartej omówione są przemiany energji, a w piątej pomiary wielkości, rozważonych w części pierwszej i drugiej. Ostatni rozdział stanowi treściwe przedstawienie zasad rachunku wektorowego w zastosowaniu do nauki o prądach okresowo zmiennych.

CZĘŚĆ I.

Wielkości charakterystyczne dla prądu elektrycznego.

ROZDZIAŁ I.

Siła prądu.

Zasadniczą cechą prądu elektrycznego jest jego siła, inaczej wielkość lub natężenie.

Siłę prądu elektrycznego określamy na zasadzie działania magnetycznego. Dla ilościowego określenia siły prądu konieczne są zatem wyznaczalne ilościowo pojęcia masy magnetycznej i natężenia pola magnetycznego.

1. **Masa magnetyczna.** Masa magnetyczna jest to wielkość, określająca własności magnetyczne ciał namagnesowanych. Wyobrażamy sobie, że jest ona skupiona w biegunach magnetycznych, stanowiących punkty przyczepienia wypadkowej wszystkich sił równoległych, działających na dany biegun magnesu.

Biegun magnesu — oznacza tutaj tę część magnesu, pojętą objętościowo, która znajduje się w pewnym jednoznacznym: północnym lub południowym stanie magnetycznym. Siły zaś równoległe, wspomniane w powyższym twierdzeniu, wyobrażamy sobie, jako pochodzące od działania innych biegunów magnetycznych, znajdujących się w nieskończenie wielkiej odległości.

Ilościowo określa się pojęcie masy magnetycznej ze wzoru Coulomb'a:

$$f = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2},$$

gdzie f oznacza siłę, działającą pomiędzy dwiema masami magnetycznemi m_1 i m_2, skupionemi w punktach, znajdujących się w odległości r od siebie, μ – spółczynnik, zależny od rodzaju ośrodka, w którym znajdują się masy magnetyczne; nazywamy go **przenikliwością** albo **zdolnością magnetyczną** ośrodka.

Kierunek siły leży na prostej, łączącej punkty, w których znajdują się masy m_1 i m_2. Zwykle północną masę magnetyczną uważamy za dodatnią, a południową za ujemną.

Siła spółdziałania mas może więc być tu dodatnią lub ujemną stosownie do tego, czy masy magnetyczne obie są północne albo południowe, czy też jedna jest północna, a druga południowa. Siła dodatnia wyraża odpychanie się mas.

Zakładając w powyższym wzorze dla powietrza $\mu = 1$ i wyrażając f w dynach, a r w centymetrach, otrzymamy następujący wzór, określający wielkość masy magnetycznej w jednostkach bezwzględnych elektromagnetycznych:

$$f = \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}.$$

2. Natężenie pola magnetycznego. Mając ścisłe określenie masy magnetycznej, możemy przejść do następującego pojęcia: **natężenia pola magnetycznego.**

Przestrzeń, w której na bieguny magnesu działają siły magnetyczne, nazywamy polem magnetycznym. Na różnoimienne bieguny siły te działają w przeciwne strony. Wielkość tych sił zależy od dwuch czynników: z jednej strony od stanu magnetycznego magnesu, a więc od mas magnetycznych biegunów, a z drugiej strony od stopnia zmian magnetycznych w eterze [1]).

Oznaczmy przez F siłę, działającą na **północną** masę magnetyczną, umieszczoną w danym punkcie pola magnetycznego, przez m — wielkość tej masy magnetycznej, przez H — natężenie pola magnetycznego, t. j. wielkość, która określa stopień zmian magnetycznych w eterze.

Przyjmujemy, że F jest proporcjonalne do H, więc stąd związek pomiędzy temi wielkościami w nauce o elektromagnetyzmie wyrażamy wzorem:

$$F = H \cdot m,$$

albo:

$$H = \frac{F}{m}.$$

O ile F podamy w dynach, m w jednostkach bezwzględnych elektromagnetycznych, to i H wypadnie w bezwzględnych jednostkach elektromagnetycznych.

Natężenie pola jest wielkością kierunkową i podobnie jak siła może być wyrażona wektorem. Kierunek natężenia określa się kierunkiem siły, działającej na północną masę magnetyczną, umieszczoną w polu.

Linje, styczne w każdym punkcie do kierunku natężenia pola, nazywamy linjami sił. Linjom tym nadajemy kierunek zgodny z kierunkiem natężenia pola. Linje sił są więc linjami geometrycznemi z określonym zwrotem kierunku; na rysunkach wyrażamy to strzałkami, umieszczonemi na tych linjach.

3. Pole magnetyczne, wywołane przez prąd elektryczny. Wiemy z doświadczenia, że wokoło prądu elektrycznego powstaje zawsze pole magnetyczne.

Opierając się na kierunku natężenia pola magnetycznego, wywołanego przez prąd, możemy określić kierunek prądu elektrycznego. Gdy prąd przepływa wzdłuż bardzo długiego [2]) przewodnika prostego, linje sił magnetycznych, wywołane przez ten prąd, znajdują się w płaszczyznach prostopadłych do linji prądu i mają kształt

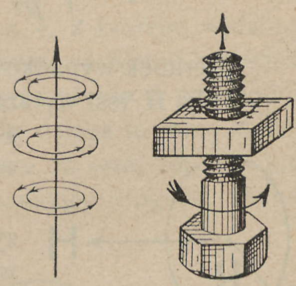
---

[1]) Tak nazywamy ośrodek, wypełniający przestrzeń wszechświata po usunięciu materji ważkiej.

[2]) Ściśle – nieskończenie długiego.

kół, których środki leżą na linji prądu; gdy przewodnik ma kształt inny, to inny kształt mają i linje; wiemy o tem z doświadczenia. Doświadczenie również wskazuje, że kierunek linij sił magnetycznych można odwrócić, przemieniając bieguny źródła prądu, wywołującego prąd w rozważanym przewodniku; z tego wynika, że pole magnetyczne wywołane prądem zależy od kształtu przewodnika i od kierunku prądu.

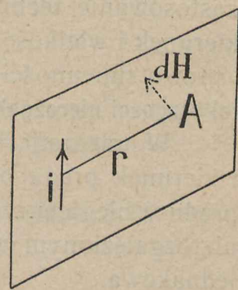
Związek pomiędzy kierunkiem prądu i kierunkiem linji sił, t. j. kierunkiem natężenia pola magnetycznego, przyjęty w nauce elektromagnetyzmu, wyraża się najprościej w sposób następujący (patrz rys. 1): **obracając śrubę z prawym gwintem w kierunku sił magnetycznych, otrzymamy ruch postępowy tej śruby w kierunku prądu elektrycznego.**



Rys. 1.

4. Wielkość siły prądu. Siłę prądu elektrycznego przyjęto wyznaczać ze wzoru ułożonego na podstawie prac uczonych Biot'a, Savart'a i Laplace'a, a określającego wielkość natężenia pola dH, wywołaną w punkcie A (rys. 2) przez nieskończenie mały odcinek prądu, o długości dl. Gdy oznaczymy przez r odległość środka odcinka dl od punktu A, przez α — kąt między kierunkami r i dl, a przez i — siłę prądu, to związek pomiędzy przytoczonemi wyżej wielkościami wyrażamy, ułożonym przez Laplace'a, wzorem:

$$dH = \frac{dl \cdot i}{r^2} \cdot \sin\alpha .$$



Rys. 2.

Wzór ten został obmyślony w ten sposób, aby wyniki obliczenia teoretycznego wypadków praktycznych były zawsze zgodne z doświadczeniem w granicach błędu pomiarów. Uwaga ta dotyczy oczywiście tylko zależności natężenia pola od długości przewodnika, odległości r i kąta — α; wielkości te określają położenie i postać przewodnika.

Proporcjonalność natężenia pola do siły prądu i jest założeniem, na którym opiera się ilościowe określenie pojęcia **siły prądu** [1]).

Względne położenie prostych, wyznaczających prąd i natężenie pola, jest zgodnie z doświadczeniem takie, jak wskazuje rys. 2, dH jest tu prostopadłe do płaszczyzny przechodzącej przez dl i r.

Kierunek zaś dH odpowiada przytoczonemu powyżej prawidłu śruby.

Dla określenia jednostki bezwzględnej elektromagnetycznej siły prądu zwróćmy się do układu praktycznie wykonalnego.

Jak wskazuje rys. 3, prąd płynie po okręgu koła o promieniu R i wywołuje w środku koła natężenie pola magnetycznego H. Wielkość natężenia pola w środku koła wyznaczymy, dodając natężenia nieskończenie małe, wywołane przez nieskończenie małe cząstki obwodu z prądem.

---

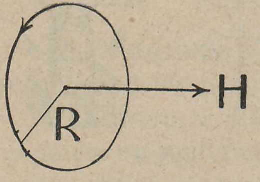
[1]) Zamiast mówić siła prądu, mówi się nieraz *natężenie prądu*; ja często będę pisał poprostu *prąd*.

Mając na względzie, że $r = R$, a $\alpha = 90^0$, otrzymamy:

$$H = \int_0^{2\pi R} \frac{i}{R^2} \cdot dl = \frac{i}{R^2} \int_0^{2\pi R} dl = \frac{2\pi i}{R}, \text{ skąd: } i = \frac{H \cdot R}{2\pi}.$$

Kierunek wypadkowego natężenia jest prostopadły do płaszczyzny koła.

Gdy H jest wyrażone w jednostkach bezwzględnych elektromagnetycznych, a R w cm, to obliczymy z tego wzoru i t. j. siłę prądu w jednostkach bezwzględnych elektromagnetycznych.



Rys. 3.

Jednostka praktyczna — **jeden amper** — jest dziesięć razy mniejszą od bezwzględnej. A więc 1 amper = 0,1 bezwzględnej jednostki elektromagnetycznej.

Prądy elektryczne, mające zastosowanie w praktyce, bywają stałe i zmienne co do czasu i co do miejsca w przewodniku.

Najpospolitszy rodzaj prądu jest tak zwany **prąd stały**; siła jego jest **niezmienna w czasie i jednakowa na całej nierozgałęzionej części obwodu.** Następnie szerokie zastosowanie techniczne mają tak zwane **prądy zmienne**; tu siła prądu zmienia kierunek i wielkość okresowo, ale długość okresu i wielkości maksymalne a także i prawo zmienności pozostają niezmienne w czasie, a nadto są one **jednakowe na całej długości nierozgałęzionego obwodu.**

W telegrafji bez drutu mają zastosowanie prądy t. zw. oscylacyjne. Siła i kierunek prądu oscylacyjnego zmieniają się również okresowo, ale maksimum prądu z biegiem czasu zmniejsza się; stałym jest tylko okres zmian. W obwodzie nierozgałęzionym w danej chwili nie zawsze siła prądu jest w każdym miejscu jednakowa.

Wreszcie, rozważając rozmaite zjawiska, zachodzące w obwodach elektrycznych, wypada nam także mieć do czynienia z prądami najrozmaitszej zmienności.

Gdy prąd jest stały, to, mówiąc o sile prądu, przebiegającego w pewnym obwodzie, mamy na myśli wielkość jego niezmienną w czasie i stałą na całej długości nierozgałęzionego przewodnika, jednoznacznie więc określoną co do czasu i miejsca na przewodniku, bez dokładniejszych objaśnień.

Inaczej sprawa się przedstawia, gdy prąd jest zmienny. W tym wypadku, mówiąc o sile prądu i chcąc określić go ściśle, musimy podać tę chwilę, w której taki prąd przepływa a nieraz i to miejsce, przez które on przepływa.

5. Wielkość czynna prądu zmiennego. Gdy jednak mamy do czynienia z prądem okresowo zmiennym, stosowanym w praktyce, wtedy ważniejsze znaczenie od wartości prądu w danej chwili ma wartość siły prądu **czynna** (inaczej **efektywna** albo **skuteczna**), którą określamy jako **pierwiastek kwadratowy z przeciętnej z kwadratów wartości chwilowych prądu.**

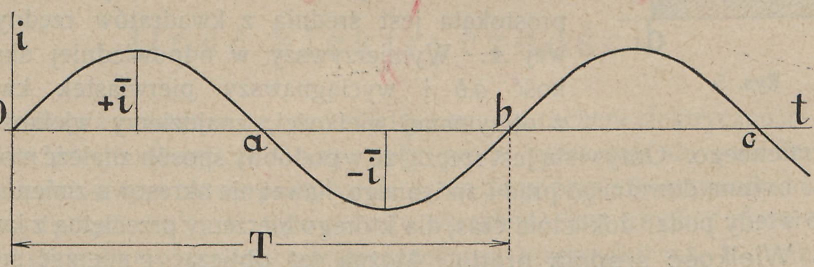
Załóżmy np., że prąd zmienia się z czasem według prawa sinusoidy i oznaczmy przez i_t — siłę prądu w danej chwili t, przez $\bar{i}$ — siłę prądu maksymalną [1])

[1]) W całej książce, przy wykładzie prądów zmiennych, litera ze znaczkiem t u dołu oznacza wartość pewnej wielkości w chwili t, — litera z kreską poziomą u góry oznacza wartość maksymalną, a ta sama litera bez żadnego znaczka oznacza wartość czynną tej wielkości.

i przez T okres zmian; wtedy siła prądu w danej chwili da się wyrazić wzorem:

$$i_t = \bar{i} \, . \sin \frac{2\pi t}{T} \, .$$

Prąd taki wyobraża się wykresem wskazanym na rys. 4, z którego widzimy, że siła prądu z początku się wzmaga, dochodzi do maksimum, następnie zmniejsza się do zera; potem wielkość prądu staje się ujemną (t. j. prąd płynie w przewodniku w odwrotną stronę) i w tym nowym kierunku siła prądu osiąga to samo maksimum, co poprzednio. Dalej siła prądu zmniejsza się znowu do zera, zmienia kierunek na taki, jaki był na początku i t. d. Czas odpowiadający długości ob na-



Rys. 4.

zywamy okresem. — Krzywa, wyrażająca w ten sposób zmienność prądu stosownie do wyżej podanego równania, nazywa się sinusoidą. (O wykreślaniu sinusoidy patrz rozdział XL).

Wielkość czynną prądu — i otrzymamy na podstawie następującego wzoru matematycznego:

$$i = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T \bar{i}^2 . \sin^2 \frac{2\pi t}{T} \, . \, dt} \, ,$$

który wyraża pierwiastek kwadratowy ze średniej z kwadratów za okres T. Dla wszystkich okresów średnia będzie oczywiście ta sama. Rozwiązanie tej całki otrzymamy łatwo, jeżeli zauważymy, że

$$\int_0^T \sin^2 \frac{2\pi t}{T} \, dt = \int_0^T \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos \frac{4\pi t}{T} \right) dt =$$

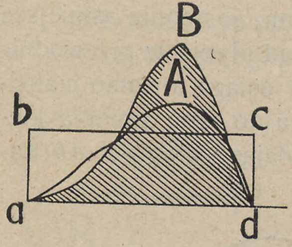
$$= \int_0^T \frac{1}{2} \, dt - \int_0^T \frac{1}{2} \cos \frac{4\pi t}{T} \, dt = \frac{T}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{T}{4\pi} \cdot \left[\sin \frac{4\pi t}{T} \right]_0^T = \frac{T}{2} \, .$$

Wobec tego:

$$i = \sqrt{\frac{\bar{i}^2 \, . \, T}{T \, . \, 2}} = \frac{\bar{i}}{\sqrt{2}} \, .$$

Taki jest związek pomiędzy maksymalną i czynną wielkością prądu zmiennego, gdy prąd zmienia się według prawa sinusoidy.

Przy innym prawie zmienności, nie dającym się wyrazić prostym wzorem matematycznym, lecz również okresowym, najłatwiej jest rozwiązać zagadnienie sposobem wykreślnym. Załóżmy np., że zależność okresowo zmiennego prądu od czasu wyraża się dla połowy okresu krzywą A, wskazaną na rys. 5. Podnosimy rzędne krzywej A do kwadratu i wykreślamy drugą krzywą B, przedstawiającą zmienność kwadratu prądu w zależności od czasu. Następnie na podstawie ad wykreślamy w jakikolwiek sposób prostokąt $abcd$, którego pole jest równe zakreskowanemu polu krzywej B; wysokość ab tego prostokąta jest średnią z kwadratów rzędnych krzywej A. Wymierzywszy w odpowiedniej skali wysokość ab i wyciągnąwszy pierwiastek kwadratowy z otrzymanej wielkości, znajdziemy wielkość czynną prądu zmiennego. Oczywistą jest rzeczą, że w podobny sposób znaleźć można także wielkość czynną dowolnego prądu zmiennego, nawet nie okresowo zmiennego; trzeba tylko wtedy podać dokładnie czas, dla którego bierzemy przeciętną z kwadratów.



Rys. 5.

6. Wielkość średnia prądu. Można też obliczać i mierzyć średnią siłę prądu w ciągu pewnego okresu czasu.

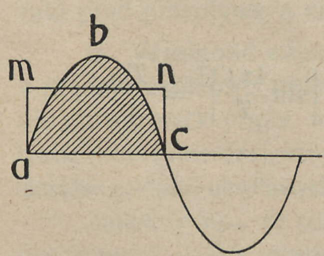
Przy prądach okresowo zmiennych pewne praktyczne znaczenie posiada średnia dla połowy okresu, t. j. dla oa (rys. 4); w tym czasie prąd jest zawsze dodatni i ponieważ kształt krzywej zachowuje się dalej z biegiem czasu bez zmiany, to łatwo spostrzec, że obliczona w ten sposób średnia będzie wogóle średnią siłą prądu w ciągu dowolnej liczby całych półokresów, branych niezależnie od kierunku.

Dla sinusoidy taki średni prąd i_s znajdziemy w sposób następujący:

$$i_s = \frac{1}{\frac{T}{2}} \int_0^{\frac{T}{2}} \bar{i} \,.\, \sin\frac{2\pi t}{T} \,.\, dt$$

$$i_s = \frac{2\bar{i}}{T} \,.\, \frac{T}{2\pi} \left[-\cos\frac{2\pi t}{T} \right]_0^{\frac{T}{2}} = \frac{2}{\pi} \,.\, \bar{i}.$$

Podobnie jak wielkość czynną prądu, można też znaleźć sposobem wykreślnym średnią jego wielkość dla połowy okresu. Określi się ona oczywiście wysokością prostokąta $amnc$ (rys. 6), mającego za podstawę odcinek, wyrażający czas połowy okresu, a pole równe polu krzywej abc, zakreskowanemu na rysunku.



Rys. 6.

Przy prądach okresowo zmiennych, najczęściej używanych w technice, częstość zmian tych prądów jest tak mała w porównaniu z szybkością przenoszenia się wzdłuż przewodników bodźca, wprawiającego w ruch elektryczność, że przyjmujemy wartość chwilową wielkości siły prądu, a także wartość czynną i średnią prądu za niezmienne na całej długości nierozgałęzionego obwodu.

ROZDZIAŁ II.

Ilość elektryczności.

Wychodząc z założenia, że prąd elektryczny jest ruchem elektryczności wzdłuż przewodnika, przyjmujemy, że iloczyn siły prądu przez czas da nam ilość elektryczności, która w tym czasie przepłynęła przez dany przekrój przewodnika.

Należy tu nadmienić, że tego rodzaju określenie jest zupełnie niezależne od wyobrażeń, jakie mamy o ruchu elektryczności w przewodnikach, t. j. niezależne od tego, czy prąd uważamy za ruch dodatniej tylko elektryczności, lub też tylko ujemnej, a może obu razem. Gdy wypadnie kiedy uczynić w tym względzie jakieś założenia, to będziemy przyjmowali, że ilością całkowitą elektryczności, przepływającą przez dany przekrój przewodnika, jest suma arytmetyczna ilości elektryczności dodatniej i ujemnej, przepływających przez ten przekrój w kierunkach odwrotnych.

Oznaczmy siłę prądu w danym przekroju przewodnika w chwili t przez i_t, a ilość elektryczności, która przepłynęła w czasie dt przez dq, w takim razie:

$$dq = i_t \, . \, dt.$$

W ciągu czasu t przepłynie oczywiście przez ten przekrój pewna ilość elektryczności:

$$q = \int_0^t i_t \, . \, dt.$$

Przy prądzie stałym wynik całkowania da nam wzór:

$$q = i \, . \, t.$$

Przy prądzie okresowo zmiennym może być mowa o ilości elektryczności, przepływającej np. w ciągu połowy okresu; wtedy, zakładając prąd sinusoidalnie zmienny, otrzymamy:

$$q = \int_0^{\frac{T}{2}} \bar{i} \, . \sin \frac{2\pi t}{T} \, . \, dt = i_s \, . \, \frac{T}{2},$$

a więc:

$$q = \bar{i} \, . \, \frac{2}{\pi} \, . \, \frac{T}{2} = \frac{\bar{i} \, . \, T}{\pi}.$$

W sprawie jednostek, używanych do mierzenia ilości elektryczności należy zaznaczyć, że z powyższych wzorów otrzymamy ilość elektryczności w bezwzględnych jednostkach elektromagnetycznych, gdy wprowadzimy siłę prądu w bezwzględnych jednostkach elektromagnetycznych, a czas w sekundach.

Praktyczne jednostki **kulomb** i **amperogodzina** odpowiadają innym jednostkom czasu i siły prądu. Kulomb — odpowiada amperom i sekundom, a amperogodzina — amperom i godzinom [1].

---

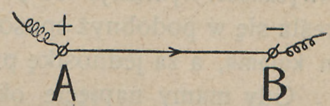
[1]) Patrz Rozdział XXVII.

ROZDZIAŁ III.

Napięcie prądu, jego praca i moc.

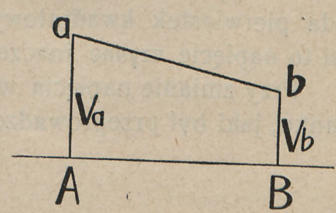
Wiadomo z doświadczenia, że w każdej części obwodu, po której przebiega prąd elektryczny, odbywają się przemiany energji.

Rozważmy wskazaną na rys. 7 część obwodu AB, w której prąd płynie od A do B. W tej części obwodu wywiązuje się energja w jakiejkolwiek postaci, np. otrzymuje się ciepło, przewodnik ogrzewa się; w takim wypadku utarł się zwyczaj oznaczania tego końca przewodnika, którym prąd wchodzi, przez (+) a tego, którym wychodzi przez (—).



Rys. 7.

Dla wyrażenia ilościowego pracy, wykonanej przez prąd, zgodzono się określać zdolność elektryczności do wykonania pracy pojęciem, które nazywamy **potencjałem** i mówić, że w punkcie A potencjał jest wyższy $\div V_a$, a w punkcie B niższy $\div V_b$. Sposobem wykreślnym potencjały dadzą się przedstawić tak, jak to widzimy na rys. 8. Różnica odcinków Aa i Bb wyraża spadek potencjału na drodze prądu AB lub też, jak zwykle mówimy, **napięcie** na końcach części obwodu AB.



Rys. 8.

Napięcie oznaczamy zwykle literą e, a więc:

$$e = V_a - V_b .$$

Ścisłe ilościowe określenie napięcia wyprowadzamy ze wzoru:

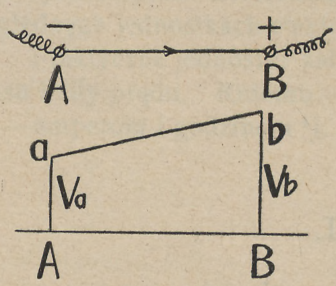
$$A = e \cdot q ,$$

gdzie A oznacza energję, wywiązującą się w części obwodu AB przy przejściu od A do B ilości elektryczności q, gdy napięcie pomiędzy A i B jest stałe i równe e.

$$e = \frac{A}{q} .$$

Może być jeszcze inny wypadek, mianowicie gdy w części obwodu AB (patrz rys. 9) nie wywiązuje się energja, ale pochłania się np. w wewnętrznym

obwodzie jakiegokolwiek źródła prądu. W tym wypadku ten koniec, którym prąd wchodzi, oznaczamy przez (—), a ten, którym prąd wychodzi, przez (+). Potencjał w punkcie B jest wtedy zgodnie z poprzednim określeniem wyższy, niż w pnnkcie A i sposobem wykreślnym zmiana potencjału da się wyobrazić, np. tak, jak na rys. 10.



Rys. 9 i 10.

Napięcie jest tu:

$$e = V_b - V_a.$$

i określi się ściśle również wzorem:

$$A = e \,.\, q,$$

gdzie A oznacza energję pochłoniętą przez część obwodu AB.

Jednostki służące do mierzenia napięcia są rozmaite, zależnie od tego, w jakich jednostkach mierzymy pracę i ilość elektryczności.

Bezwzględną jednostką elektromagnetyczną napięcia prądu jest takie napięcie, przy którym **przesunięcie jednej bezwzględnej elektromagnetycznej jednostki ilości elektryczności wywiązuje lub pochłania jeden erg pracy.** Jednostka praktyczna **wolt** [1]) określa się w podobnyż sposób, przyjmując za jednostkę ilości elektryczności jeden **kulomb**, a za jednostkę pracy jeden **dżaul.**

Gdy mamy napięcie okresowo zmienne przy niezmiennej długości okresu i niezmiennych maksymalnych wartościach napięcia, to znaczenie praktyczne posiada pierwiastek kwadratowy z przeciętnej z kwadratów wartości chwilowych. Jest to napięcie **czynne** inaczej efektywne lub skuteczne.

Przy zmianie napięcia według prawa sinusoidy, na podstawie podobnego rachunku, jaki był przeprowadzony przy omawianiu siły prądu, wypada

$$e = \frac{\bar{e}}{\sqrt{2}}.$$

e — jest to napięcie czynne, a $\bar{e}$ — wartość maksymalna napięcia.

Inne uwagi, dotyczące krzywej prądu, mogą być również zastosowane do krzywej napięcia, wyrażającej zależność napięcia od czasu.

Praca prądu może być wyrażona także przez siłę prądu; jeżeli przyjąć pod uwagę, że

$$q = i \,.\, t,$$

wtedy:

$$A = e \,.\, i \,.\, t.$$

W praktyce najczęściej wyrażamy e — w woltach, i w amperach i t w godzinach, wtedy otrzymujemy A w watogodzinach, albo, dzieląc przez 1000, w kilowatgodzinach.

Przechodząc od pracy A do mocy W prądu (inaczej sprawności lub dzielności), otrzymamy:

$$W = \frac{A}{t} = e \,.\, i.$$

[1]) Patrz Rozdział XXVII.

Gdy e jest wyrażone w woltach, a i w amperach, to W otrzymujemy w watach, albo, dzieląc przez 1000, w kilowatach.

Gdy prąd i napięcie są zmienne, to praca w ciągu nieskończenie małego czasu dt wyrazi się wzorem:

$$dA = e_t \,.\, i_t \,.\, dt,$$

a w ciągu czasu skończonego t — wzorem:

$$A = \int_0^t e_t \,.\, i_t \,.\, dt.$$

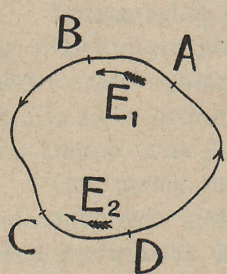
Moc prądu zmiennego w chwili t będzie:

$$W_t = \frac{dA}{dt} = e_t \,.\, i_t \,.$$

ROZDZIAŁ IV.

Siła elektromotoryczna.

1. Określenie zasadnicze. Pojęcie siły elektromotorycznej określamy w sposób następujący: Wyobraźmy sobie, jak wskazano na rys. 11, obwód zamknięty, po którym płynie prąd elektryczny. Załóżmy, że pomiędzy punktami A i B obwodu zostaje pochłonięta energja, dopływająca z zewnątrz w jakiejkolwiek postaci. Twierdzimy wtedy, że w części obwodu AB, w tym miejscu, gdzie odbywa się owa przemiana energji, istnieje siła elektromotoryczna E_1, która określa się ściśle wzorem:



Rys 11.

$$dA = E_1 \, . \, dq,$$

gdzie dA — energja dopływająca z zewnątrz, dq — ilość elektryczności, która przepłynęła od A do B w tym czasie, kiedy pochłoniętą została ilość energji dA.

Jeżeli siła prądu będzie i_t, a czas dt, to, ponieważ $dq = i_t \, dt$, możemy więc napisać:

$$dA = E_1 \, . \, i_t \, . \, dt;$$

a dla skończonego okresu czasu t:

$$A = \int_0^t E_1 \, . \, i_t \, . dt \, .$$

Gdy E_1 i i_t w ciągu czasu t mają wielkości stałe, to

$$A = E_1 \, . \, i \, . \, t,$$

albo:

$$A = E_1 \, . \, q.$$

Kierunek tej siły elektromotorycznej E_1 uważamy za **zgodny** z kierunkiem prądu.

Może zachodzić inny jeszcze wypadek, gdy pomiędzy punktami C i D obwodu wywiązuje się energja. W tym razie również twierdzimy, że istnieje w tej części obwodu siła elektromotoryczna E_2 określona ściśle wzorem:

$$dA = E_2 \, . \, dq,$$

albo jak poprzednio:

$$A = E_2 \, . \, i \, . \, t$$

i

$$A = E_2 \, . \, q,$$

gdzie A — energja, wywiązująca się pomiędzy punktami C i D, w tym czasie, gdy od C do D przepłynęła ilość elektryczności q.

Kierunek siły elektromotorycznej E_2 uważamy w tym razie za **odwrotny** względem kierunku prądu [1]).

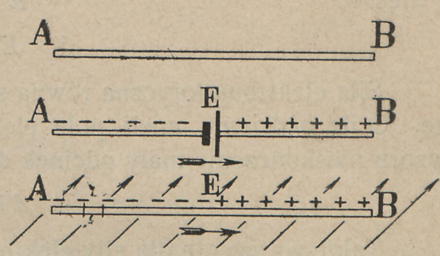
Z podanych tu wyrażeń siły elektromotorycznej widzimy, że wymiar tej wielkości jest taki sam, jak wymiar napięcia elektrycznego. Wobec tego do mierzenia siły elektromotorycznej stosujemy te same jednostki, co i do mierzenia napięcia.

2. Siła elektromotoryczna w elektrostatyce. Można jeszcze wyjaśnić pojęcie siły elektromotorycznej w inny sposób.

Rozważmy wskazany na rys. 12 odcinek przewodnika AB, usunięty od wszelkich wpływów, działających na ładunki elektryczne.

Przewodnik ten, według pojęć współczesnych, ma ładunki elektryczne dodatnie i ujemne, rozłożone jednostajnie w całej swojej objętości [2]).

Z chwilą, gdy umieścimy w środku tego przewodnika ogniwo galwaniczne, jak wskazano na rys. 13, lub też jeśli poddamy go indukcyjnemu działaniu pola magnetycznego, np. poruszając przewodnik w tym polu (rys. 14), jednostajność układu ładunków, jak to wiadomo z doświadczenia, będzie naruszona: jedna połowa przewodnika naelektryzuje się dodatnio, a druga ujemnie.



Rys. 12, 13, 14.

Tego rodzaju układ ładunków jest statyczny, wypadkowa więc wszystkich sił, działających na te ładunki, musi być równa zeru.

Wiadomo, że ładunki różnoimienne przyciągają się; wskutek więc oddziaływania na siebie ładunków, wywiązują się siły, które jednak równoważy inna siła odwrotna, pochodząca od tak zwanej siły elektromotorycznej. W przypadku, wskazanym na rys. 13, mamy siłę elektromotoryczną ogniwa, a w przewodniku na rys. 14 siłę elektromotoryczną indukcji.

Pod wpływem współdziałania ładunków ładunek dodatni przewodnika $A'B$ na rys. 13 przesunąłby się na lewo; czynnik więc, równoważący powyższe działanie, musi być skierowany na prawo. Taki właśnie kierunek przyjmujemy dla siły elektromotorycznej ogniwa. Siła elektromotoryczna sprawia zatem przesunięcie ładunków w przewodnikach i utrzymuje je w nowym położeniu.

Z określenia siły elektromotorycznej, wyprowadzonego na przykładzie obwodu z prądem, widać jednak, że, nie bacząc na nazwę, siła elektromotoryczna nie jest siłą w mechanicznym tego słowa znaczeniu.

---

[1]) Bez wyobrażenia takiej siły elektromotorycznej obchodzimy się tylko w jednym wypadku, gdy w jednorodnym przewodniku wywiązuje się ciepło, tak zwane ciepło Joule'a (patrz rozdział XVI, § 1).

[2]) Każde ciało, będące w stanie elektrycznie obojętnym, posiada w każdej cząsteczce ładunki elektryczne dodatnie i ujemne w równych ilościach.

Na przykładzie statycznym własność powyższa da się uwydatnić jeszcze wyraźniej. Przedtem jednak ustalmy jeszcze jedno pojęcie elektrostatyczne.

Gdy w przestrzeni, gdzie działają siły elektryczne, t. j. w polu elektrycznym na ładunek q działa pewna siła f, to własności pola elektrycznego [1]) w tym punkcie, gdzie znajduje się ładunek q, określają się wielkością $\mathbf{E}$, którą nazywamy **natężeniem pola elektrycznego** i wyrażamy wzorem:

$$f = \mathbf{E} \, . \, q, \text{ skąd } \mathbf{E} = \frac{f}{q}.$$

Poprzednio dla określenia siły elektromotorycznej podaliśmy wzór,

$$A = E \, . \, q.$$

Załóżmy, że praca A została wykonana przy przesuwaniu ilości elektryczności q w polu elektrycznym o natężeniu $\mathbf{E}$ wzdłuż drogi l, zgodnej co do kierunku z $\mathbf{E}$. Wtedy:

$$A = f \, . \, l = \mathbf{E} \, . \, q \, . \, l,$$

a więc:

$$E \, . \, q = \mathbf{E} \, . \, q \, . \, l$$

$$\text{i} \quad E = \mathbf{E} \, . \, l.$$

Siła elektromotoryczna równa się zatem iloczynowi natężenia pola przez drogę. O ile będziemy mieli pole elektryczne niejednostajne, to wprowadzimy do wzoru nieskończenie mały odcinek drogi dl i wtedy otrzymamy wzór:

$$dE = \mathbf{E} \, . \, dl.$$

Takie wyrażenie dla siły elektromotorycznej wyjaśnić można na przykładzie, przedstawionym na rys. 14.

W każdym odcinku przewodnika AB powstaje pod wpływem pola magnetycznego siła elektromotoryczna. Rozważając odcinek nieskończenie małej długości dl, mamy w nim nieskończenie małą siłę elektromotoryczną $d\,E$, skierowaną na prawo, a jednocześnie ładunki, zebrane na przewodniku AB, wywołują pewne natężenie pola elektrycznego $-\mathbf{E}$, skierowane na lewo. Otóż siła elektromotoryczna jest tutaj tym czynnikiem, który wywołuje pole o natężeniu $+\mathbf{E}$ zwrócone na prawo. Wielkość tego natężenia określamy wzorem:

$$\mathbf{E} = \frac{dE}{dl}.$$

Tak, że ostatecznie wewnątrz przewodnika natężenie pola elektrycznego równa się zeru i ładunki mogą być w równowadze.

Kierunek siły elektromotorycznej przyjmujemy za zgodny z wywołanym przez nią natężeniem pola.

Cała siła elektromotoryczna na długości AB wyrazi się oczywiście całką:

$$E = \int_{AB} \mathbf{E} \, . \, d\,l.$$

Podane tu wzory dla siły elektromotorycznej wskazują, że w każdym polu

[1]) O polu elektrycznym patrz Rozdział IX.

elektrycznym może być mowa o sile elektromotorycznej jako całce iloczynów natężenia pola przez cząstki drogi wzdłuż linji natężenia [1]).

3. **Kształt krzywej siły elektromotorycznej.** Siły elektromotoryczne mogą być niezmienne w czasie co do wielkości i co do kierunku, lub też mogą się zmieniać w najrozmaitszy sposób. Uwagi, przytoczone przy omawianiu napięć zmiennych, stosują się w całości do sił elektromotorycznych. Na szczególną jednak uwagę przy siłach elektromotorycznych zasługuje spółczynnik, który jest charakterystyczny dla kształtu krzywej siły elektromotorycznej; nazywamy go **spółczynnikiem kształtu krzywej** i określamy jako stosunek wartości czynnej do średniej.

Oznaczmy go przez f i obliczmy jego wartość dla sinusoidy.

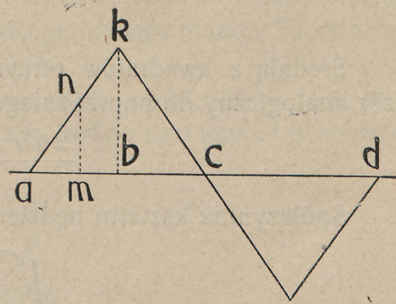
$$f = \frac{E}{E_ś} = \frac{\sqrt{\frac{2}{T}\int\limits_0^{T/2} E_t^2\, dt}}{\frac{2}{T}\int\limits_0^{T/2} E_t\, dt},$$

albo:

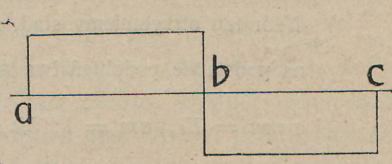
$$f = \frac{\bar{E}\frac{1}{\sqrt{2}}}{\bar{E}\frac{2}{\pi}} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1{,}11.$$

Dla krzywych bardziej ostrych wypadnie f większe, natomiast dla krzywych bardziej płaskich niż sinusoida, spółczynnik kształtu będzie mniejszy od powyższego.

Przykłady. Przedewszystkim podaję tu dwie linje najbardziej charakterystyczne, wyrażające siłę elektromotoryczną okresowo-zmienną. Na rys. 15 linja łamana jest ułożona w trójkąty, a na rys. 16 w prostokąty. Średnia siła elektromotoryczna dla połowy okresu (od a do c) (rys. 15) jest taka sama, jak dla ćwierci okresu (od a do b), i równa się $\frac{1}{2}\bar{E}$ ($\bar{E}$ oznacza wartość maksymalną). Pierwiastek kwadratowy ze średniej z kwadratów dla tejże części okresu znajdziemy z wzorów następujących:



Rys. 15.



Rys. 16.

$$E = \sqrt{\frac{1}{T/4}\int\limits_0^{T/4} E_t^2\, dt},$$

[1]) Patrz jeszcze bardzo charakterystyczny wypadek powstawania siły elektromotorycznej w pierścieniu, znajdującym się w zmiennym polu magnetycznym (Rozdział XX, 5).

w powyższym wzorze $E_t = \frac{\overline{E}}{T/4} \cdot t$ [1])

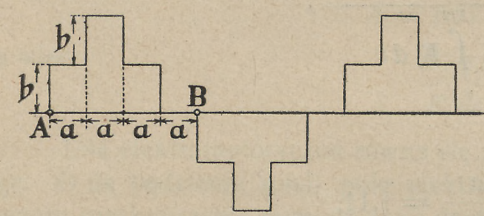
a więc $E = \frac{\overline{E}}{\sqrt{3}}$,

a $f = \frac{E}{E_ś} = \frac{2 \cdot \overline{E}}{\sqrt{3} \cdot \overline{E}} = 1{,}15.$

Dla linji rys. 16 średnia i pierwiastek kwadratowy ze średniej z kwadratów są równe, a więc spółczynnik kształtu będzie:

$$f = 1.$$

Są takie kształty krzywych siły elektromotorycznej, jak np. na rys. 17, dla których spółczynnik kształtu można wyznaczyć bardzo łatwo geometrycznie. Ponieważ spółczynnik nie może zależeć od skali, wybranej dla wykreślenia krzywej, więc, oznaczywszy odcinki rzędnych przez b, a odcinki odciętych przez a, jak wskazano na rys. 17, łatwo znajdziemy omawiany spółczynnik, stosując we wzorach te oznaczenia.



Rys. 17.

Ponieważ pół okresu dla rozważanej krzywej odpowiada odległości od A do B, średnia rzędna na pół okresu wyrazi się wzorem:

$$\frac{2ab + a2b}{4a} = b.$$

Średnią z kwadratów otrzymamy, podnosząc rzędne do kwadratu i pisząc wzór analogiczny do poprzedniego:

$$\frac{2ab^2 + a\,(2b)^2}{4a} = \frac{3}{2}\,b^2.$$

Spółczynnik kształtu będzie:

$$f = \frac{\sqrt{\frac{3}{2}\,b^2}}{b} = \sqrt{\frac{3}{2}} = 1{,}225.$$

[1]) Wzór ten otrzymujemy stąd, że, jak to widać z rysunku, na podstawie podobieństwa trójkątów: $\frac{mn}{am} = \frac{bk}{ab}$,

a $mn = E_t$, $am = t$; $bk = \overline{E}$: $ab = \frac{T}{4}$ (cały okres ciągnie się od a do d), więc:

$$\frac{E_t}{t} = \frac{\overline{E}}{\frac{T}{4}}, \text{ skąd } E_t = \frac{\overline{E}}{\frac{T}{4}} \cdot t.$$

CZĘŚĆ II.

Własności obwodu elektrycznego.

ROZDZIAŁ V.

Opór omiczny i przewodnictwo ciał.

1. Określenie zasadnicze. Wiemy z doświadczenia, że wszystkie przewodniki, po których przepływa prąd, ogrzewają się. Jeżeli będziemy mieli na względzie przewodniki jednorodne na całej rozważanej długości, to wywiązywanie się ciepła wyjaśniamy sobie tą własnością przewodników, którą przyjęto nazywać **oporem omicznym** i uważać za wprost proporcjonalną do ilości ciepła, wywiązującego się w jednostce czasu. Wiadomo też z doświadczenia, że ilość wywiązującego się w przewodniku ciepła jest proporcjonalna do drugiej potęgi prądu. Te zależności wyraża prawo Joule'a.

Mówimy zwykle, że ciepło powstaje skutkiem pracy prądu; jeżeli więc moc prądu, wytwarzającą ciepło, oznaczymy przez W, to będzie ono wprost proporcjonalne do i^2 i do r. Piszemy zatem:

$$W = i^2 r, \text{ stąd } r = \frac{W}{i^2}.$$

Wzór ten określa ściśle pojęcie oporu omicznego — r.

Bezwzględną jednostkę elektromagnetyczną oporu wyprowadzimy z założenia, że prąd w przewodniku posiada siłę bezwzględnej jednostki elektromagnetycznej, a moc jego, wytwarzająca ciepło Joule'a, wynosi jeden erg na sekundę.

Praktyczna zaś jednostka — **om** [1]) jest to opór takiego przewodnika, w którym, przy prądzie jednego **ampera**, moc, wytwarzająca ciepło, wynosi jeden **wat**.

Doświadczeniem stwierdzono, że wielkość oporu jest wprost proporcjonalna do długości przewodnika i odwrotnie poporcjonalna do przekroju, — nadto opór zależy od własności chemicznych i fizycznych przewodnika.

---

[1]) Om oznacza się zwykle przez dużą literę grecką omega: Ω. Określenie oma, podane tutaj, jest teoretyczne, określenie praktyczne czytelnik znajdzie dalej w rozdziale XXVII § 6 i w XXVIII.

Na opór przewodników wpływają rozmaite czynniki zewnętrzne, np. selen jest bardzo wrażliwy na promienie świetlne. Szczególnie pod wpływem promieni żółtozielonych opór selenu zmniejsza się znacznie. Po usunięciu tego wpływu wielkość oporu wraca do poprzedniej wartości, odbywa się to jednak powoli. Szczególnie wrażliwy na promienie świetlne jest taki selen, który był poprzednio utrzymywany przez czas długi w temperaturze nieco niższej od temperatury topnienia (220°).

Opór bismutu zmienia się pod wpływem pola magnetycznego.

2. **Opór właściwy i przewodnictwo.** W praktyce oprócz długości i przekroju najważniejszemi czynnikami oporu są: skład chemiczny i temperatura.

Zwykle opór przewodników wyraża się wzorem następującym:

$$r = \rho \frac{l}{q}$$

gdzie l — długość przewodnika (najczęściej w metrach), q — przekrój przewodnika (najczęściej w milimetrach kwadratowych), ρ — opór właściwy.

Oprócz oporu przewodników posługujemy się nieraz wielkością odwrotną: **przewodnictwem.** Jeżeli oznaczymy przewodnictwo pewnego przewodnika przez k, a opór przez r, to

$$k = \frac{1}{r}.$$

Jednostką przewodnictwa będzie przewodnictwo takiego drutu, którego opór równa się jednemu omowi. Taką jednostkę jedni nazywają **mo**, inni siemens.

Jeżeli ρ jest oporem właściwym, to przewodnictwem właściwym nazwiemy:

$$\gamma = \frac{1}{\rho}.$$

Na zasadzie zaś wzoru dla oporu:

$$r = \rho \frac{l}{q},$$

otrzymamy dla przewodnictwa wzór:

$$k = \gamma \frac{q}{l}.$$

Jako uzupełnienie powyższych wzorów może służyć wzór:

$$\rho_t = \rho_0 (1 + \alpha t),$$

wyrażający z dokładnością dostateczną w zwykłej praktyce [1]) zależność oporu właściwego od temperatury; w tym wzorze ρ_t oznacza opór właściwy w temperaturze t, ρ_0 — opór właściwy przy zerze według skali termometrycznej Celsiusza, α — spółczynnik zmienności oporu od temperatury. Częściej stosujemy wzór nieco odmienny:

$$\rho_t = \rho_{15} [1 + \alpha (t - 15)],$$

albowiem w tablicach opory podawane są najczęściej przy temperaturze 15° C.

Ważniejsze dane co do wielkości ρ w omach na metr długości przewodnika

---

[1]) W granicach $\pm$ kilkudziesięciu stopni od temperatury 15° C.

i mm² przekroju przy 15° C. i α na 1000° [1]) podaję dla metali i węgla w tablicy według kalendarza Uppenborna z roku 1914.

Materjał:	ρ	α × 1000
Drut miedziany (stosowany w praktyce elektrotechnicznej): miękki	0,01720	4,0
„ twardy	0,01750	4,0
Drut i blacha żelazna	0,12 — 0,14	4,8 do 4,5
Glin walcowany	0,02874	3,7
Ołów prasowany	0,20	3,7
Platyna	0,094	2,35
Rtęć	0,9532	0,873
Srebro miękkie	0.0158	3,6
„ twarde	0,0175	3,6
Złoto	0,022	3,50
Kadm	0,068	3,80
Nikiel	0,11 — 0,13	4 do 3
Osm	0,095	—
Palad	0,11	3
Tantal	0,165	3,0
Bismut prasowany	1,1 — 1,4	3,5
Cynk prasowany	0,059	3,9
Cyna	0,11 — 0,14	4,5
Stopy miedzi z glinem	0,13 — 0,29	0,5 do 1
Mosiądz (30 % Zn)	0,065 — 0,085	2 do 1,2
Stop platyny z rodem (10% Rh)	0,20	1,0 do 1,7
Stop platyny ze srebrem (20% Pt)	0,20	0,2 do 0,3
Stopy miedzi z manganem	0,43 — 1,073	0,00 do 0,05
Stop 84 Cu + 12 Mn + 4 Ni	0,41 — 0,46	– 0,003 do 0,01
Stopy miedzi z niklem (i innemi ciałami w drobnych ilościach)	0,33 — 0,50	0,005 do 0,053
Stopy miedzi z niklem, cynkiem (i innemi ciałami w drobnych ilościach)	0,30 — 0,495	0,072 do 0,350
Stopy żelaza z niklem (i innemi ciałami w drobnych ilościach)	0,85 — 0,86	0,69 do 0,73
Grafit i węgiel z retort [2])	13 — 100	—0,8 do —0,2

[1]) Np. gdy opór drutu miedzianego przy 15° wynosi 5 Ω, to przy 60° będzie:
$5 + 5 \cdot 0{,}004 \cdot (60 - 15) = 5{,}9\ \Omega$.

[2]) Djament i zwykły węgiel drzewny mają nadzwyczaj duży opór właściwy.

Ze wzrostem temperatury zwiększa się opór prawie wszystkich metali. Opór zaś węgla przeważnie zmniejsza się, więc α jest tu ujemne; znane są jednak odmiany węgla, posiadające własności metaliczne, t. j. α dodatnie.

Zmiana oporu stopów pod wpływem temperatury jest wogóle znacznie mniejsza, niż zmiana oporu metali czystych. Gdy dla metali czystych przyrost oporu na jeden stopień skali Celsiusza wynosi przeważnie około 0,004, to natomiast niektóre stopy mają spółczynnik tysiąc razy mniejszy.

W technice stosowane są zarówno przewodniki o dużym, jak i o małym α. Gdy chodzi o to, aby przy zwiększającej się sile prądu, a więc i wzrastającej temperaturze przewodnika, opór wzrastał, to należy stosować np. miedź lub żelazo. Mając na względzie szersze granice temperatury, należy zaznaczyć, że np. dla żelaza przy wzroście temperatury od 0^0 do 800^0 opór wzrasta więcej niż proporcjonalnie do temperatury, a krzywa, wyrażająca tę zależność, ma kształt zbliżony do paraboli.

Przy 800^0 opór właściwy żelaza jest mniej więcej pięciokrotny w porównaniu z oporem właściwym przy 0^0.

Przewodniki o dużym spółczynniku cieplnym oporu mają np. zastosowanie przy mierzeniu temperatury sposobem elektrycznym.

Gdy wszakże chodzi o stałość oporu przewodników w rozmaitych okolicznościach, najwłaściwsze są stopy (np. manganin t j. stop miedzi z manganem i niklem), których opór przy znacznych nawet wahaniach temperatury zmienia się bardzo mało.

Opory właściwe roztworów wykazuje tablica następna [1]), w której podane są w omach na długość 1 cm i przekrój 1 cm^2 przy 18^0 C.; spółczynnik α na 1^0 C. wynosi dla wszystkich wymienionych tu roztworów około $2^0/_0$ i jest ujemny, tak, że przy ogrzewaniu opór właściwy roztworów zmniejsza się.

Stężenie wpływa na opór roztworów w ten sposób, że roztwory znacznie rozcieńczone i silnie stężone mają opór duży; przy pewnym średnim stężeniu opór roztworu jest najmniejszy [2]).

Roztwór:	Procentowa zawartość ciała rozpuszczonego w wodzie:						
	5	10	15	25	30	50	80
Kwasu siarkowego H_2SO_4	4,78	2,55	1,84	1,39	1,35	1,85	9,02
„ azotowego HNO_3	3,87	2,17	1,63	1,30	1,27	1,58	3,75
„ solnego HCl	2,53	1,59	1,34	1,38	1,51	—	—
Wodorotlenku potasu KHO	5,82	3.17	2,35	1,85	1,84	—	—
Soli kuchennej NaCl	14,92	8,27	6,10	4,67	—	—	—
Siarczanu miedzi $CuSO_4$	52,60	31,30	23,80	—	—	—	—
Siarczanu cynku $ZnSO_4$	52,60	31,30	23,80	20,85	22,74	—	—
Siarczanu magnezu $MgSO_4$	38,50	24,40	20,85	23,80	—	—	—

[1]) Zaczerpnięta z kalendarza Uppenborna za rok 1914 i przeliczona z przewodnictwa na opór.

[2]) Patrz rozdział XVII, § 3.

Prąd elektryczny przepływa również przez tak zwane ciała izolujące. Opór tych ciał zależy w wysokim stopniu od napięcia prądu, przy którym wykonywane są pomiary, od temperatury i stopnia wilgotności otaczającego powietrza. Na podstawie pomiarów, przeprowadzonych w pracowni miejskiej w Monachjum [1]), podaję tu kilka ważniejszych liczb w omach na 1 *cm* długości i przy 1 cm^2 przekroju.

	Opór właściwy.	Napięcie w woltach na 1 *mm* grubości.	Temperatura powietrza w stop. C.	Wilgotność względna powietrza w %.
Szkło	$8{,}2 \cdot 10^{12}$	450	19	48
„	$6{,}6 \cdot 10^{12}$	690	17	70
Mika	$2{,}6 \cdot 10^{12}$	4000	19	48
Kauczuk	$1130 \cdot 10^{12}$	6600	17	80
„	$800 \cdot 10^{12}$	10500	17	80
„	$210 \cdot 10^{12}$	21000	17	80
Guma twarda (ebonit)	$>4200 \cdot 10^{12}$	540	19	48
„ „	$3600 \cdot 10^{12}$	910	17	70
Linoleum	$1{,}3 \cdot 10^{12}$	286	16	70
„	$1{,}0 \cdot 10^{12}$	572	16	70
Marmur	$510 \cdot 10^{6}$	33,7	16	70
„	$495 \cdot 10^{6}$	50,4	16	70
„	$435 \cdot 10^{6}$	66,5	16	70
Łupek (szyfer)	$0{,}78 \cdot 10^{6}$	40,0	16	70
Glina (wypalona bez glazury) . .	$13000 \cdot 10^{6}$	92	19	48
Fibra (Vulkanfiber)	$53 \cdot 10^{6}$	371	19	48
Mikanit	$6500 \cdot 10^{12}$	1250	19	48
Parafina	$3900 \cdot 10^{12}$	435	17	70
„	$240 \cdot 10^{12}$	2860	17	80

Wreszcie zaznaczyć jeszcze można, że opór właściwy wody dystylowanej na 1 *cm* długości i przy 1 cm^2 przekroju wynosi od 0,3 do 7 miljonów omów [2]), smoły drzewnej $1{,}7 \cdot 10^{15}\ \Omega$ przy 18^0 C., a ciężkiego oleju parafinowego $8 \cdot 10^{12}\ \Omega$— w tych samych warunkach.

Suche drzewo ma opór właściwy około kilkudziesięciu miljonów omów na 1 *cm* i 1 cm^2.

3. Wytrzymałość izolatorów. W praktyce oceniamy zwykle wartość materjałów izolacyjnych nie podług oporu omicznego, lecz według najmniejszego natężenia pola elektrycznego [3]), które przebija izolator.

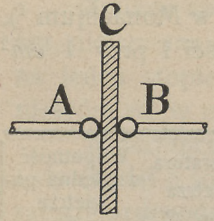
---

[1]) Patrz: Deutscher Kelender für Elektrotechniker von F. Uppenborn. 1914 r.

[2]) Opór wody rzecznej przy długości 1 *cm* i przekroju 1 cm^2 wynosi około 3000 omów wogóle jednak zależy oczywiście w znacznym stopniu od składu chemicznego.

[3]) Patrz Rozdział IX, § 2.

Gdy mamy izolator *C* (rys. 18), umieszczony pomiędzy dwoma przewodnikami *A* i *B*, to przy pewnym napięciu pomiędzy temi przewodnikami tworzy się w izolatorze otwór, przez który płynie prąd od *A* do *B* w postaci iskry. Najniższe napięcie, przy którym izolator bywa przebity, zależy od wielu okoliczności, a przedewszystkim z jednej strony od kształtu przewodników *A* i *B* i własności elektrycznych obwodu, połączonego z temi przewodnikami, a z drugiej strony od chemicznych i fizycznych własności izolatora, szczególnie od jego grubości, temperatury i wilgotności powietrza otaczającego.



Rys. 18.

Najniższe napięcie, przypadające na jednostkę grubości izolatora, przy którym prąd przebija izolator, nazywamy **wytrzymałością izolatora na przebicie.**

W celu wykazania, jaka jest wytrzymałość na przebicie najczęściej używanych materjałów izolacyjnych, podaję tu wyniki doświadczeń d-ra Walter'a, który starał się wytworzyć najdogodniejsze warunki dla przebicia izolatorów i otrzymał liczby następujące [1]):

Materjał:	Wytrzymałość na przebicie w woltach na milimetr (wartość czynna przy napięciu sinusoidalnie zmiennym).
Guma czysta twarda . .	10000 — 38000
Szkło zwykłe	8000 — 9000
Porcelana zwykła . . .	7500 — 9500
Porcelana twarda . . .	9000 — 10500
Marmur	6500
Mika jednolita	17500 — 28500
Kalafonja	11000
Parafina	11500
Guma miękka	18500

Wytrzymałość na przebicie rozmaitego rodzaju oliwy i nafty, według doświadczeń p. Jona wynosi od 3000 do 710 woltów na milimetr. Za przewodniki, pomiędzy któremi przeskakiwała iskra, były tu stosowane ostrze i płytka. Liczby podane dla napięcia wyrażają wartość czynną napięcia sinusoidalnie zmiennego.

Opór i wytrzymałość na przebicie gazów, a w szczególności powietrza, zależy w wysokim stopniu od prężności i od czynników zewnętrznych tak zwanych jonizujących [2]). Wogóle należy zaznaczyć, że powietrze albo np. dwutlenek węgla przy znacznej prężności (kilka atmosfer) są dobremi bardzo izolatorami; im prężność

[1]) Według kalendarza Uppenborna z roku 1914.
[2]) Rozdz. XVII, § 3.

jest mniejsza, tym mniejszy mają one opór dla prądu elektrycznego, do pewnej jednak tylko granicy, przy bardzo małej prężności opór jest znowu większy, tak, że doskonała próżnia stanowi izolator.

Taka własność gazów daje się wyjaśnić przez teorję jonizacji, polegającą na tem, że prąd elektryczny przepływa przez gaz w sposób podobny, jak w elektrolitach. Prąd przepływa tylko przez gaz zjonizowany, t. j. taki, którego cząsteczki podzieliły się na tak zwane jony. Jony są to cząsteczki materji, naładowane elektrycznością dodatnią lub ujemną. Ruch jonów naelektryzowanych stanowi prąd elektryczny w gazach.

Wszystkie czynniki, ułatwiające tworzenie się jonów, lub też wprost wytwarzające jony zmniejszają opór gazu [1]).

Według doświadczeń W. Weicker'a podana jest w tablicy następującej czynna wartość napięcia sinusoidalnie zmiennego w woltach, wywołująca pierwsze widoczne światełka na przewodnikach, znajdujących się pod napięciem. Zakończenie przewodników wykonano w postaci kulek o różnej średnicy.

Grubość warstwy powietrza pomiędzy kulkami w *mm*:	Napięcie przy średnicy kulek w *mm*:		
	10	50	150
10	19900	22800	21000
100	39800	102300	151300
200	43100	126000	—
400	46200	147300	—
600	47400	158900	—

Liczby te stosują się do powietrza w temperaturze 20° C., pod cisnieniem 740 *mm* wysokości słupa rtęci i przy wilgotności względnej 50%.

---

[1]) Szczegóły, dotyczące przewodnictwa gazów, czytelnik znajdzie w T. III „Zasad fizyki“ prof. A. Witkowskiego.

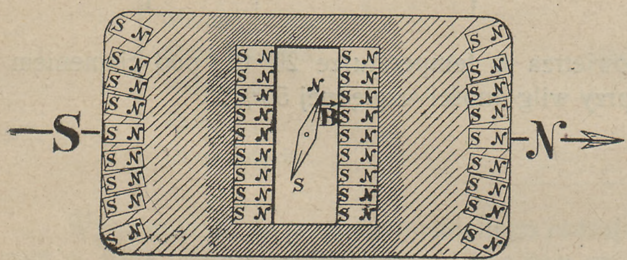
ROZDZIAŁ VI.

Własności magnetyczne ciał.

1. Indukcja magnetyczna. Prąd elektryczny z istoty swojej jest zawsze skojarzony z polem magnetycznym, które często wywiera wpływ na przebieg prądu. Dokładne więc poznanie tego pola oraz własności ciał, podlegających jego wpływom, jest niezbędne w nauce o prądzie elektrycznym.

O ile chodzi o pole magnetyczne w próżni lub w ośrodkach nie magnesujących się [1]), wystarcza rozważona powyżej wielkość natężenia pola magnetycznego; gdy jednak w polu magnetycznym umieścimy ciała magnesujące się, wpływ tych ciał na układ sił w polu zniewala do wprowadzenia pojęć nowych, zależnych od własności tych ciał.

W tym razie posługujemy się zwykle wielkością, która w układzie jednostek bezwzględnych, elektromagnetycznych ma wymiary te same, co i natężenie pola i nazywa się **indukcją magnetyczną**. Wielkość indukcji magnetycznej określamy przez natężenie pola wewnątrz wązkiej szczeliny, wyciętej w badanym przedmiocie, który został umieszczony w polu magnetycznym; ścianki boczne szczeliny są prostopadłe do kierunku natężenia pola magnesującego (patrz rys. 19).



Rys. 19.

Oznaczmy indukcję magnetyczną przez B, a natężenie pola magnesującego przez H. Łatwo zauważyć, że B nie może być równe H, ponieważ na igłę magnesową, umieszczoną wewnątrz szczeliny, będą działały, oprócz pola H, jeszcze i bieguny magnetyczne, powstające w rozważanym przedmiocie, jedne na końcach, z prawej i z lewej strony, drugie zaś wewnątrz, na bocznych ściankach szczeliny. Te bieguny są wynikiem odpowiedniego układu cząsteczek wewnątrz przedmio-

[1]) Powietrze magnesuje się nadzwyczaj słabo, praktycznie zatem może ono być uważane za ośrodek niemagnesujący się.

tu namagnesowanego. Cząsteczki, według teorji molekularnej magnetyzmu, są magnesami o dwóch biegunach i układają się swemi osiami magnetycznemi równolegle do natężenia pola magnesującego; kierunek od S do N w każdej cząsteczce zgodny jest z kierunkiem natężenia pola.

Oznaczmy siłę działania pola magnesującego na biegun igły magnesowej przez F_1, siłę działania biegunów zewnętrznych S i N przez F_2, wewnętrznych zaś powierzchni biegunowych szczeliny przez F_3 i załóżmy, że wybraliśmy taki punkt pola, gdzie kierunki wszystkich sił leżą na jednej prostej; wtedy siła wypadkowa, działająca na biegun igły magnesowej, będzie:

$$F = F_1 - F_2 + F_3.$$

Siła F_2 ma znak minus, ponieważ, jak widać z rysunku, działanie biegunów zewnętrznych jest odwrotne do działania biegunów wewnętrznych i do natężenia pola magnesującego.

Jeżeli wszystkie składniki równania powyższego podzielimy przez masę bieguna igły magnesowej $-m$, otrzymamy zamiast równania sił równanie natężeń pól:

$$\frac{F}{m} = \frac{F_1}{m} - \frac{F_2}{m} + \frac{F_3}{m}.$$

Wyraz $\frac{F}{m}$ nazywamy indukcją magnetyczną — B; $\frac{F_1}{m}$ oznaczamy przez H, a $\frac{F_2}{m}$ przez H' i $\frac{F_3}{m}$ przez H'', wtedy:

$$B = H - H' + H'' \text{ [1]}.$$

Ponieważ H'' jest zwykle znacznie większe od H', więc B wypada większe od H.

Gdy zamiast rozważanego przedmiotu mamy całą nieograniczoną przestrzeń, wypełnioną jednorodnym magnesującym się ośrodkiem, to wielkość H', którą zwykle nazywamy rozmagnesowującym natężeniem końców magnesu, nie istnieje; wtedy więc:

$$B = H + H''.$$

W takich warunkach stosunek $\frac{B}{H}$ oznaczamy przez μ i nazywamy **przenikliwością** lub **zdolnością** magnetyczną ośrodka.

Jest to, jak później [2]) zobaczymy, ta sama wielkość, o której wspomniałem w rozdziale I-ym, mówiąc o prawie Coulomb'a.

Badanie wielkości B na podstawie podanego tu określenia nastręcza wielkie trudności praktyczne; z tego względu dokonywamy tych badań zazwyczaj drogą pośrednią, korzystając z tego, że wielkość siły elektromotorycznej prądu elektrycz-

---

[1]) Stosujemy tu układ miar bezwzględny elektromagnetyczny; ściślejsze i ogólniejsze określenie wielkości B a także uzasadnienie różnych cech charakterystycznych tej wielkości podaję dalej w paragrafie 2-gim.

[2]) Patrz § 2.

nego indukcyjnego zależna jest od zmiany indukcji B w danym ośrodku. Szczegóły dotyczące tej sprawy podane są w rozdziale XXXVIII, § 2.

Zakładając jak wyżej:

$$\frac{B}{H} = \mu,$$

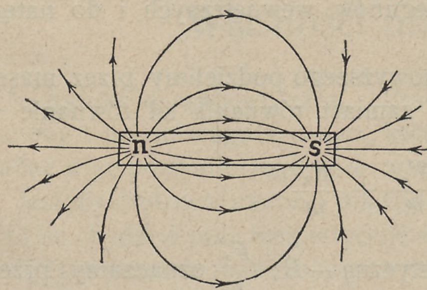
otrzymamy

$$B = \mu \, . \, H.$$

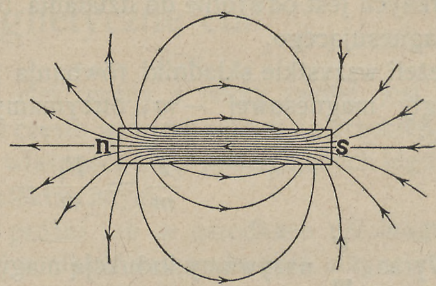
wielkość μ — w stosowanym tu układzie jednostek uważamy za liczbę oderwaną i skutkiem tego mierzymy B i H w tych samych jednostkach.

Jest jednak pewna zasadnicza różnica pomiędzy wielkościami B i H.

Natężenie pola magnetycznego H wokoło magnesu uzmysławiamy sobie za pomocą linij sił magnetycznych, które biegną od bieguna północnego do bieguna



Rys. 20.



Rys. 21.

południowego (rys. 20). Linje te w każdym punkcie są styczne do kierunku natężenia pola; strzałki wskazują, w którą stronę jest zwrócone to natężenie.

Dla uzmysłowienia sobie indukcji magnetycznej, posługujemy się również linjami, stycznemi w każdym punkcie do kierunku indukcji magnetycznej; linje te jednak mają pewną cechę, zasadniczo różną od linji natężenia pola. Linje indukcji magnetycznej są zawsze linjami **zamkniętemi**. Na rys. 19 widzimy, że B wewnątrz żelaza jest skierowane od S do N, więc w magnesie np. linje indukcji będą miały postać wskazaną na rys. 21. Wszystkie linje tworzą obwody zamknięte, w których kierunek obwodu jest niezmienny, linja środkowa idzie z nieskończoności do nieskończoności.

Zarys linji indukcji zewnątrz magnesu wskazują opiłki żelazne rozsypane wokoło magnesu na papierze; o linjach indukcji magnetycznej wewnątrz magnesów można powziąć pewne wyobrażenie, zastanawiając się nad układem magnesów cząsteczkowych, jak to widzimy na rys. 22.

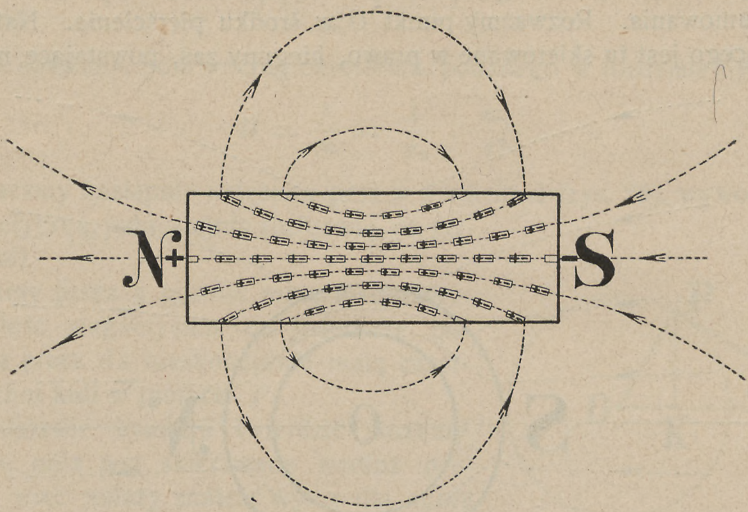
Przy przejściu z żelaza do powietrza linje indukcji załamują się, o ile przechodzą przez powierzchnię, oddzielającą żelazo od powietrza, pod kątem różnym od prostego. Nazewnątrz żelaza w pobliżu jego powierzchni linje indukcji są zwykle prawie prostopadłe do tej powierzchni [1]).

Na rys. 23 wskazany jest przebieg linij indukcji w polu magnetycznym początkowo jednostajnym, w którym został umieszczony kawałek żelaza. W polu

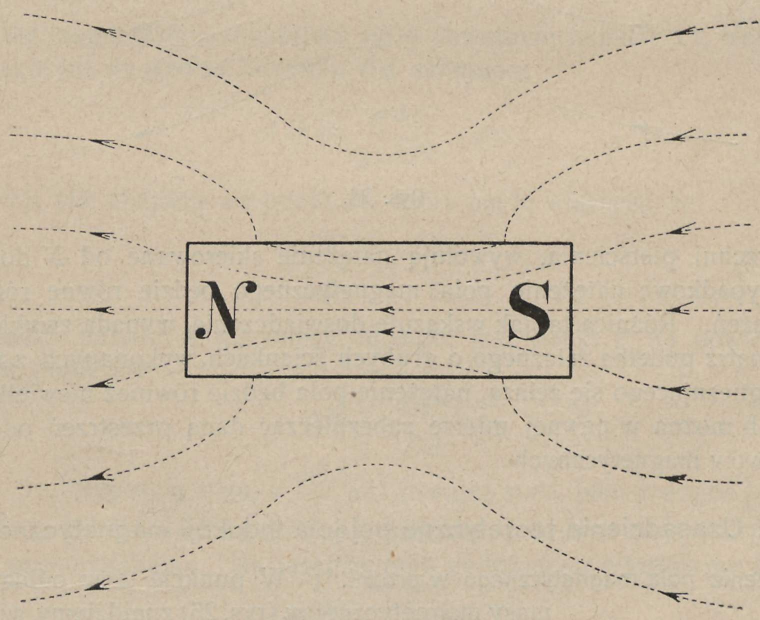
---

[1]) Dowód ścisły czytelnik znajdzie w paragrafie następnym.

jednostajnym kierunek i wielkość natężenia pola jest wszędzie jednakowa. Pod wpływem tego pola żelazo magnesuje się, powstają na nim bieguny, wskutek tego



Rys. 22.

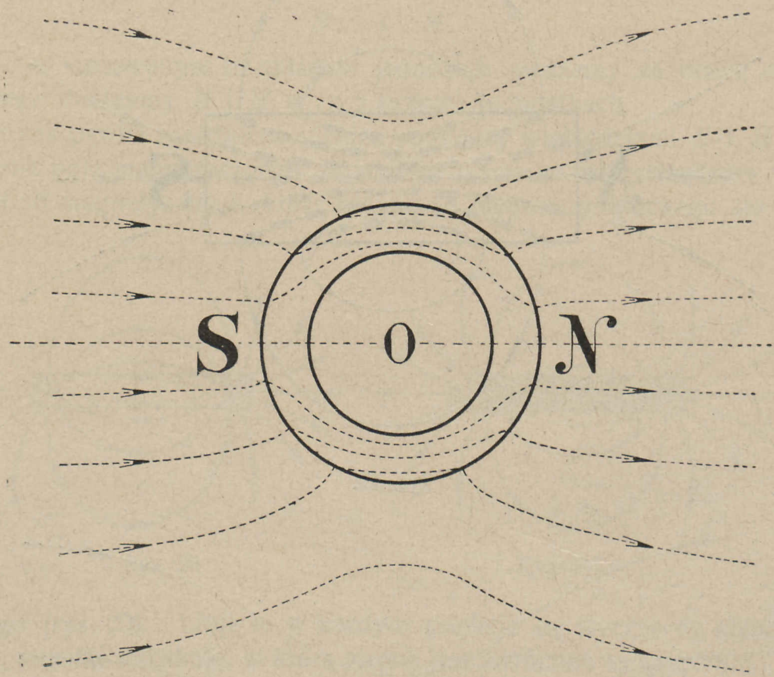


Rys. 23.

pole przestaje być jednostajnym i linje indukcji mają przebieg, wskazany na rysunku; linje te, jak widzimy, skupiają się w żelazie.

Ważne znaczenie praktyczne ma też wypadek układu linji indukcji, które otrzymujemy przy umieszczeniu w polu magnetycznym, początkowo jednostajnym,

pierścienia żelaznego. Układ linji indukcji w takich warunkach wskazany jest na rys. 24. Linje przechodzą tu przeważnie po pierścieniu, omijając jego wnętrze. Wewnątrz pierścienia pole magnetyczne jest bardzo słabe. Wynika to z następującego rozumowania. Rozważmy punkt O w środku pierścienia. Natężenie pola magnesującego jest tu skierowane w prawo, bieguny zaś, powstające na zewnętrz-



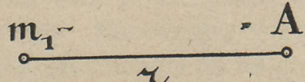
Rys. 24.

nej powierzchni pierścienia, wywołują natężenie skierowane od N do S, a więc w lewo, wypadkowe natężenie pola magnetycznego będzie równe różnicy tych dwóch natężeń. Różnica ta, jak wskazuje doświadczenie, wypada zwykle mała.

Wewnątrz pudełka żelaznego o grubych ściankach, wykonanych z miękkiego, dobrze magnesującego się żelaza, natężenie pola będzie również niewielkie. W ten więc sposób można w pewnej mierze zabezpieczać daną przestrzeń od zewnętrznych wpływów magnetycznych.

2. Uzasadnienie teoretyczne pojęcia indukcji magnetycznej.

Natężenie pola magnetycznego w próżni. [1]) W punkcie A w odległości r od masy magnetycznej m (rys. 25) znajdziemy wielkość natężenia pola, posiłkując się wzorem Coulomb'a.



Rys. 25.

Gdy umieścimy próbną masę m w punkcie A, to według wzoru Coulomb'a, oznaczając przenikliwość ma-

[1]) Praktycznie tę samą przenikliwość magnetyczną, którą posiada próżnia, mają powietrze i inne ciała magnesujące się słabo. Próżnia jest to przestrzeń pozbawiona zwykłej materji ważkiej.

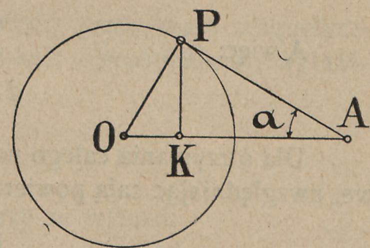
gnetyczną próżni przez — μ_0, siłę działania masy m_1 na m wyrażamy wzorem:

$$f = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{m_1 \cdot m}{r^2} .$$

A więc natężenie pola według określenia, podanego w rozdziale 1-ym, będzie:

$$H = \frac{f}{m} = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{m_1}{r^2} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (a)$$

Wyznaczmy następnie natężenie pola w punkcie A (rys. 26), wywołane przez masę magnetyczną, jednostajnie rozłożoną na powierzchni kuli.



Rys. 26.

Oznaczmy przez g gęstość masy magnetycznej t. j. ilość magnetyzmu na jednostkę powierzchni, a przez ds nieskończenie małą cząstkę powierzchni kuli w punkcie P.

Na podstawie symetrji twierdzić możemy, że natężenie pola jest skierowane wzdłuż prostej OA, a więc należy znaleźć wyraz dla sumy odpowiednich rzutów natężeń, pochodzących od wszystkich poszczególnych cząstek magnetyzmu kuli.

Cząstka magnetyzmu, znajdująca się w dowolnym punkcie P, według wzoru poprzedniego (a) da wzdłuż kierunku OA składową:

$$dH = \frac{g\,ds}{\mu_0 \overline{AP}^2} \cdot \cos\alpha \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (b)$$

Na linji OA znajduje się punkt K, który ma tę własność, że:

$$\frac{\overline{OK}}{\overline{OP}} = \frac{\overline{OP}}{\overline{OA}} .$$

Położenie punktu K nie zależy od tego, jaki punkt P na powierzchni kuli rozważamy, ponieważ:

$$\overline{OK} = \frac{\overline{OP}^2}{\overline{OA}} ,$$

gdzie $\overline{OA}$ jest długością stałą, a $\overline{OP}$ jest również stałe, jako promień kuli.

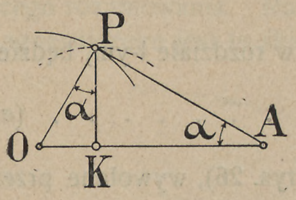
Trójkąty OPK i AOP są do siebie podobne, ponieważ mają jeden kąt wspólny i boki proporcyonalne. Na zasadzie tego podobieństwa będziemy mieli:

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PK}} = \frac{\overline{OA}}{\overline{OP}} .$$

Określając z tego równania odcinek $\overline{AP}$ i wprowadzając jego wyraz do równania (b), otrzymamy:

$$dH = g\,\frac{ds \cdot \cos\alpha}{\mu_0 \cdot \overline{PK}^2} \cdot \frac{\overline{OP}^2}{\overline{OA}^2} .$$

Iloczyn $ds \, . \, \cos\alpha$ jest rzutem cząstki powierzchni ds na powierzchnię prostopadłą do $\overline{PK}$, ponieważ $< OPK = < PAO = \alpha$ (rys. 27). Cząstkę zaś powierzchni prostopadłą do $\overline{PK}$, jako cząstkę powierzchni kuli, której środek jest w punkcie K, możemy wyrazić wzorem:



Rys 27.

$$d\omega \, . \, \overline{PK}^2 .$$

$d\omega$ wyraża tu kąt bryłowy, odpowiadający rozważanej cząstce powierzchni kuli.

Na podstawie tego rozumowania otrzymujemy:

$$ds \, . \, \cos\alpha = d\omega \, . \, \overline{PK}^2 .$$

A więc:

$$dH = g \, . \, \frac{\overline{OP}^2}{\mu_0 \, \overline{OA}^2} \, . \, d\omega .$$

Dla otrzymania całego natężenia dodajemy poszczególne natężenia cząstkowe, uwzględniając całą powierzchnię kuli,

$$H = g \, . \, \frac{\overline{OP}^2}{\mu_0 \, . \, \overline{OA}^2} \, . \int d\omega .$$

Suma cząstek kąta bryłowego $d\omega$ dla całej powierzchni kuli, na której rozłożona jest masa magnetyczna, wynosi oczywiście 4π, [1]), a więc:

$$H = \frac{g \, . \, 4\pi \, \overline{OP}^2}{\mu_0 \, . \, \overline{OA}^2} .$$

$4\pi \, \overline{OP}^2$ wyraża powierzchnię kuli, na której jest rozłożona jednostajnie masa magnetyczna, przeto, gdy oznaczymy całą masę przez m, otrzymamy:

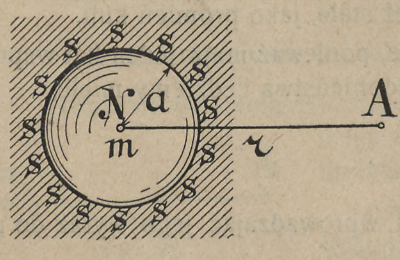
$$m = g \, . \, 4\pi \, \overline{OP}^2 .$$

A więc:

$$H = \frac{1}{\mu_0} \, . \, \frac{m}{\overline{OA}^2} .$$

Z tego wzoru widzimy, że natężenie pola w punkcie A jest takie, jak gdyby cała masa była skupiona w środku kuli — O.

Natężenie pola magnetycznego w ośrodku magnesującym się. Gdy mamy masę magnetyczną m (rys. 28), umieszczoną w ośrodku magnesującym się, to w punkcie A na odległości r masa ta nie wywoła takiego samego natężenia pola, jak poprzednio.



Rys. 28.

Możemy sobie przedstawić wokoło masy m przestrzeń, w kształcie kuli, o dowolnie małym promieniu a, wydrążoną w magnesującym się ośrodku. Jeżeli założymy, że

[1]) Wypływa to stąd, że powierzchnia kuli o promieniu r jest $4\pi r^2$, więc kąt bryłowy, odpowiadający całej powierzchni kuli wypadnie $\frac{4\pi r^2}{r^2} = 4\pi$.

masa m jest północna, to na wewnętrznej powierzchni kulistego wydrążenia wytworzy się przez wpływ warstwa masy magnetycznej południowej.

Przy wyznaczeniu masy magnetycznej w magnesującym się ośrodku, należy uwzględnić wpływ nietylko masy m, ale i magnetyzmu na wewnętrznej powierzchni kulistego wydrążenia.

Na podstawie poprzednio wyprowadzonych wzorów wypada, że w próżni natężenie pola magnetycznego w odległości a od masy magnetycznej m wyrażamy wzorem:

$$\frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{m}{a^2},$$

a natężenie pola, wywołanego w tym samym miejscu przez masę magnetyczną m' [1]), znajdującą się na wewnętrznej powierzchni kuli o promieniu a, wyrażamy wzorem:

$$-\frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{m'}{a^2}.$$

Całkowite natężenie pola w odległości a od masy m wynosi:

$$H' = \frac{1}{\mu_0\, a^2} \cdot (m - m').$$

To natężenie wywołuje stan magnetyczny w ośrodku, a więc i masę m'.

Oznaczmy ilość masy magnetycznej, przypadającą na jednostkę powierzchni wydrążenia kulistego, przez g. Zależność tej gęstości od natężenia pola magnesującego H' wyrażamy przy pomocy spółczynnika ν, który nazywamy **spółczynnikiem magnetycznym** magnesującego się ośrodka.

Zazwyczaj dla wyrażenia gęstości g stosujemy wzór, w którym, niezależnie od spółczynnika ν, wprowadzamy spółczynnik μ_0, określający własności magnetyczne próżni:

$$g = \nu \cdot \mu_0 H',$$

a stąd, uwzględniając poprzednie równanie:

$$g = \frac{\nu}{a^2} \cdot (m - m');$$

ponieważ jednak:

$$4\pi a^2 g = m',$$

przeto:

$$g = \frac{m'}{4\pi a^2}.$$

Zestawiając w jedno równanie dwa wyrazy tej samej wielkości, otrzymamy:

$$\frac{m'}{4\pi a^2} = \frac{\nu}{a^2} \cdot (m - m'),$$

a wyznaczając z tego równania m', otrzymamy:

$$m' = \frac{4\pi\nu}{1 + 4\pi\nu} \cdot m.$$

---

[1]) m jest masa północna, a m' południowa.

Natężenie pola, wywołane w rozważanych warunkach przez masę m w punkcie A (rys. 28), znajdującym się np. w żelazie w odległości r od masy m, składa się z dwuch czynników: natężenia, wywołanego przez masę m w próżni, i natężenia, wywołanego w tym samym punkcie przez masę m', wzbudzoną w magnesującym się ośrodku. Przy wyrażaniu tych dwóch natężeń uwzględniamy przenikliwość magnetyczną próżni — μ_0. Na podstawie takiego rozumowania otrzymamy:

$$H = \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{m}{r^2} - \frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{m'}{r^2} = \frac{m}{\mu_0 r^2}\left(1 - \frac{4\pi\nu}{1+4\pi\nu}\right),$$

albo:

$$H = \frac{m}{\mu_0 r^2} \cdot \frac{1}{1+4\pi\nu} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (c)$$

Możemy jednak rozumować jeszcze inaczej. W punkcie A umieścimy masę magnetyczną m_1 i oznaczymy przenikliwość magnesującego się ośrodka przez μ, wtedy siła działania masy m na masę m_1 według wzoru Coulomb'a będzie:

$$f = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{m \cdot m_1}{r^2},$$

a natężenie pola według określenia, podanego w rozdziale I, będzie:

$$H = \frac{f}{m_1} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{m}{r^2} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (d)$$

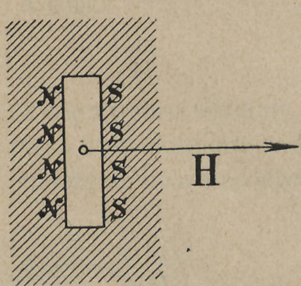
Porównywając wzory (c) i (d), widzimy, że:

$$\mu = \mu_0 (1 + 4\pi\nu) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (e)$$

W układzie jednostek bezwzględnych elektromagnetycznych $\mu_0 = 1$, więc:

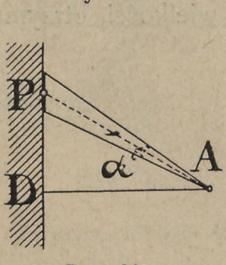
$$\mu = 1 + 4\pi\nu.$$

Indukcja magnetyczna. Magnesujucy się ośrodek znajduje się pod wpływem natężenia pola magnesującego H. Przedstawmy sobie wewnątrz tego ośrodka (rys. 29) szczelinę nieskończenie wązką, prostopadłą do kierunku natężenia pola magnesującego. Całkowite natężenie pola wewnątrz takiej szczeliny składa się z dwuch części: z natężenia pola magnesującego i natężenia pola powstającego od mas magnetycznych północnych i południowych, pokrywających ścianki szczeliny.



Rys. 29.

Przedstawmy sobie nieograniczoną płaszczyznę (rys. 30), pokrytą jednostajnie magnetyzmem o gęstości g. Określmy natężenie pola w punkcie A w pobliżu tej płaszczyzny.



Rys. 30.

Z symetrji układu wypływa, że natężenie wypadkowe będzie skierowane wzdłuż linji AD prostopadłej do płaszczyzny.

Dla określenia więc natężenia całkowitego należy wyznaczyć sumę rzutów natężeń, wywołanych przez wszystkie cząstki masy magnetycznej na płaszczyźnie.

Masa magnetyczna $ds \, . \, g$, znajdująca się w punkcie P, wywoła natężenie pola w punkcie A, które wyrażamy wzorem:

$$\frac{ds \, . \, g}{\mu_0 \overline{AP}^2},$$

a rzut na kierunek AD:

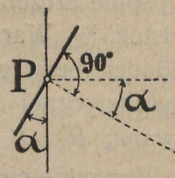
$$dH = \frac{ds \, . \, g}{\mu_0 \overline{AP}^2} \, . \cos\alpha.$$

Z rys. 31 widzimy, że $ds \, . \cos\alpha$ jest rzutem cząstki płaszczyzny ds na powierzchnię prostopadłą do AP, więc, oznaczając przez $d\omega$ kąt bryłowy mający wierzchołek w A i odpowiadający cząstce powierzchni ds, możemy napisać:

$$ds \, . \cos\alpha = d\omega \, . \, \overline{AP}^2.$$

Podstawiając tę wartość we wzór powyższy, otrzymamy:

$$dH = \frac{1}{\mu_0} g \, . \, d\omega.$$



Rys. 31.

Biorąc sumę natężeń cząstkowych dla całej nieograniczonej płaszczyzny, będziemy mieli:

$$H = \frac{1}{\mu_0} 2\pi \, g. \, ^{1})$$

Ten sam wzór otrzymamy oczywiście i wtedy, gdy płaszczyzna będzie wprawdzie ograniczona, lecz odległość AD będzie nieskończenie mała.

Wracając do rys. 29, widzimy, że mamy tam dwie płaszczyzny, pokryte masami magnetycznemi. Natężenia pola, wzbudzone przez obie warstwy magnetyzmu, są wewnątrz szczeliny zwrócone w prawo, ponieważ jedna z nich jest północna, a druga południowa.

Natężenie pola, wywołane przez obie warstwy, wyniesie:

$$\frac{1}{\mu_0} \, . \, 4\pi g.$$

Całkowite natężenie pola wewnątrz szczeliny — H_1 znajdziemy, dodając natężenie powyższe do natężenia magnesującego, a więc:

$$H_1 = H + \frac{1}{\mu_0} \, . \, 4\pi g.$$

Indukcją magnetyczną — B w danym ośrodku nazywamy iloczyn $\mu_0 \, . \, H_1$, więc:

$$B = \mu_0 H_1.$$

Uwzględniając poprzednie równanie, otrzymamy:

$$B = \mu_0 H + 4\pi g.$$

Według określenia wartości spółczynnika magnetycznego ciał — ν, otrzymujemy:

[1]) Kąt bryłowy całkowity odpowiada w tym wypadku półkuli, a więc $= 2\pi$.

$$g = \nu \mu_0 H.$$ [1]

Podstawiając wartość g w równanie powyższe, otrzymamy:

$$B = \mu_0 H (1 + 4 \pi \nu).$$

Z poprzednich wywodów [wzór (e)] wiemy, że:

$$\mu_0 (1 + 4 \pi \nu) = \mu,$$

więc:

$$B = \mu . H.$$

Spółczynnik μ wyraża własności magnetyczne ośrodka, w którym wyobrażażamy sobie szczelinę. Wzór ten pozostaje bez zmiany dla wszystkich układów jednostek. [2]) Wartość jednak spółczynnika μ w rozmaitych układach jest różna. W układzie bezwzględnym elektromagnetycznym μ wyraża stosunek przenikliwości magnetycznej danego ośrodka do przenikliwości powietrza — jest więc liczbą oderwaną; H i B mierzymy przeto w tych samych jednostkach.

Wszystkie ciała w przyrodzie dadzą się pod względem własności magnetycznych podzielić na trzy zasadnicze grupy: ciała **magnetycznie obojętne**, **diamagnetyczne** i **paramagnetyczne**.

Dla ciał magnetycznie obojętnych $\nu = 0$, a więc $\mu = \mu_0$ i $B = \mu_0 H$.

Dla ciał diamagnetycznych $\nu < 0$, $\mu < \mu_0$, a $B < \mu_0 H$.

Dla ciał paramagnetycznych $\nu > 0$, $\mu > \mu_0$ i $B > \mu_0 H$.

Są to wzory ogólne, inne równania i nierówności otrzymamy, stosując bezwzględny układ elektromagnetyczny jednostek; w tym układzie przyjmujemy, że przenikliwość magnetyczna próżni (powietrza) $\mu_0 = 1$ i wtedy będzie np. dla ciał paramagnetycznych $\nu > 0$, $\mu > 1$, a $B > H$.

Najważniejsze ciała diamagnetyczne są bismut i antymon, a paramagnetyczne żelazo, kobalt, nikiel, sole tych metali, palad, platyna, glin i wreszcie stop miedzi, manganu i glinu [3]), wynaleziony w roku 1901 przez Heusler'a. Niektórzy wyróżniają jeszcze ciała **ferromagnetyczne**, do których zaliczają żelazo, kobalt, nikiel i stop Heusler'a. Ciała te mają znacznie większą przenikliwość magnetyczną niż wszystkie inne ciała paramagnetyczne.

3. Własności magnetyczne żelaza. Jako materjał dobrze magnesujący się, tylko żelazo we wszystkich odmianach ma zastosowanie w elektrotechnice.

Inne materjały, stosowane w elektrotechnice, są praktycznie niemagnesujące się, np. miedź, mosiądz, materjały izolacyjne i t. p. Umieszczone w polu magnetycznym, magnesują się one nadzwyczaj słabo, podobnie jak powietrze; magnetyzm ich nie ma praktycznego znaczenia, przeto na podstawie powyższych rozważań otrzymamy dla tych ciał:

$$\mu = 1 \text{ i } B = H.$$ [4])

---

[1]) Tutaj niema dodatkowego natężenia magnesującego, bo nazewnątrz szczeliny działania mas magnetycznych znoszą się nawzajem.

[2]) Patrz Rozdział XXVII.

[3]) Aluminium.

[4]) Patrz paragraf 1 Rozdziału VI, tu H' i $H'' = 0$.

Wszędzie więc, gdzie mamy do czynienia z ciałami tego rodzaju, przyjmujemy przy obliczeniach przenikliwość magnetyczną tych ciał równą jednostce.

Żelazo natomiast magnesuje się silnie i B jest zawsze większe od H, a więc $\mu > 1$.

Wzór określający własności magnetyczne żelaza jest następujący:

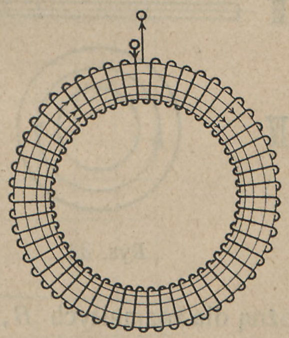
$$B = \mu \,.\, H.$$

B oznacza tu indukcję magnetyczną w żelazie, które zostało poddane wpływowi pola magnesującego o natężeniu H, wywołanego czynnikami zewnętrznemi, np. prądem elektrycznym, przebiegającym po drutach, któremi owinięto żelazo; μ — przenikliwość magnetyczna żelaza. Wzór ten nie przedstawia jednak własności żelaza wyczerpująco. Według określenia przenikliwości magnetycznej, podanego w paragrafie pierwszym tego rozdziału, wzór ten z całą ścisłością może być stosowany tylko w tym wypadku, gdy kawałek żelaza nie ma biegunów rozmagnesowujących, które wywołują natężenie pola, skierowane w stronę przeciwną względem pola magnesującego, jak wyjaśniono w paragrafie pierwszym tego rozdziału. Bieguny rozmagnesowujące powstają na końcach kawałka żelaza, gdzie wchodzą i wychodzą linje indukcji. Gdyby kształt kawałka żelaza i układ linji indukcji były takie, że linje indukcji nigdzie nie wychodziłyby z żelaza, to wzór powyższy w tym wypadku mógłby być stosowany z całą ścisłością. Można to praktycznie urzeczywistnić przez nadanie kawałkowi żelaza kształtu pierścienia, który magnesuje się prądem, przepływającym po drucie, nawiniętym na pierścieniu, jak to wskazuje rys. 32. Linje sił magnetycznych mają wtedy postać kół spółśrodkowych, przebiegających całkowicie w żelazie, i oczywiście żadnych biegunów żelazo posiadać nie będzie; [1]) dla indukcji zaś magnetycznej można zastosować wzór: [2])

$$B = H + H'',$$

w tym więc wypadku:

$$\frac{B}{H} = \mu.$$



Rys. 32.

Należy też zaznaczyć, że doświadczenie wykazuje pewną zależność μ od B, czyli innemi słowy: spółczynnik μ nie jest wielkością stałą.

Wreszcie, przy danym B, wielkość μ nie zawsze jest jedną i tą samą; zależy to jeszcze od poprzednich stanów magnetycznych żelaza. Skład chemiczny i temperatura oczywiście także mają pewien wpływ na spółczynnik μ.

Warunki obróbki hutniczej i mechanicznej żelaza wpływają bezwątpienia także na przenikliwość magnetyczną; trudno jest jednak ująć te wpływy krótko i ściśle. To też wszędzie, gdzie chodzi o wartości ścisłe, należy przeprowadzać próby szczegółowe z każdym gatunkiem żelaza, a nawet w wypadkach wyjątko-

---

[1]) Ściśle mówiąc, linje magnetyczne nie wybiegają nazewnątrz pierścienia tylko wtedy, gdy zwoje zupełnie szczelnie owijają cały pierścień wokoło.

[2]) Patrz paragraf pierwszy tego rozdziału.

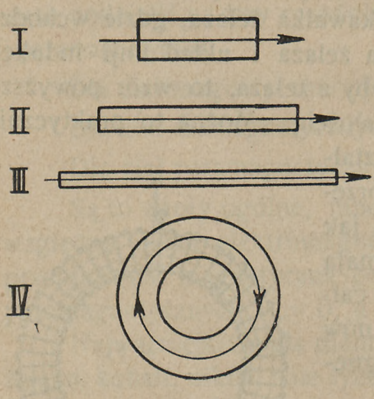
wych z poszczególnemi kawałkami żelaza, celem dokładniejszego zbadania omawianych tu własności. Większe fabryki elektrotechniczne systematycznie poddają próbom kawałki żelaza z poszczególnych dostaw, stosując w tym celu przyrządy, o których będzie mowa dalej przy pomiarach magnetycznych.

W dalszym ciągu rozważymy szczegółowo szereg najważniejszych czynników, wpływających na własności magnetyczne żelaza. Czynniki te są następujące: 1) kształt kawałka żelaza, 2) wielkość indukcji B, 3) poprzednie stany magnetyczne, 4) skład chemiczny, 5) temperatura, 6) czas działania pola magnesującego.

Wpływ kształtu kawałka żelaza. Z określenia wielkości B za pomocą wzoru: [1])

$$B = H - H' + H''$$

wynika, że na B mają wpływ bieguny, powstające na końcach kawałka żelaza. Z tego powodu, im kawałek żelaza będzie krótszy i grubszy, tym większy wpływ będą miały bieguny na stan magnetyczny wewnątrz kawałka żelaza. Jak widać ze wzoru, działanie biegunów H' jest rozmagnesowujące, im więc stosunek grubości do długości kawałka żelaza będzie większy, tym mniejszą indukcję magnetyczną B otrzymamy wewnątrz żelaza.



Rys. 33.

Magnesując kawałki żelaza rozmaitego kształtu (rys. 33), łatwo przekonać się można, że w I-ym kawałku otrzymamy indukcję najsłabszą, w II-im już nieco większą, a w III-im i w IV-ym — największą.

W dalszym ciągu dla uniknięcia nieporozumień, o ile nie będzie odpowiedniego omówienia, będę miał na myśli zawsze żelazo w kształcie pierścienia.

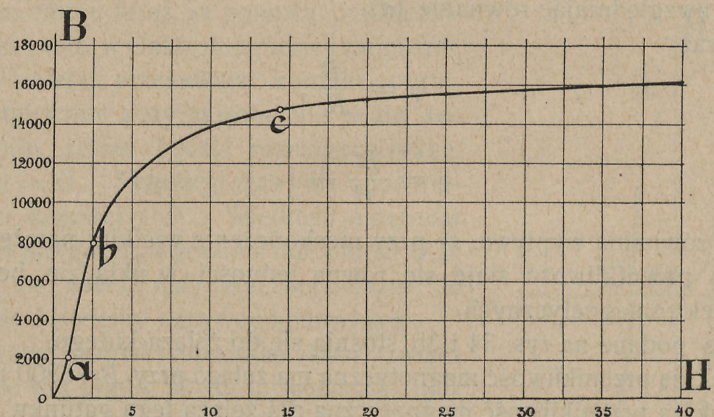
Wpływ indukcji magnetycznej. We wzorze $B = \mu . H$ dla żelaza μ jest wielkością zmienną, różną dla rozmaitych B, jednakże zależność μ od B jest o tyle zawiła, że w praktyce nie są stosowane żadne wzory, które mogłyby mniej lub więcej dokładnie przedstawić zależność μ od B. Natomiast posługujemy się odpowiedniemi tablicami i krzywemi. Dane praktyczne będą przytoczone we właściwym miejscu, obecnie zaś zwracam uwagę na dwie krzywe, przedstawiające zależność B od H i μ od H na rys. 34 i 35.

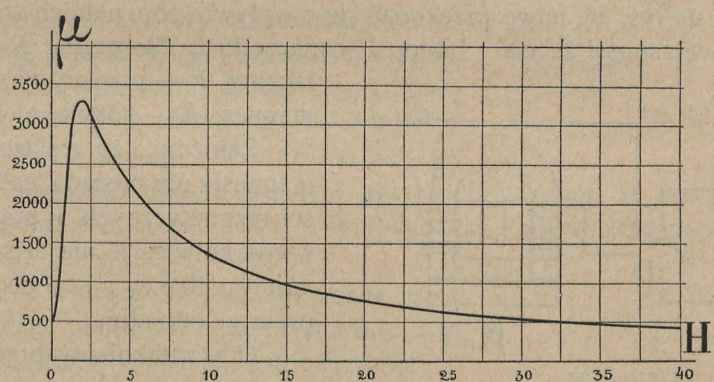
Na wykresie rys. 34 skala dla B jest znacznie większa niż dla H, ponieważ przy względnie niewielkich wartościach natężenia pola otrzymujemy w żelazie znaczną indukcję magnetyczną.

Krzywa $B = f(H)$ [2]) ma kilka części charakterystycznych. Przy małych natężeniach pola magnesującego (odcinek oa) krzywa jest nieco wypukłą ku dołowi, co świadczy, że indukcja B wzrasta więcej, niż proporcjonalnie do przyrostu H.

[1]) Patrz rys. 19.
[2]) Czytaj: B funkcja H.

Przy średnich wielkościach natężenia pola magnesującego odcinek ab krzywej jest prawie prosty, indukcja zmienia się prawie proporcjonalnie do przyrostu natężenia pola magnesującego. Dalej zaś w części bc widzimy wypukłość ku górze, co świadczy, że indukcja magnetyczna wzrasta coraz wolniej, aż wreszcie poza punktem c linja zbliża się do prostej, pochylonej pod małym kątem względem osi H. Wtedy żelazo jest namagnesowane prawie do nasycenia i zachowuje





Rys. 34 i 35.

się względem przyrostu pola magnesującego prawie tak samo, jak ciało magnetycznie obojętne. Linja prosta, do której zbliża się rozważana krzywa za punktem c, może być wyrażona wzorem:

$$B = B' + H, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

gdzie B' oznacza dla tej prostej odcinek rzędnych, odpowiadający $H=0$. B' jest tu oczywiście wielkością stałą, określającą stan magnetyczny żelaza. Stan ten nie zmienia się przy wzroście pola magnesującego.

Odpowiednio do krzywej $B = f(H)$ wykreślono na rys. 35 krzywą $\mu = f(H)$, która wskazuje zależność przenikliwości magnetycznej od natężenia pola magnesującego; μ obliczono ze wzoru $\mu = \frac{B}{H}$. Przy małych natężeniach pola magnesu-

jącego, μ wzrasta szybko. Największa przenikliwość żelaza odpowiada temu punktowi krzywej $B = f(H)$ (rys. 34), gdzie krzywa ta jest styczną do prostej, przeprowadzonej z początku spółrzędnych do punktu na krzywej. Punkt taki znajduje się trochę niżej od punktu b. Dalej ze wzrostem pola magnesującego przenikliwość zmniejsza się z początku prędko, potem powoli. Gdy stan magnetyczny żelaza zbliża się do nasycenia, zmienność μ zbliża się do zmiany według wzoru, który otrzymamy, uwzględniając równanie (a).

Ponieważ:

$$\mu = \frac{B}{H},$$

więc:

$$\mu = \frac{B'}{H} + 1.$$

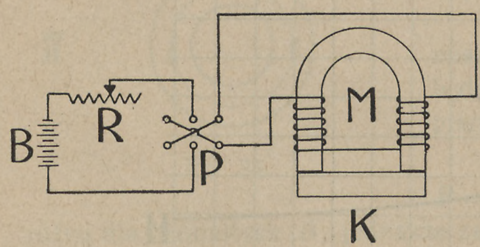
Z tego równania wypływa, że przy nieskończenie wielkim natężeniu pola magnesującego przenikliwość staje się równą jedności w układzie bezwzględnych jednostek elektromagnetycznych.

Krzywe podane na rys. 34 i 35 stosują się do żelaza kutego.

Największą przenikliwość magnetyczną ma żelazo przy B=6800 i H= około 2.

Największa przenikliwość magnetyczna dla żelaza tego gatunku wynosi 3300.

Wpływ poprzednich stanów magnetycznych. Histereza. Za pomocą urządzenia, wskazanego na rys. 36, łatwo przekonać się o wpływie poprzednich stanów magnetycznych na własności żelaza. Litera B oznacza tu źródło prądu, R — opór regulacyjny, P — przełącznik, M — elektromagnes, K — kotwicę elektromagnesu.



Rys. 36.

Załóżmy, że żelazo w elektromagnesie nie posiada całkiem własności magnetycznych i prąd nie płynie, wtedy kotwica K nie będzie przyciągana do podkowy i — o ile nie jest podparta — odpadnie.

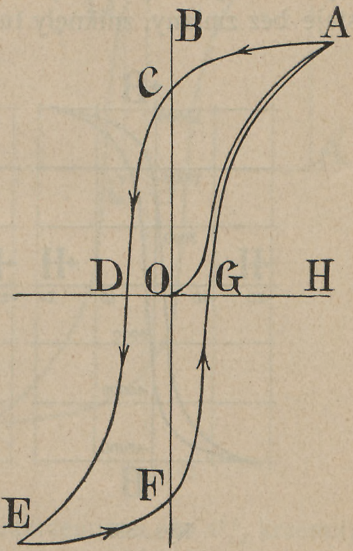
Gdy zamkniemy prąd i będziemy go stopniowo zwiększali, przesuwając kontakt opornika R, to podkowa będzie przyciągała kotwicę coraz silniej w miarę wzrostu prądu. Siła przyciągania takiej kotwicy, jak to zobaczymy dalej, jest proporcjonalna do drugiej potęgi indukcji magnetycznej w żelazie, możemy więc twierdzić, że wraz ze wzrostem prądu powiększa się stopniowo indukcja B. Mierząc prąd i siłę przyciągania, możemy wyrazić zależność B od H za pomocą krzywej OA na rys. 37, odkładając na rzędnych pierwiastki kwadratowe z liczb, wyrażających siły przyciągania, proporcjonalne do B, a na odciętych — prądy, proporcjonalne do H.

Gdy dojdziemy w ten sposób na krzywej do punktu A i za pomocą opornika R zaczniemy zmniejszać prąd stopniowo aż do zera, mierząc siły przyciągania podkowy przy różnych prądach, przekonamy się, że krzywa będzie inna, niezgodna z OA; mianowicie, pójdzie ona wzdłuż AC. Indukcja magnetyczna pozostanie, że tak powiem, w tyle względem natężenia pola magnesującego. Od

greckiego słowa ὑστέρησις — spóźnianie się — pochodzi właśnie „histereza", nazwa omawianego tu zjawiska.

Żelazo posiada zatym własność **histerezy**. Przy sile prądu równej zeru kotwica K już nie odpada, bo w żelazie istnieje magnetyzm tak zwany **szczątkowy**, którego wielkość wyraża się indukcją B, odpowiadającą $H = 0$; miarą jej jest więc odcinek OC.

Jeżeli zmienimy teraz za pomocą przełącznika P kierunek prądu w elektromagnesie i zwiększać go będziemy powoli, przesuwając kontakt opornika R, to ostatecznie przy pewnej sile prądu kotwica odpadnie, żelazo będzie rozmagnesowane, a indukcja $B = O$. Przebieg zjawiska odpowiada tu części krzywej CD. Wielkość natężenia pola magnesującego H, wyrażona odcinkiem OD, jest miarą, t. zw. **koercji** magnetycznej żelaza. To natężenie pola będziemy nazywać koercyjnym.

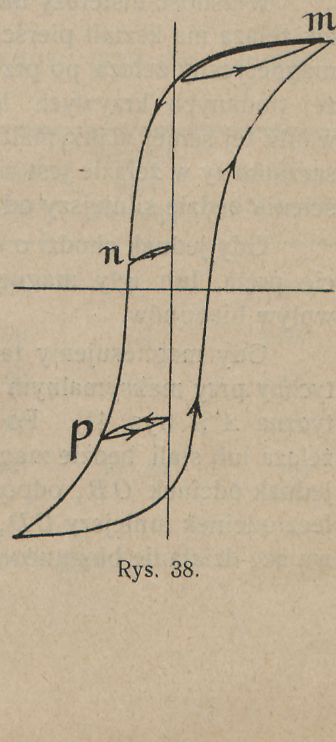


Rys. 37.

Przesuwając kontakt opornika dalej, zwiększymy jeszcze siłę prądu aż do tej wielkości największej, jaką miał w poprzednim kierunku. Kotwica będzie przyciągana równie mocno, jak w tym stanie elektromagnesu, który odpowiada punktowi A krzywej histerezy. Zmieniając następnie prąd z powrotem, otrzymamy dalszy ciąg krzywej $EFGA$. Krzywą linję zamkniętą $ACDEFGA$ nazywamy **pętlicą histerezy**. $\overline{OC} = \overline{OF}$ i $\overline{OD} = \overline{OG}$.

Bardzo charakterystyczną przytym jest ta okoliczność, że powyższa krzywa zachowuje ogólną swą postać nawet w tym wypadku, gdy zmiany w prądzie nie są tak prawidłowe, jak wyżej.

Na rys. 38 widzimy krzywą, otrzymaną przez zmianę cykliczną prądu, taką jak poprzednio, z tą tylko różnicą, że w chwilach, odpowiadających punktom krzywej m, n i p, prąd zmniejszano i znowu zwiększano do poprzedniej wielkości; odpowiedni przebieg zmian indukcji magnetycznej wskazują pętliczki ze strzałkami. Z kierunku tych strzałek widzimy, że dla pętliczki m zmianie wielkości B przy zmniejszaniu prądu odpowiada górna część pętliczki, a przy zwiększaniu siły prądu dolna, dla pętliczek zas n i p — naodwrót.



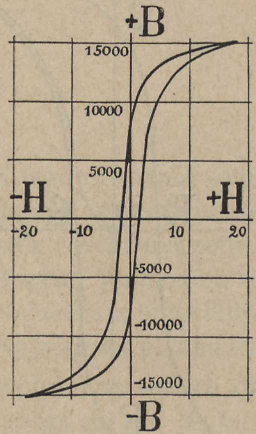
Rys. 38.

Kształt pętlicy histerezy w wysokim stopniu zależy od gatunku żelaza.

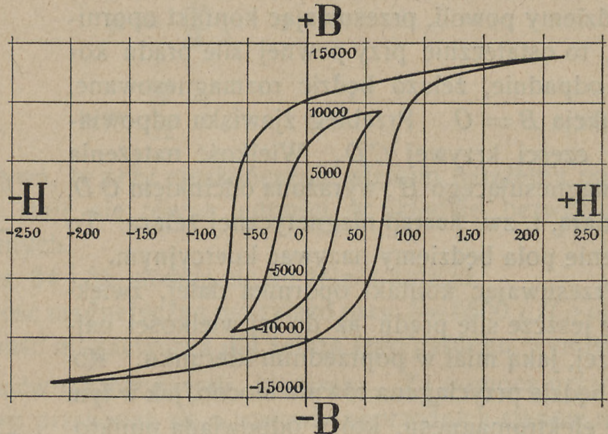
Na rys. 39 wskazana jest pętlica histerezy miękkiego żelaza kutego, a na rys. 40 stali hartowanej. Porównywając te dwa rysunki, widzimy, że po doprowadzeniu stali nawet do mniejszej

indukcji maksymalnej magnetyzm szczątkowy w takiej stali jest większy niż w żelazie. Koercja w stali jest również znacznie większa niż w żelazie. Należy tu jednak mieć na względzie, że do magnesowania stali użyto pole magnetyczne dziesięć razy większe niż do magnesowania żelaza.

Pętlica wewnętrzna pokazana na rys. 40 odpowiada tej samej stali przy mniejszym maksymalnym natężeniu pola magnesującego. Kształt ogólny pętlicy pozostaje bez zmiany, zniknęły tu tylko ostre występy. Porównywając tę małą pętli-



Rys. 39.



Rys. 40.

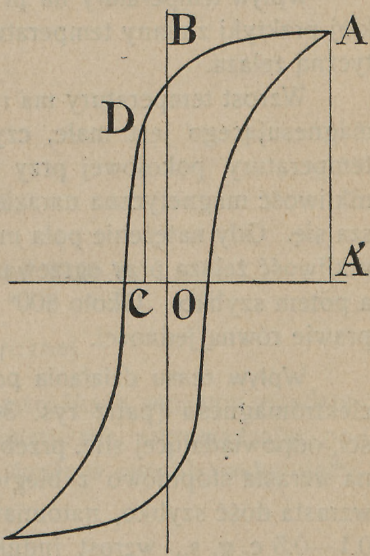
cę z pętlicą histerezy żelaza na rys. 39, łatwo spostrzec, że magnetyzm szczątkowy w żelazie jest tym razem większy niż w stali, jakkolwiek maksymalne natężenie pola magnetycznego, magnesującego stal, jest i tu większe od takiejż wartości pola dla żelaza.

Własność histerezy umożliwia otrzymywanie magnesów stałych. Gdy kawałek żelaza ma kształt pierścienia i bieguny na nim nie powstają (rys. 32), to stan magnetyczny żelaza po przerwaniu prądu określa magnetyzm szczątkowy. Z wyżej podanych krzywych histerezy dla żelaza i stali wynika, że, przy zastosowaniu tej samej maksymalnej wartości natężenia pola magnesującego, magnetyzm szczątkowy w żelazie jest silniejszy. Stały więc magnes żelazny w kształcie pierścienia będzie silniejszy od stalowego.

Gdy jednak chodzi o otrzymanie stałego magnesu z biegunami np. w kształcie pręta, lub igły magnesowej, należy mieć na względzie rozmagnesowujący wpływ biegunów.

Gdy magnesujemy taki kawałek żelaza lub stali prądem, jego stan magnetyczny przy maksymalnym natężeniu pola magnesującego wyraża indukcja magnetyczna $A'A$ (rys. 41). Po przerwaniu prądu magnesującego, rozważany kawałek żelaza lub stali będzie magnesem stałym. Jego stanu magnetycznego nie wyraża jednak odcinek OB, odpowiadający szczątkowemu magnetyzmowi w pierścieniu, lecz odcinek mniejszy CD, ponieważ, po przerwaniu prądu, pozostaje rozmagnesowujące działanie biegunów, wyrażone odcinkiem OC.

Mając to na uwadze, widzimy, że stan magnetyczny takiego stałego magnesu wyłącznie prawie określa koercja, t. j. natężenie pola, znoszące magnetyzm szczątkowy. W stali koercyjne natężenie pola jest znacznie większe, więc na krzywej histerezy stali odcinek *CD* będzie większy, niż na krzywej histerezy żelaza. Dlatego to magnesy stałe z biegunami wyrabiane są ze stali. Im krótszy jest magnes w porównaniu do grubości, tym z twardszej i lepiej zahartowanej stali należy go wykonać.



Rys. 41.

Wpływ składu chemicznego na przenikliwość magnetyczną żelaza. Skład chemiczny żelaza ma znaczny wpływ na wielkość indukcji magnetycznej.

W praktyce technicznej stosujemy zwykle pięć gatunków żelaza. Najlepiej magnesuje się, a więc największą ma przenikliwość żelazo miękkie normalne w postaci cienkiej blachy. Dla przykładu podaję, że przy natężeniu pola magnesującego 25 c. g. s. [1]), indukcja magnetyczna w takim żelazie wynosi 15100 c. g. s.

Znacznie gorzej magnesuje się blacha żelazna, nakrzemiona (do 4°/₀ krzemu), bo przy tymże natężeniu pola magnetycznego indukcja wynosi 13 900 c. g. s.

Odlewy stalowe magnesują się nieco lepiej, przy tym samym bowiem natężeniu pola magnesującego indukcja wynosi w nich 14 600 c. g. s.

Najmniejszą indukcję w tych samych warunkach otrzymujemy w żeliwie, mianowicie: 6 100 c. g. s.

Twarda stal hartowana magnesuje się trochę lepiej niż żeliwo i w warunkach powyższych indukcja wynosi w niej 7 000 c. g. s.

Niektóre inne szczegóły podaję według wyników prac pp. Gumlich'a i Schmidt'a w tablicy:

Gatunek żelaza:	Indukcja maksymalna.	Indukcja szczątkowa.	Natężenie pola koercyjne.	Przenikliwość maksymalna.
Żelazo czyste, bardzo miękkie . . .	18 000	8 000	0,7	6 000
Blacha żelazna do dynamomaszyn . .	18 300	10 000	1,2	4 500
Odlew stalowy	18 200	10 000	2,4	2 800
Żeliwo	10 000	5 000	11	200
Stal twarda	18 000	11 000	15—60	300

[1]) c. g. s. — skrócone oznaczenie jednostek w układzie bezwzględnym.

Wszystkie podane wyżej gatunki żelaza znajdują zastosowanie przy budowie maszyn i przyrządów elektrycznych.

Wpływ temperatury na przenikliwość magnetyczną żelaza. W warunkach zwykłej praktyki zmiany temperatury wpływają bardzo mało na przenikliwość magnetyczną żelaza.

Wzrost temperatury ma rozmaite skutki, zależnie od tego, czy natężenie pola magnesującego jest małe, czy też duże. Gdy ogrzewamy żelazo, poczynając od temperatury pokojowej przy słabym polu magnesującym, np. 25 c. g. s., przenikliwość magnetyczna narazie wzrasta, osiąga maximum i dalej szybko zmniejsza się. Gdy natężenie pola magnesującego jest znaczne, np. 1000 c. g. s., przenikliwość żelaza przy ogrzewaniu odrazu zmniejsza się, z początku do 600^0 powoli, a potem szybko. Około 800^0 dla żelaza i 650^0 dla stali przenikliwość staje się prawie równą jedności.

Wpływ czasu działania pola magnetycznego. Gdy puścimy prąd do zwojów elektromagnesu (patrz rys. 36), indukcja magnetyczna nie osiąga zaraz wartości, odpowiadającej sile, przebiegającego w zwojach prądu. Indukcja magnetyczna wzrasta stopniowo z biegiem czasu. Przy dużych natężeniach pola indukcja wzrasta dość szybko, natomiast gdy natężenie pola magnesującego jest małe, np. 0,1—0,5 c. g. s., wzrost indukcji odbywa się nieraz w ciągu kilku minut. Również powoli zmienia się indukcja, gdy zmieniamy natężenie pola magnesującego w nieznacznym stopniu.

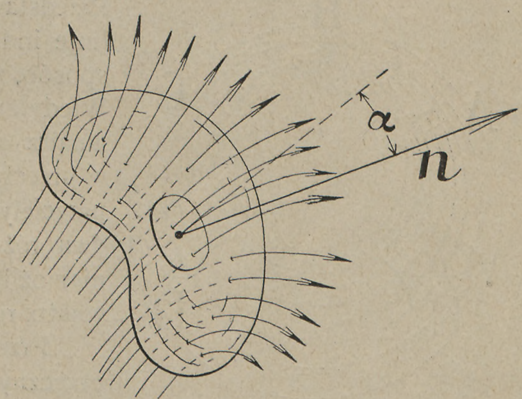
ROZDZIAŁ VII.

Obwód magnetyczny.

1. Strumień indukcji magnetycznej.

Zjawiska magnetyczne, zachodzące w rozmaitych ośrodkach, możemy przedstawić i opisać przez ujęcie w dość proste wzory matematyczne, wprowadzając pojęcie **strumienia indukcji magnetycznej**, które określamy ściśle w sposób następujący:

Przedstawmy sobie, że linje indukcji magnetycznej przenikają pewną powierzchnię (rys. 42), na której wybieramy tak małą cząstkę ds, że w jej obrębie wartość indukcji magnetycznej B możemy uważać za stałą. Wektor n, prostopadły do ds, tworzy z kierunkiem indukcji kąt α, możemy więc napisać:



Rys. 42.

$$dN = B \,.\, ds \,.\, \cos\alpha,$$

gdzie dN nazywamy **strumieniem indukcji magnetycznej**, przechodzącym przez cząstkę powierzchni ds.

Strumień indukcji uzmysławiamy sobie jako wiązkę linji indukcji, przenikających rozważaną powierzchnię. Zamiast strumienia indukcji niekiedy nawet używamy wyrażenia **liczba linji indukcji.**

Wyznaczając z powyższego równania B, otrzymamy:

$$B = \frac{dN}{ds \,.\, \cos\alpha}.$$

Na podstawie tego wzoru określimy indukcję magnetyczną jako **gęstość linji indukcji**, bowiem gdy dN jest liczbą linji indukcji, to B jest liczbą tych linji, przypadającą na jednostkę powierzchni prostopadłej do linji. Są to wyrażenia obrazowe, lecz nie ściśle, należy więc ich unikać.

Powyższe linje nazywamy często krócej linjami magnetycznemi, a stąd i strumień indukcji magnetycznej **strumieniem magnetycznym.**

Prostszą postać przybierają powyższe równania, gdy indukcja B jest jedno-

stajna na całej powierzchni s, prostopadłej do linji indukcji; wtedy $\alpha = 0^0$, $\cos 0^0 = 1$ i strumień indukcji N przez powierzchnię s wyniesie:

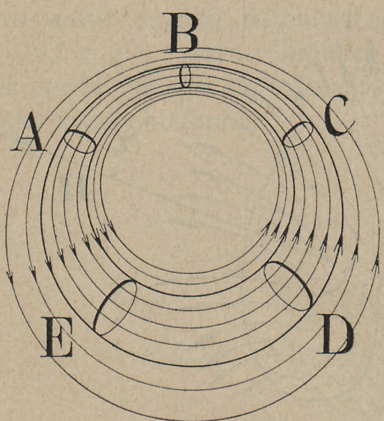
$$N = B \cdot s,$$

a stąd

$$B = \frac{N}{s}.$$

Indukcję magnetyczną B mierzymy zawsze w bezwzględnych jednostkach elektromagnetycznych, a s w centymetrach kwadratowych, zatem i strumień indukcji N otrzymamy z pierwszego równania w bezwzględnych jednostkach elektromagnetycznych. Niektórzy dla bezwzględnych jednostek natężenia pola, a więc i indukcji stosują nazwę **gaus**, a dla jednostki bezwzględnej strumienia indukcji nazwę **makswel**. Więc np., gdy w polu magnetycznym jednostajnym o indukcji magnetycznej 15000 gausów znajduje się płaszczyzna prostopadła do linji indukcji, a pole powierzchni tej płaszczyzny wynosi 200 cm^2, to strumień indukcji przez tę powierzchnię jest 3000000 makswelów.

Strumień indukcji magnetycznej ma tę cechę charakterystyczną, że wielkość jego dookoła jest zawsze niezmienna (rys. 43)[1]). Zgodne to jest z wyobrażeniem o linjach zamkniętych indukcji magnetycznej. Przedstawmy sobie w ośrodku, gdzie przebiegają linje indukcji, (rys. 43) rurkę, utworzoną w ten sposób, że linje te układają się wzdłuż ścianek. Wtedy żadna z linji indukcji, znajdujących się wewnątrz rurki, nie wybiega na zewnątrz, gdyż w przeciwnym razie linje na powierzchni rurki przecięłyby się i w jednym punkcie mielibyśmy dwa różne kierunki indukcji, co oczywiście jest niemożliwe. Wobec tego liczba linji indukcji wewnątrz rurki na całej jej długości jest niezmienna.



Rys. 43.

Przetnijmy rurkę szeregiem powierzchni poprzecznych A, B, C i D. Przez każdy przekrój przechodzi ta sama liczba linji, czyli mówiąc ściślej, ten sam strumień indukcji.

Twierdzenie to da się wyrazić wzorem następującym:

$$\int_A B_1\, ds_1 \cos\alpha_1 = \int_B B_2\, ds_2 \cos\alpha_2 = \int_C B_3\, ds_3 \cos\alpha_3 = \int_D B_4\, ds_4 \cos\alpha_4 .$$

Gdy np. powierzchnie A i B są prostopadłe do linji indukcji magnetycznej w odpowiednich miejscach, możemy napisać:

$$\int_A B_1\, ds_1 = \int_B B_2\, ds_2,$$

a zakładając jeszcze, że na każdej z tych powierzchni indukcja jest jednostajna, otrzymamy:

$$B_1 s_1 = B_2 s_2 .$$

[1]) Patrz uzasadnienie teoretyczne w Rozdziale VII, paragraf 2.

Z tego równania wynika, że:

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{s_2}{s_1}.$$

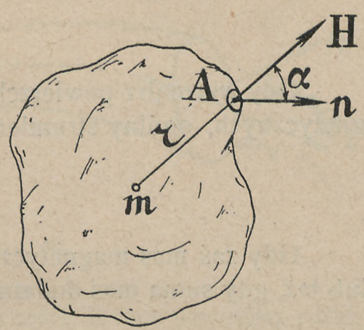
Wzór powyższy wskazuje, że w tym wypadku indukcja jest odwrotnie proporcjonalna do pól przekrojów s_1 i s_2. Gdzie więc rurka jest szersza, tam indukcja mniejsza.

2. Teoretyczne uzasadnienie własności strumienia indukcji magnetycznej.

Strumień sił. Rozważmy pole magnetyczne, wywołane przez masę magnetyczną m (rys. 44). W punkcie A, znajdującym się na odległości r od masy m, natężenie pola H, wywołane przez tę masę w ośrodku o przenikliwości magnetycznej μ, wyrażamy wzorem:

$$H = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{m}{r^2},$$

zgodnie z wywodem, podanym w paragrafie 2 rozdziału VI. Kierunek natężenia wskazuje wektor H, leżący na przedłużeniu linji r. W każdym innym punkcie przestrzeni wzór dla H jest taki sam, kierunki zaś natężeń we wszystkich punktach wokoło masy m biegną wzdłuż promieni, przeprowadzonych z tego punktu, gdzie znajduje się masa m.



Rys. 44.

Załóżmy, że masa m jest otoczona powierzchnią zamkniętą. Wybieramy taką cząstkę powierzchni ds, aby w jej środku znajdował się punkt A; wektor An prostopadły do ds, tworzy z H kąt α. Wielkość dN_s, określoną przez wyraz:

$$dN_s = H ds \cdot \cos\alpha \text{ [1]}$$

nazywamy **strumieniem sił** przez powierzchnię ds.

Suma takich wyrazów, wzięta dla całej powierzchni zamkniętej:

$$N_s = \int H ds \cdot \cos\alpha$$

jest strumieniem sił, wywołanym przez masę m w przestrzeni otaczającej.

Za pomocą prostego rozumowania możemy tę całkę wyrazić przez masę magnetyczną m.

Iloczyn $ds \cdot \cos\alpha$ jest rzutem cząstki powierzchni ds na powierzchnię prostopadłą do H, słowem, jest cząstką tej powierzchni prostopadłej do H, a więc i do r; taką cząstkę powierzchni możemy wyrazić iloczynem $d\omega \cdot r^2$ [2]), oznaczając

[1]) Wektor An jest zawsze zwrócony na zewnątrz powierzchni zamkniętej, a przeto, zależnie od kierunku natężenia pola, α może być $< 90^0$, $= 90^0$, albo $> 90^0$, odpowiednio do tego $dN > 0$, $dN = 0$ i $dN < 0$.

[2]) Jest to wyraz cząstki powierzchni kuli, której środek znajduje się w punkcie m, a promień jest r.

przez $d\omega$ kąt bryłowy, odpowiadający cząstce powierzchni ds. Mamy więc równanie:

$$ds \cdot \cos\alpha = d\omega \cdot r^2.$$

Podstawiając wyrazy dla H i dla $ds \cdot \cos\alpha$ w równaniu strumienia sił, otrzymamy:

$$N_s = \frac{m}{\mu} \cdot \int d\omega.$$

Suma kątów bryłowych cząstkowych, odpowiadających cząstkom powierzchni zamkniętej, równa się kątowi bryłowemu, odpowiadającemu powierzchni kuli, t. j. $= 4\pi$, stąd:

$$N_s = \frac{1}{\mu} \cdot 4\pi\, m.$$

Gdy wewnątrz powierzchni zamkniętej znajdować się będzie kilka mas magnetycznych, ogólny strumień sił wypadnie:

$$N_s = \frac{1}{\mu} \cdot 4\pi\, \Sigma\, m.$$

Gdy zaś mas magnetycznych wewnętrz tej zamkniętej powierzchni nie będzie, lub też, gdy suma mas dodatnich będzie równa sumie mas ujemnych,

$$\Sigma\, m = 0,$$

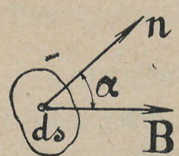
a więc:

$$N_s = 0.$$

Wtedy strumień całkowity, przechodzący przez tę powierzchnię, równa się zeru. Nie zawsze to znaczy, że żaden strumień przez tę powierzchnię nie przechodzi, strumień dodatni — wychodzący może się równać strumieniowi wchodzącemu — ujemnemu, tak, że suma wypada równa zeru.

Strumień indukcji magnetycznej. Analogicznie do strumienia sił, strumieniem indukcji magnetycznej nazywamy wyraz: (rys. 45):

$$dN = B \cdot ds \cdot \cos\alpha.$$



Rys. 45.

W ośrodku jednorodnym, w którym μ jest wszędzie jednakowe, strumień indukcji magnetycznej podlega temu samemu prawu, co i strumień sił, ponieważ:

$$dN = B\,ds \cdot \cos\alpha = \mu \cdot H\,ds \cdot \cos\alpha = \mu \cdot dN_s.$$

Wewnątrz ośrodków jednorodnych [1]) w najmniejszej nawet objętości suma mas magnetycznych jest równa zeru, ponieważ, na zasadzie wyobrażeń o budowie molekularnej ciał magnetycznych, najdrobniejsza cząsteczka

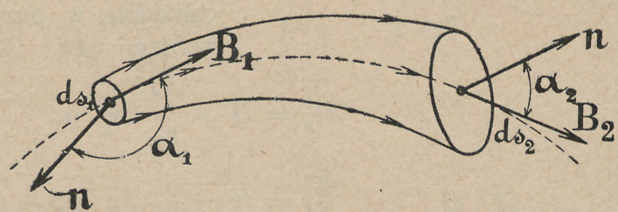
[1]) Mamy tu na myśli takie ośrodki, w których przenikliwość magnetyczna μ jest wszędzie jednakowa i niezależna od wielkości natężenia pola magnesującego.

ciała jest magnesem o dwuch biegunach, a więc o dwuch równych masach magnetycznych. [1])

Strumień sił przez dowolną zamkniętą powierzchnię wewnątrz ośrodka jednorodnego w powyższych warunkach równa się zeru, ponieważ suma algebraiczna mas magnetycznych wewnątrz tej powierzchni jest zero.

Strumień indukcji, jak widzimy z poprzedniego równania, jest proporcjonalny do strumenia sił, gdyż spółczynnik μ dla całej przestrzeni, według założenia, jest stały. Jeżeli więc strumień sił jest tu równy zeru, to równa się zeru i strumień indukcji magnetycznej.

Zastosujemy to twierdzenie do rurek indukcji. Gdy w polu indukcji magnetycznej przedstawimy sobie rurkę (rys. 46), której ścianki boczne mają taki kształt, że linje indukcji układają się na nich, to rurka nazywa się **rurką** lub **strugą indukcji**. Na podstawie twierdzeń powyższych łatwo wykażemy, że strumień indukcji wewnątrz takiej rurki w ośrodku jednorodnym jest stały.



Rys. 46.

Załóżmy, że rurka jest przecięta w dwuch miejscach płaszczyznami, których części, leżące wewnątrz rurki, oznaczymy przez ds_1 i ds_2.

Cały strumień indukcji, przepływający przez powierzchnię zamkniętą, składającą się z dwuch podstaw i ścianek bocznych rurki, na zasadzie twierdzenia podanego wyżej, równa się zeru.

Strumień, przechodzący przez ściany boczne, równa się zeru, gdyż $\alpha = 90^0$, a więc $\cos\alpha = 0$. Pozostaje zatem suma strumieni przez podstawy ds_1 i ds_2; suma ta musi równać się zeru:

$$B \,.\, ds_1 \,.\, \cos\alpha_1 + B_2 \,.\, ds_2 \,.\, \cos\alpha_2 = 0,$$

albo:

$$B_1 \,.\, ds_1 \,.\, \cos\alpha_1 = -B_2 \,.\, ds_2 \,.\, \cos\alpha_2 .$$

Równanie to wskazuje, że strumień, wchodzący przez podstawę ds_1, równa się strumieniowi, wychodzącemu przez podstawę ds_2.

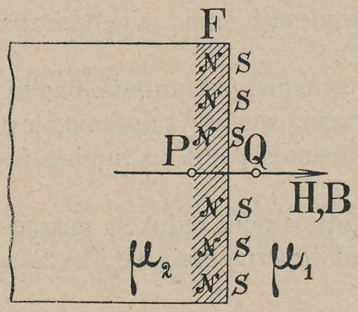
Mamy więc tu do czynienia ze strumieniem ciągłym, którego wartość wzdłuż każdej strugi jest stałą.

Powyższe dowodzenie stosuje się oczywiście tylko do strug indukcji, przebiegających w ośrodkach jednorodnych.

Przejście strumienia indukcji z jednego ośrodka do drugiego. Załóżmy, że powierzchnia F rozdziela dwa ośrodki o różnych przenikliwościach magnetycznych— μ_1 i μ_2 (rys. 47) Punkt P leży w ośrodku o przenikliwości magnetycznej μ_2, a Q w drugim ośrodku o przenikliwości magnetycznej μ_1, oba nieskończenie

[1]) Na podstawie doświadczenia w teorji magnetyzmu przyjmujemy, że masy magnetyczne na dwuch biegunach magnesu są sobie liczbowo równe.

blizko powierzchni F. Oznaczmy natężenie pola magnesującego przez H i załóżmy, że jest ono skierowane wprawo, prostopadle do powierzchni F. Magnesy molekularne w rozważanych ośrodkach będą miały różne masy magnetyczne. W tym ośrodku, którego przenikliwość μ jest większa, a więc i ν większe, masy magnetyczne będą większe; przeto na powierzchni F z dwuch stron powstaną dwie warstwy magnetyzmu różnoimienne, jedna południowa, druga północna o różnej gęstości.



Rys. 47.

Załóżmy, że gęstość jednej warstwy w ośrodku o przenikliwości μ_1 jest g_1, a w ośrodku o przenikliwości μ_2 jest g_2, wtedy natężenie pola całkowite w punktach P i Q wyrazić możemy wzorami: [1])

$$H_Q = H + \frac{1}{\mu_0} 2\pi \,.\, g_2 \quad \frac{1}{\mu_0} 2\pi \,.\, g_1,$$

$$H_P = H - \frac{1}{\mu_0} 2\pi \; g_2 + \frac{1}{\mu_0} 2\pi \,.\, g_1.$$

Indukcja magnetyczna w punktach P i Q będzie:

$$B_Q = \mu_0 \,.\, H + 2\pi \,.\, g_2 - 2\pi \,.\, g_1 + 4\pi \,.\, g_1 = \mu_0 \,.\, H + 2\pi \,.\, (g_1 + g_2),$$

$$B_P = \mu_0 \,.\, H - 2\pi \,.\, g_2 + 2\pi \,.\, g_1 + 4\pi \,.\, g_2 = \mu_0 \,.\, H + 2\pi \,.\, (g_1 + g_2).$$

Z tych wzorów widzimy, że natężenie pola zmienia się przy przejściu z jednego ośrodka do drugiego, natomiast indukcja magnetyczna pozostaje w rozważanym wypadku bez zmiany, a więc i ciągłość strumienia magnetycznego zachowuje się przy przejściu z jednego ośrodka do drugiego.

Rozważmy jeszcze wypadek inny (rys. 48), gdy natężenie pola magnesującego H jest skierowane pod kątem γ względem linji, prostopadłej do powierzchni F. W tym razie na powierzchni F powstają również masy magnetyczne o gęstościach g_1 i g_2. Natężenia pól, pochodzące od tych mas, [2]) oznaczone na rysunku przez H' i H'', będą jednak dodawać się do natężenia magnesującego geometrycznie i wypadkowe natężenia pól, wzdłuż których jest skierowana również indukcja magnetyczna, tworzą z prostą prostopadłą do powierzchni F kąty różne α i β (rys. 49).

Wyznaczmy przedewszystkim stosunek tangensów kątów α i β.

---

[1]) Patrz wyprowadzenie wzoru dla indukcji magnetycznej w Rozdziale VI, § 2. Zwrócić również należy uwagę na to, że warstwa magnetyzmu północnego wywołuje w punkcie Q natężenie pola, zwrócone w prawo, a południowego w lewo, w punkcie zaś P na odwrót, magnetyzm północny wywołuje natężenie pola wlewo, a południowy wprawo.

[2]) Na rysunku przyjmujemy, że $g_2 > g_1$, więc wpływ warstwy magnetycznej północnej przeważa, wskutek czego H' jest zwrócone w prawo, a H'' w lewo.

Z układu trójkątów na rys. 48, biorąc rzuty na kierunek prostopadły do F i równoległy do F, widzimy, że:

$$H_1 \cdot \sin\alpha = H \cdot \sin\gamma$$

$$H_1 \cdot \cos\alpha = H \cdot \cos\gamma + H',$$

a więc:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{H \cdot \sin\gamma}{H \cdot \cos\gamma + H'},$$

w podobnyż sposób

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{H \cdot \sin\gamma}{H \cdot \cos\gamma - H''}$$

i

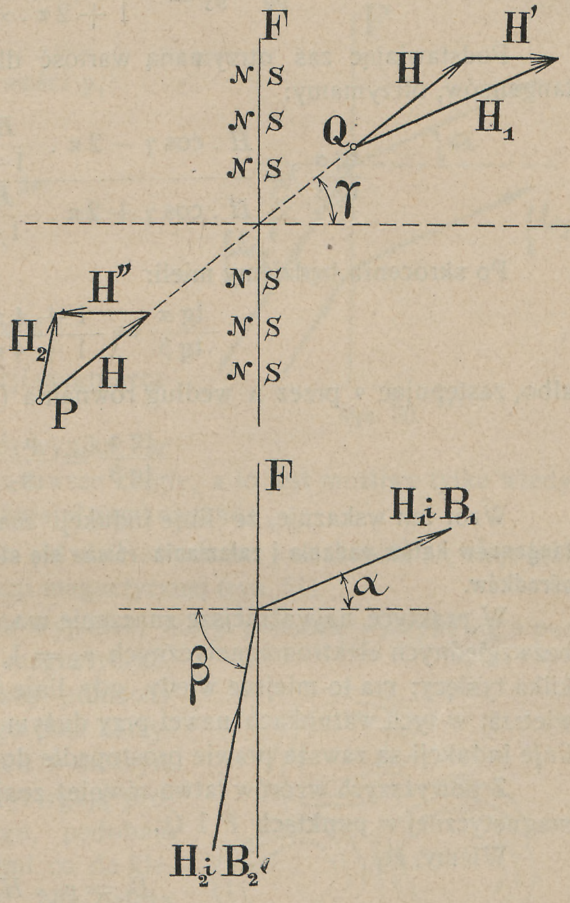
$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{H \cdot \cos\gamma - H''}{H \cdot \cos\gamma + H'},$$

lecz

$$H' = H'' = \frac{1}{\mu_0} \cdot 2\pi \cdot (g_2 - g_1),$$

więc:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{H \cdot \cos\gamma - \frac{1}{\mu_0} \cdot 2\pi \cdot (g_2 - g_1)}{H \cdot \cos\gamma + \frac{1}{\mu_0} \cdot 2\pi \cdot (g_2 - g_1)}.$$



Rys. 48 i 49.

Gęstości magnetyzmu g_1 i g_2 możemy wyrazić przez natężenia pól w punktach P i Q i zdolność magnetyczną ośrodków ν_1 i ν_2, uwzględniając, że natężenia pól nie są prostopadłe do powierzchni F. [1])

$$g_2 = \mu_0 \cdot \nu_2 \cdot H_2 \cdot \cos\beta$$

$$g_1 = \mu_0 \cdot \nu_1 \cdot H_1 \cdot \cos\alpha$$

$$g_2 - g_1 = \mu_0 \cdot (\nu_2 \cdot H_2 \cdot \cos\beta - \nu_1 \cdot H_1 \cdot \cos\alpha).$$

Lecz z rysunku 48 widzimy, że:

$$H_2 \cdot \cos\beta = H \cdot \cos\gamma - \frac{1}{\mu_0} \cdot 2\pi \cdot (g_2 - g_1)$$

i

$$H_1 \cdot \cos\alpha = H \cdot \cos\gamma + \frac{1}{\mu_0} \cdot 2\pi \cdot (g_2 - g_1).$$

[1]) Gdy powierzchnia nie jest prostopadła do natężenia, to $g = \mu_0 \nu \cdot H \cdot \cos\gamma$ (γ kąt pomiędzy H i prostopadłą do powierzchni); wynika to z układu magnesów molekularnych, np. gdy natężenie magnesujące jest skierowane równolegle do powierzchni, to $g = 0$, wtedy bowiem wszystkie magnesy molekularne będą skierowane swemi osiami równolegle do powierzchni.

Podstawiając te wyrazy w powyższe równanie i wyznaczając $(g_2 - g_1)$, otrzymamy:

$$g_2 - g_1 = \frac{\mu_0 \,.\, H \cos\gamma \,.\, (\nu_2 - \nu_1)}{1 + 2\pi \,.\, \nu_1 + 2\pi \,.\, \nu_2}\,.$$

Podstawiając zaś otrzymaną wartość dla $(g_2 - g_1)$, we wzór dla stosunku tangensów, otrzymamy:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{H \,.\, \cos\gamma - 2\pi \,.\, \dfrac{H \,.\, \cos\gamma \,.\, (\nu_2 - \nu_1)}{1 + 2\pi \,.\, \nu_1 + 2\pi \,.\, \nu_2}}{H \,.\, \cos\gamma + 2\pi \,.\, \dfrac{H \,.\, \cos\gamma \,.\, (\nu_2 - \nu_1)}{1 + 2\pi \,.\, \nu_1 + 2\pi \,.\, \nu_2}}\,.$$

Po skróceniu będziemy mieli:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{1 + 4\pi \,.\, \nu_1}{1 + 4\pi \,.\, \nu_2}\,,$$

albo, zastępując ν przez μ według równania (e) strona 36, otrzymamy:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{\mu_1}{\mu_2}\,.$$

Wzór ten wskazuje, że linje indukcji magnetycznej załamują się i **stosunek tangensów kątów padania i załamania równa się stosunkowi przenikliwości magnetycznych ośrodków.**

W praktyce najważniejsze znaczenie ma wypadek, gdy w układzie jednostek bezwzględnych elektromagnetycznych $\mu_1 = 1$, a μ_2 jest bardzo duże, np. wynosi kilka tysięcy; ma to miejsce wtedy, gdy linje indukcji przechodzą z żelaza do powietrza; w tych warunkach nawet przy dużym kącie β, kąt α jest blizki 0^0, a więc linje indukcji są zawsze prawie prostopadłe do powierzchni żelaza.

Z powyższych wzorów łatwo również znajdziemy stosunek wielkości indukcji magnetycznej w punktach P i Q.

Wiemy, że:

$$B_1 = \mu_1 \,.\, H_1\,,$$

$$B_2 = \mu_2 \,.\, H_2\,,$$

a z trójkątów na rys. 48 wypada, że rzuty H_1 i H_2 na płaszczyznę F są równe, ponieważ rzuty te są równe rzutom wielkości H. Mamy więc:

$$H_1 \sin\alpha = H_2 \sin\beta\,,$$

$$\frac{H_1}{H_2} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\,.$$

Mając to na względzie i przyjmując pod uwagę wzór, wyrażający stosunek μ_1 do μ_2, otrzymamy:

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{\sin\beta \,.\, \operatorname{tg}\alpha}{\sin\alpha \,.\, \operatorname{tg}\beta} = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\,.$$

Widzimy stąd, że indukcja magnetyczna w punkcie P nie równa się indukcji magnetycznej w punkcie Q.

Rozważmy teraz strumień indukcji magnetycznej, przechodzący przez cząstkę powierzchni F; oznaczmy cząstkę tę przez ds (rys. 50). Strumień, wychodzący z ośrodka o przenikliwości μ_2, będzie:

$$B_2 \,.\, ds \,.\, \cos\beta\,,$$

a wchodzący do ośrodka o przenikliwości μ_1:

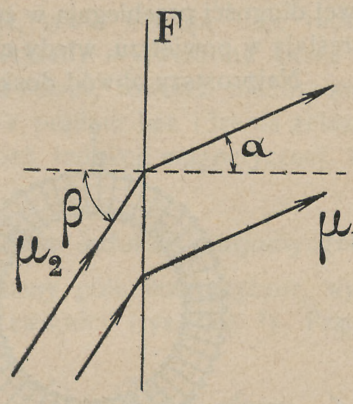
$$-B_1 \,.\, ds \,.\, \cos\alpha\,.$$

Ze stosunku B_1 do B_2 wynika, że:

$$B_1 \,.\, \cos\alpha = B_2 \,.\, \cos\beta\,,$$

przeto:

$$B_1 \,.\, ds \,.\, \cos\alpha = B_2 \,.\, ds \,.\, \cos\beta\,.$$

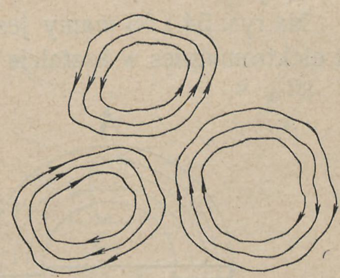


Rys. 50.

Ciągłość więc strumienia indukcji magnetycznej i w tym razie jest zachowana.

Z tych wszystkich rozumowań wynika, że strumień indukcji magnetycznej jest zawsze ciągły, a to jest możliwe tylko wtedy, gdy linje indukcji magnetycznej są linjami zamkniętemi.

Pole magnetyczne w dowolnym układzie ośrodków przedstawia się więc jako zespół zamkniętych strumieni indukcji magnetycznej (rys. 51).



Rys. 51.

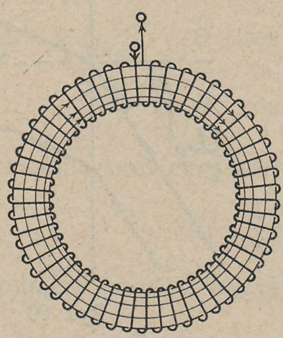
Na wzmiankę zasługuje jednak wypadek, który pozornie wymyka się z pod tej zasady. Chodzi mi tu o pole magnetyczne, wywołane przez biegun magnetyczny północny lub południowy; z własności takiego pola korzystaliśmy nieraz i będziemy korzystali w dalszym ciągu. W tym wypadku linje sił wybiegają promieniami z bieguna magnetycznego, podobnie więc zachowują się i zgodne z niemi co do kierunku linje indukcji magnetycznej. Nie należy jednak zapominać, że jak wiemy z doświadczenia, magnesów jednobiegunowych niema, skoro więc mówimy tylko o jednym biegunie i tylko jego wpływ rozważamy, należy przypuścić, że drugi biegun magnesu znajduje się w odległości nieskończenie wielkiej, czyli, że magnes jest nieskończenie długi. Z przebiegu linji indukcji wokoło takiego magnesu zdamy sobie sprawę, o ile wyobrazimy sobie, że magnes przedstawiony na rys. 21 został wydłużony do tego stopnia, że przy wyznaczeniu kierunku linji na zewnątrz magnesu wokoło jednego bieguna obecność drugiego bieguna może być nie brana pod uwagę; natomiast wewnątrz magnesu linje indukcji zawsze będą biegły od jednego bieguna do drugiego, a więc ostatecznie zawsze to będą linje zamknięte.

3. Rodzaje obwodów magnetycznych.

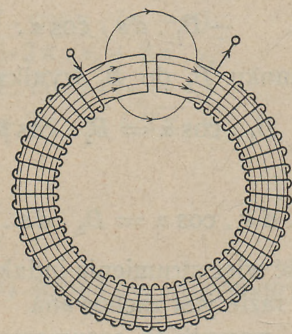
W elektrotechnice wszelkie obliczenia, dotyczące elektromagnesów lub magnesów stałych, dokonywane są na podstawie pojęcia obwodu magnetycznego.

Obwodem magnetycznym nazywamy szereg ciał, przez które przebiega strumień indukcji magnetycznej. Obwody magnetyczne mogą być **doskonałe** i **niedoskonałe**. Doskonałemi obwodami są takie, w których linje indukcji na całej swej długości przebiegają w żelazie. Gdy linje indukcji chociaż część szlaku zakreślają w powietrzu, wtedy obwód magnetyczny nazywamy niedoskonałym.

Najprostszy obwód doskonały stanowi pierścień żelazny, w którym przebiega



Rys. 52.

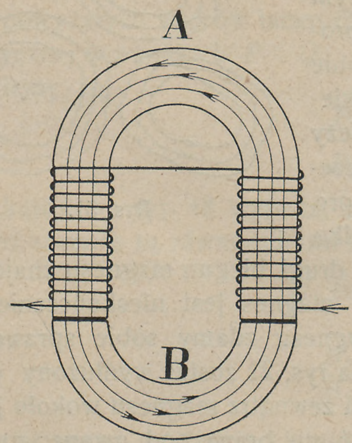


Rys. 53.

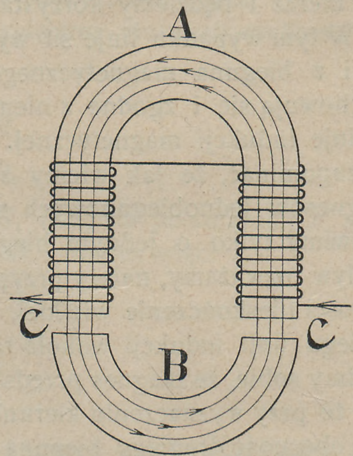
strumień magnetyczny, wywołany przez prąd, przepływający w uzwojeniu, tak, jak to widzimy na rys. 52.

Gdy taki pierścień rozetniemy (rys. 53), linje magnetyczne zmienią swój kształt i część szlaku swego zakreślą w powietrzu, mamy więc tu obwód magnetyczny niedoskonały.

Na rys. 54 i 55 mamy jeszcze inne przykłady. Na tych rysunkach pokazany jest elektromagnes w kształcie podkowy — *A*, która magnesuje się prądem, prze-



Rys. 54.



Rys. 55.

biegającym w zwojnicy, i przyciąga kotwicę *B*. Gdy kotwica szczelnie przylega do podkowy (rys. 54), strumień magnetyczny, wskazany na rysunku kilku linjami, przebiega całkowicie w żelazie, obwód więc tego strumienia jest doskonały; nato-

miast na rys. 55, gdzie, wbrew sile przyciągania, kotwica jest trochę odsunięta od biegunów podkowy, obwód strumienia magnetycznego jest niedoskonały; strumień ten, w miejscach oznaczonych literą C, przebiega przez dwie warstwy powietrza.

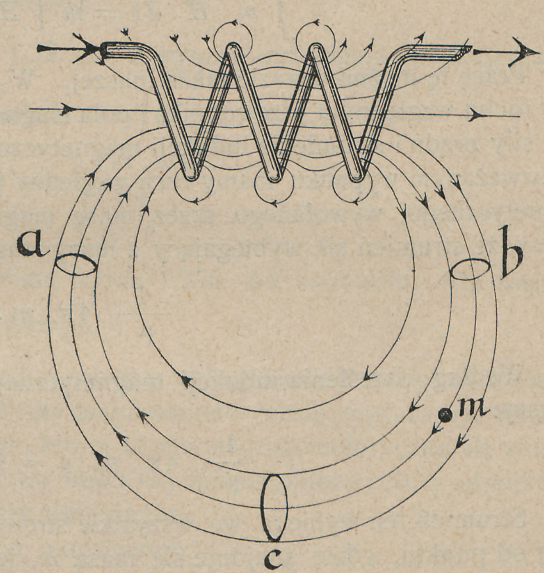
Obwody magnetyczne znajdziemy wszędzie, gdzie istnieją linje indukcji. Obwód niedoskonały posiada strumień magnetyczny wytworzony przez prąd w zwojnicy owiniętej wokoło zwykłego kawałka żelaza, również niedoskonałym jest obwód strumienia magnetycznego zwojnicy z prądem bez rdzenia żelaznego Magnesy stałe (rys. 21) również posiadają strumień indukcji magnetycznej, który ma swój obwód magnetyczny.

4. Związek pomiędzy siłą prądu a strumieniem indukcji magnetycznej.

Wzór ogólny obwodu magnetycznego. Rozważmy pole magnetyczne, wytworzone przez prąd elektryczny, przebiegający w zwojnicy (rys. 56). [1]) Prąd ten wywołuje strumienie magnetyczne, obejmujące częściowo lub całkowicie zwoje drutu.

Weźmy pod uwagę strumień indukcji magnetycznej, przebiegający w rurce abc.

Załóżmy przekrój rurki tak cienki, że będziemy mogli przyjąć natężenie indukcji w przekroju poprzecznym jako jednostajne. Ośrodek, w którym przebiegają linje indukcji, jest taki, iż kształt linji natężenia pola magnetycznego H oraz linji indukcji B jest jednakowy. Oznaczmy strumień, przebiegający w rurce abc przez N, przekrój poprzeczny prostopadły do linji magnetycznych w którymkolwiek miejscu przez s, przenikliwość magnetyczną ośrodka w tym miejscu przez μ, wtedy:



Rys. 56.

$$N = B \,.\, s = \mu \,.\, H \,.\, s.$$

Oznaczmy następnie przez dl cząstkę średniej linji indukcji wewnątrz rurki abc i pomnóżmy obie strony powyższego równania przez dl; otrzymamy wtedy:

$$N\,dl = \mu \,.\, s \,.\, H \,.\, dl,$$

albo:

$$N \frac{dl}{\mu \,.\, s} = H \,.\, dl.$$

[1]) Linje indukcji, wywołane przez przedstawioną zwojnicę, są w rzeczywistości bardziej rozbieżne w jednorodnym ośrodku nazewnątrz zwojnicy, niż to wskazano na rysunku, co miało na celu zmniejszenie jego wymiarów.

Całkując obie strony równania wzdłuż całego obwodu rurki i mając na względzie, że strumień N w całym obwodzie jest wielkością stałą, otrzymamy:

$$N \cdot \int_0 \frac{dl}{\mu \cdot s} = \int_0 H \cdot dl \quad \ldots \ldots \ldots \quad (a)$$

$\int_0 H \cdot dl$ możemy wyrazić za pomocą siły prądu elektrycznego w zwojnicy i liczby jej zwojów. W celu wyprowadzenia tego wyrazu, wyobraźmy sobie masę magnetyczną m, oprowadzaną dookoła, wzdłuż, wspomnianej poprzednio, średniej linji mągnetycznej wewnątrz rurki abc (rys. 56). Jeżeli ta masa jest północna i ruch jej przyjmiemy zgodny z kierunkiem linji sił, wtedy siły pola magnetycznego wykonają pracę, która wyrazi się wzorem:

$$\int_0 m \cdot H \cdot dl = m \int_0 H \cdot dl.$$ [1]

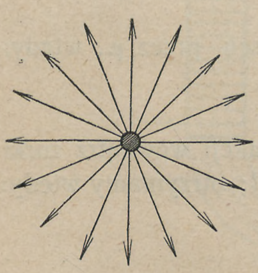
Pracę tę można wyrazić także inaczej. W rozdziale XVIII wyprowadzono, że przy ruchu względnym przewodnika i pola magnetycznego praca wyraża się iloczynem siły prądu i strumienia indukcji magnetycznej, przeciętego przez przewodnik. W rozważanym wypadku mamy ruch względny przewodnika w stosunku do pola magnetycznego, wywołanego przez masę magnetyczną m. Z rozdziału VII § 2 wiemy, że strumień sił, wybiegający z masy magnetycznej m, wyraża się wzorem:

$$\frac{1}{\mu} \; 4\pi \cdot m.$$

Według określenia indukcji magnetycznej strumień indukcji będzie μ razy większy:

$$\frac{1}{\mu} \cdot 4\pi \cdot m \cdot \mu = 4\pi \cdot m.$$

Strumień ten wybiega we wszystkie strony wzdłuż promieni, przeprowadzonych od punktu, gdzie znajduje się masa m, jak to wskazuje rys. 58. Łatwo zauważyć, że przy przejściu jednorazowym masy magnetycznej dookoła średniej linji rurki abc każdy zwój drutu przetnie raz jeden cały strumień $4\pi m$. Załóżmy, że zwojnica ma n zwojów. Każdy zwój przetnie strumień $4\pi m$, wszystkie więc zwoje przetną strumień $4\pi m \cdot n$. Gdy siłę prądu w zwojnicy oznaczymy przez i, praca wykonana przy ruchu masy m, będzie:



Rys. 58.

$$4\pi \cdot m \cdot n i.$$

Z dwuch wyrażeń pracy, wykonanej przez siły, poruszające masę magnetyczną przy jednym jej obiegu dookoła średniej linji rurki abc, możemy utworzyć równanie:

---

[1] mH jest to siła działania pola magnetycznego o natężeniu H na masę magnetyczną m. Patrz Rozdział I, paragraf 2.

$$m \cdot \int_0 H \, . \, dl = 4\pi \, . \, m \, . \, ni \, ,$$

a więc

$$\int_0 H \, . \, dl = 4\pi \, . \, ni \, .$$

$\int_0 H \, . \, dl$ wyrażamy zwykle w jednostkach bezwzględnych, natomiast i w amperach. Chcąc więc zachować znak równania, należy liczbę, wyrażającą siłę prądu podzielić przez 10, by zamienić ampery na jednostki bezwzględne. Wtedy będzie:

$$\int_0 H \, . \, dl = \frac{4\pi}{10} \, . \, ni = 1{,}256 \, . \, ni \, .$$

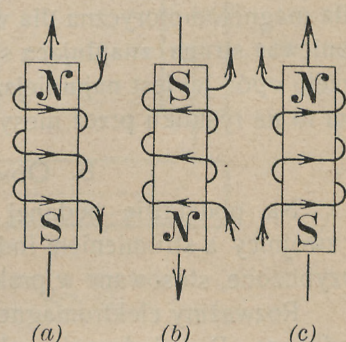
Iloczyn ni przedstawia **amperozwoje**.

Podstawiając wartość całki: $\int_0 H \, . \, dl$ w wyrazie strumienia indukcji magnetycznej, (patrz wzór a), będziemy mieli:

$$N = \frac{1{,}256 \, . \, ni}{\int_0 \frac{dl}{\mu \, . \, s}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (b)$$

Przez analogję do prawa Ohma wyraz $1{,}256 \, . \, ni$ nazywamy **siłą magnetomotoryczną**, a $\int \frac{dl}{\mu \, . \, s}$ **oporem magnetycznym.** [1])

Siła magnetomotoryczna. Przedewszystkim należy zwrócić uwagę na to, że jest to wielkość kierunkowa. Kierunek siły magnetomotorycznej wyznaczają linje sił, wywołane przez prąd w zwojnicy, do której ta siła magnetomotoryczna się stosuje. Na rys. 58 wskazana jest zależność kierunku siły magnetomotorycznej od kierunku prądu i od układu zwojów. Kierunek linij magnetycznych jest tu podany zgodnie z określeniem, wskazanym na rys. 1 str. 7; łatwo spostrzec, że do zwojnic z prądem może być zastosowane prawidło śruby w inny, bardziej dogodny sposób. Jeśli śrubę z prawym gwintem ustawimy wzdłuż linji magnetycznych i będziemy ją obracać zgodnie z kierunkiem prądu w zwojnicy, wtedy ruch postępowy śruby wskaże kierunek linji magnetycznych, a więc i kierunek siły magnetomotorycznej zwojnicy.



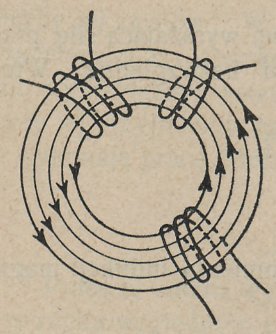
Rys. 58.

Zgodnie z tym prawidłem, na rys 58 wskazane są kierunki prądów i linij magnetycznych, oraz podane nazwy biegunów, powstających na końcach rdzeni żelaznych, umieszczonych wewnątrz zwojnic. Biegun północny jest

[1]) Dla jednostek bezwzględnych siły magnetomotorycznej niektórzy wprowadzają nazwę *dżilbert* (Gilbert), a dla jednostek bezwzględnych oporu magnetycznego — nazwę *ersztet* (Oerstedt).

zawsze tam, gdzie linje magnetyczne wychodzą z żelaza. Porównywując rys 58 *(a)* z 58 *(b)* widzimy, że kierunek siły magnetomotorycznej można odwrócić, zmieniając kierunek prądu, porównanie zaś rys. 58 *(b)* z 58 *(c)* wskazuje, że można również odwrócić kierunek siły magnetomotorycznej, zmieniając układ czyli kierunek zwojów, stosując np. zamiast prawego lewy, przyczem kierunek prądu w drutach należy pozostawić bez zmiany.

Jeżeli ten sam strumień magnetyczny przebiega kolejno przez kilka zwojnic z prądami i_1, i_2 i i_3 i liczbą zwojów n_1, n_2, n_3 (rys. 59), to siła magnetomotoryczna wyraża się wzorem:



Rys. 59.

$$1{,}256\ (n_1 i_1 + n_2 i_2 + n_3 i_3).$$

Dodawanie należy tu uskutecznić algebraicznie, uwzględniając zależnie od znaków (—) i (+) kierunki sił magnetomotorycznych wzdłuż obwodu magnetycznego. Za kierunek dodatni przyjmuje się kierunek zgodny z biegiem wskazówki zegarka lub odwrotnie.

Opór magnetyczny. Całka $\int_0 \frac{dl}{\mu s}$ wyraża całkowity opór rurki *abc* (rys. 56) [1]. Ze wzoru widzimy, że opór ten określają wymiary rurki i własności magnetyczne ośrodka, w którym rurka przebiega. Z poprzedniego rozdziału wiemy, że przenikliwość magnetyczna żelaza zależy od indukcji magnetycznej, opór więc obwodu w żelazie jest wielkością zmienną, zależną od wielkości strumienia magnetycznego.

Pamiętać należy, że wzór *(b)* dla strumienia magnetycznego jest ścisły tylko w tym wypadku, gdy przekrój s strugi magnetycznej jest bardzo mały, wtedy bowiem tylko indukcja magnetyczna na całym przekroju poprzecznym może być przyjęta jako wielkość stała. W strugach grubych, np. w pierścieniu rys. 52 (str. 56), indukcja w pobliżu obwodu wewnętrznego jest większa niż przy obwodzie zewnętrznym; łatwo tego dowieść, dzieląc strumień magnetyczny na strugi drobne. Siła magnetomotoryczna dla wszystkich strug cząstkowych będzie jednakowa, lecz ponieważ struga znajdująca się najbliżej obwodu wewnętrznego jest najkrótsza, przeto opór jej jest najmniejszy, a więc strumień będzie tu największy. Uwydatniłem to na rysunku przez niesymetryczny układ linji indukcji.

5. Obwód magnetyczny doskonały.

Na podstawie podanej wyżej zależności pomiędzy prądem elektrycznym w zwojnicy a strumieniem indukcji magnetycznej, układają się następujące wzory przybliżone, stosowane w praktyce.

Rozważmy elektromagnes (rys. 60), w którym kotwica przylega szczelnie do podkowy. Doświadczenie wskazuje, że w tych warunkach tylko bardzo nieznaczna liczba linij magnetycznych przebiega częściowo w powietrzu; możemy przeto przyjąć w przybliżeniu, że cały strumień, wywołany przez zwojnicę, przebiega w żelazie, i na podstawie powyżej wyprowadzonego wzoru ogólnego dla obwodu doskonałego (rys. 60) napisać:

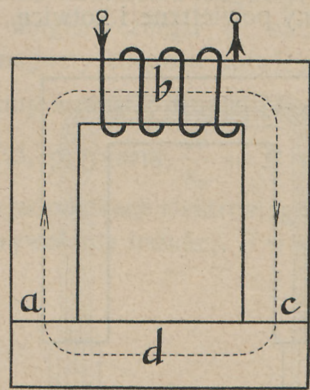
---

[1] Opór magnetyczny według Hewiside'a nazywamy także *reluktancją*.

$$N = \frac{1{,}256 \cdot ni}{\frac{l_1}{\mu_1 \cdot s_1} + \frac{l_2}{\mu_2 \cdot s_2}},$$

N — strumień indukcji magnetycznej w żelazie,
n — liczba zwojów zwojnicy,
i — siła prądu w drucie,
l_1 — długość średniej linji indukcji abc w podkowie,
l_2 — długość średniej linji indukcji adc w kotwicy,
s_1 — przekrój poprzeczny podkowy,
s_2 — przekrój poprzeczny kotwicy,
μ_1 — przenikliwość magnetyczna podkowy,
μ_2 — przenikliwość magnetyczna kotwicy.

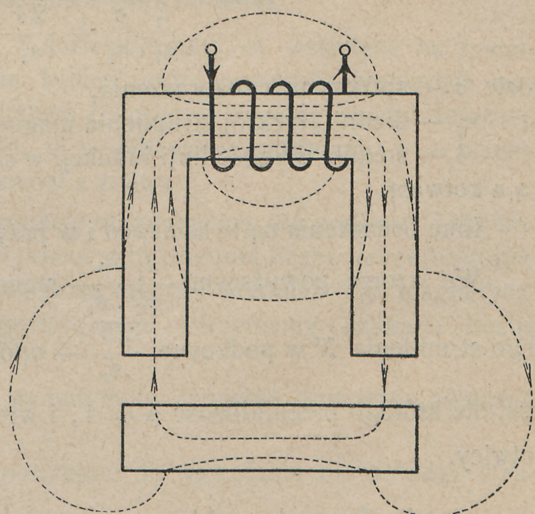
$\frac{l_1}{\mu_1 \cdot s_1}$ wyraża opór magnetyczny podkowy, a $\frac{l_2}{\mu_2 \cdot s_2}$ opór magnetyczny kotwicy.



Rys. 60.

6. Obwód magnetyczny niedoskonały.

Gdy kotwica nie przylega do podkowy, obwód magnetyczny jest niedoskonały; wtedy sprawa staje się bardziej złożoną (rys. 61). W tym wypadku cały strumień magnetyczny, wytworzony przez zwojnicę, można podzielić na dwa strumienie: **główny**, przechodzący przez kotwicę, i **rozproszony**, który przez kotwicę całkiem nie przebiega i tylko część szlaku swego zakreśla w podkowie a resztę w powietrzu. Otóż w elektromagnesie jest zawsze pewien przekrój, w danym razie w środku zwojnicy, przez który przechodzą oba strumienie, pomijając oczywiście pewną drobną liczbę linji magnetycznych, nieobejmujących wszystkich zwojów zwojnicy.


Rys. 61.

Stosunek całkowitego strumienia N_c do głównego N nazywamy **spółczynnikiem rozproszenia** obwodu magnetycznego i oznaczamy go przez σ, a więc

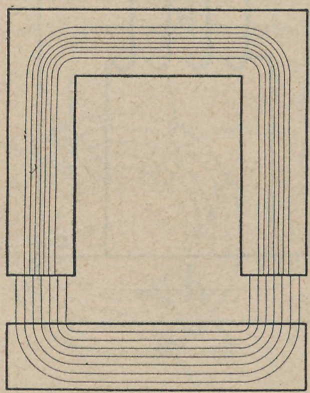
$$\sigma = \frac{N_c}{N},$$

ponieważ $N_c > N$, przeto σ będzie zawsze > 1.

Wielkość tego spółczynnika zależy przedewszystkim od grubości warstwy po-

wietrza pomiędzy podkową a kotwicą, następnie od własności magnetycznych żelaza i od indukcji magnetycznej w kotwicy i podkowie.

Największe znaczenie praktyczne ma wzór dla strumienia głównego, obejmującego oczywiście wszystkie zwoje zwojnicy i przebiegającego przez podkowę, szczeliny powietrzne i kotwicę. W kotwicy strumień ten wypełnia przekrój całkowicie; również wchodzi on do podkowy przez cały przekrój powierzchni dolnych. Natomiast wewnątrz podkowy przebiega on tylko w części przekroju, ponieważ resztę zajmuje strumień rozproszony.



Rys. 62.

Celem uproszczenia wzoru, wyrażającego opór obwodu magnetycznego, czynimy zazwyczaj pewne przypuszczenia, zbliżone do rzeczywistości.

Najprostszy i praktycznie dość dokładny wzór otrzymamy dla rozważanego przykładu, zakładając, że strumień główny w podkowie zajmuje $\frac{1}{\sigma}$ część całego przekroju podkowy na całej jej długości. Wtedy układ linij strumienia głównego przedstawi się, jak pokazano na rys. 62, a wzór dla tego strumienia, przy zastosowaniu oznaczeń podanych dalej, przybierze postać:

$$N = \frac{1{,}256 \,.\, ni}{\frac{l_1 \,.\, \sigma}{\mu_1 \,.\, s_1} + \frac{2\delta}{s_3} + \frac{l_2}{\mu_2 \,.\, s_2}}$$

gdzie σ — spółczynnik rozproszenia,

s_3 — średni przekrój strumienia magnetycznego w powietrzu,

δ — średnia długość linji indukcji w szczelinie powietrznej pomiędzy podkową a kotwicą.

Inne oznaczenia są te same, co i w przykładzie poprzednim.

We wzorze powyższym $\frac{l_1 \,.\, \sigma}{\mu_1 \,.\, s_1}$ stanowi opór części obwodu magnetycznego strumienia N w podkowie, $\frac{2\delta}{s_3}$ — opór magnetyczny dwuch warstw powietrza, dla którego przenikliwość $\mu = 1$, i wreszcie $\frac{l_2}{\mu_2 \,.\, s_2}$ — opór magnetyczny kotwicy.

7. Sposób praktyczny obliczania liczby amperozwojów.

Zagadnienia praktyczne, dotyczące obwodów magnetycznych, sprowadzają się zazwyczaj do obliczenia liczby amperozwojów, niezbędnych do wywołania pewnego strumienia w obwodzie, którego wymiary i materyał są wskazane.

Rozważmy np. wyrażenie dla obwodu niedoskonałego. Z tego wyrażenia wypada:

$$ni = 0{,}797 \cdot \frac{N \cdot \sigma}{s_1} \cdot \frac{l_1}{\mu_1} + 0{,}797 \cdot \frac{N}{s_3} \cdot 2\delta + 0{,}797 \; \frac{N}{s_2} \cdot \frac{l_2}{\mu_2}.$$

Całkowita liczba amperozwojów składa się z trzech części. Pierwszą część stanowi liczba amperozwojów, niezbędna do wywołania strumienia magnetycznego w podkowie, drugą — do wywołania strumienia magnetycznego w szczelinie powietrznej, a trzecią — do wywołania strumienia magnetycznego w kotwicy.

Amperozwoje dla szczeliny powietrznej obliczamy wprost z drugiej części powyższego wyrażenia, zaokrąglając liczbę 0,797 do 0,8, przyczem $\frac{N}{s_3} = B$ wyraża indukcję magnetyczną w szczelinie w bezwzględnych jednostkach elektromagnetycznych. Liczba zatem amperozwojów, niezbędna do wywołania indukcji B w szczelinie, wyniesie:

$$0{,}8 \cdot B \cdot 2\delta,$$

gdzie δ wyrażamy w centymetrach.

Natomiast amperozwoje dla kotwicy i dla podkowy obliczamy nie według powyższego wzoru, lecz nieco prościej.

Przenikliwość magnetyczna żelaza zależy, jak wiemy, od całego szeregu najrozmaitszych czynników. Otóż z doświadczeń nad żelazem w kształcie pierścienia, posiadamy krzywe, wyrażające wprost zależność indukcji magnetycznej B od liczby amperozwojów niezbędnych do wywołania określonej indukcji w żelazie, przypadających na jeden centymetr długości linji indukcji.

Wspomniane krzywe, otrzymane z doświadczenia, są wskazane na rysunkach 63 i 64. [1]) Sposób ich wykreślania będzie rozważony przy pomiarach magnetycznych w rozdziale XXXVIII. Krzywa 1 dotyczy zwykłej blachy żelaznej, stosowanej do budowy dynamomaszyn, 2 — odlewów stalowych, 3 — blachy żelaznej nakrzemionej, a 4 dotyczy odlewów z żeliwa.

Wobec tego wystarcza obliczyć indukcję magnetyczną dla podkowy i dla kotwicy i znaleźć podług tej indukcji z wykresu odpowiednią liczbę amperozwojów na centymetr długości. Mnożąc tę liczbę przez długość średniej linji magnetycznej odpowiedniej części obwodu magnetycznego, otrzymamy szukaną liczbę amperozwojów.

Do lepszego zorjentowania się w podanym tu sposobie obliczenia posłużyć może przykład następujący.

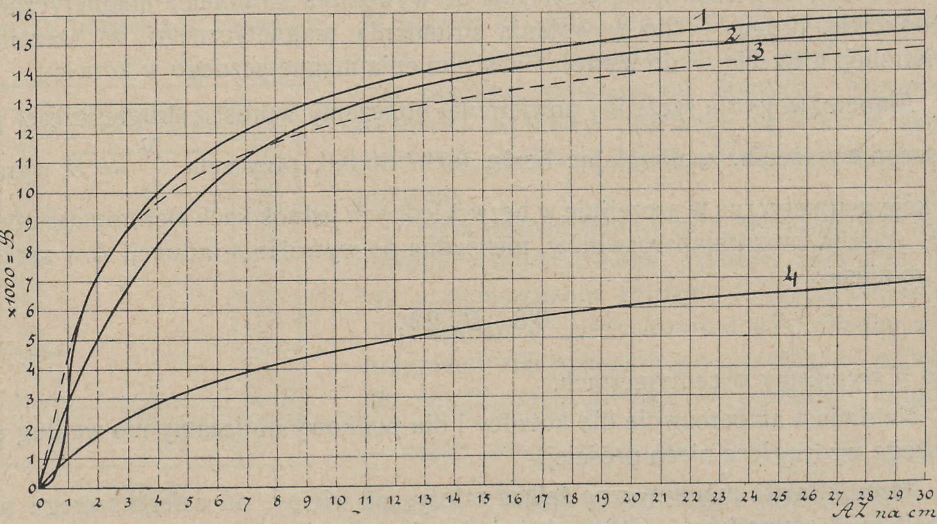
Mamy np. obliczyć amperozwoje potrzebne do wywołania określonego strumienia w elektromagnesie (rys. 61).

Załóżmy $N = 10^6$ c. g. s.: $s_1 = 100\ cm^2$, $s_2 = 200\ cm^2$, $s_3 = 100\ cm^2$, $\sigma = 1{,}1$, $\delta = 0{,}2\ cm$, $l_1 = 60\ cm$, $l_2 = 40\ cm$.

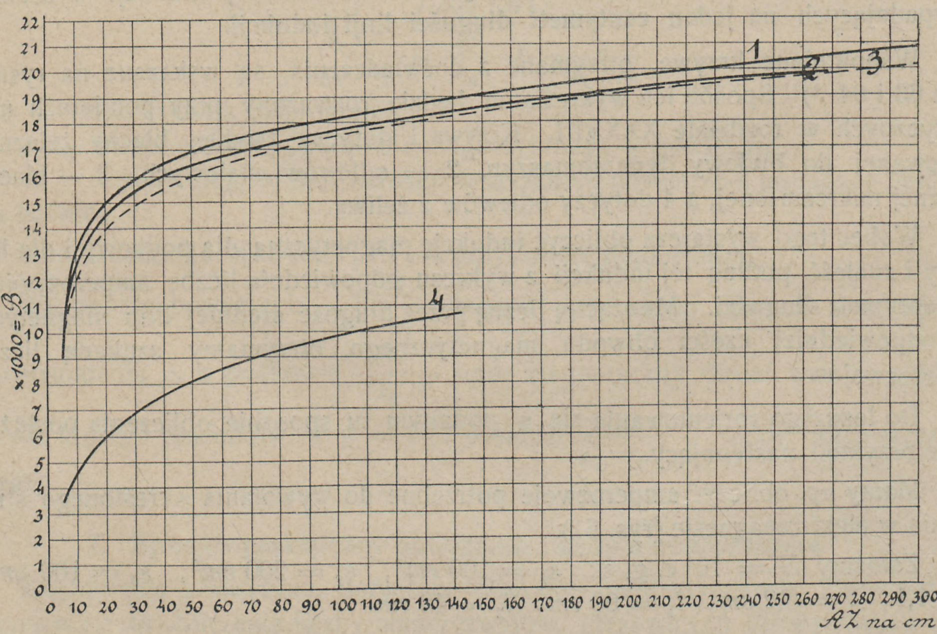
[1]) Oba rysunki przedstawiają te same linje wykreślone w różnych skalach, co ułatwia odczytywanie dokładne przy małej liczbie amperozwojów. Krzywe te są zaczerpnięte z niemieckiego kalendarza dla elektrotechników Uppenborna na r. 1914.

Indukcja w powietrzu będzie:

$$\frac{10^6}{100} = 10000 \text{ c. g. s.}$$



Rys. 63.



Rys. 64.

Liczba zatem amperozwojów niezbędna do wywołania strumienia magnetycznego w powietrzu wyniesie: 0,8 . 10000 . 2 . 0,2 = 3200.

Indukcja magnetyczna w podkowie będzie:

$$1{,}1 \,.\, \frac{10^6}{100} = 11000,$$

a w kotwicy:

$$\frac{10^6}{200} = 5000.$$

Z wykresów na rys. 63 widzimy, że, dla odlewu stalowego i indukcji 11000 należy wziąć 6,8 amperozwojów na jeden centymetr długości linji indukcji, a ponieważ $l_1 = 60\ cm$, przeto dla wywołania strumienia magnetycznego w podkowie potrzeba $6{,}8 \times 60 = 408$ amperozwojów.

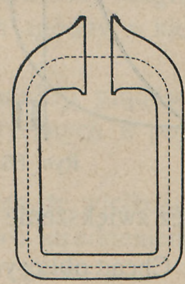
Przy indukcji 5000 wystarcza wziąć, jak widać z wykresu (rys. 63), 2 amperozwoje na jeden centymetr długości linji indukcji, a ponieważ $l_2 = 40\ cm$, zatem na całą kotwicę przypada $2 \times 40 = 80$ amperozwojów.

Tym sposobem zwojnica magnesująca powinna mieć ogółem $3200 + 408 + 80 = 3688$ amperozwojów.

8. Obliczenie magnesów stałych, stanowiących obwód prawie doskonały. [1])

Wzory obwodów magnetycznych mogą być także zastosowane do przybliżonego wyznaczenia strumienia magnetycznego szczątkowego w magnesie stałym.

Na rys. 65 widzimy magnes stały, namagnesowany w ten sposób, że linje indukcji przebiegają wokoło znacznie większą część drogi w żelazie, a tylko nie wielką w powietrzu.



Rys. 65.

Oznaczmy strumień magnetyczny, przebiegający w żelazie i w szczelinie przez N. Zachodzące bowiem rozproszenie, jako nieznaczne, można pominąć. Oznaczmy długość linji średniej w żelazie przez l, a w powietrzu przez δ, średni przekrój żelaza — przez s, a przekrój strumienia w szczelinie powietrznej, prostopadły do linji indukcji — przez s'. Załóżmy następnie, że strumień ten został wywołany początkowo przez jakąś zwojnicę z prądem o ni amperozwojach. Możemy wówczas ułożyć zależność następującą:

$$1{,}256 \,.\, n i = N \,.\, \left(\frac{l}{\mu \,.\, s} + \frac{\delta}{s'}\right),$$

albo:

$$1{,}256 \,.\, n i = \frac{N \,.\, l}{\mu \,.\, s} + \frac{N \,.\, \delta\, s}{s \,.\, s'}.$$

Oznaczmy $\frac{N}{\mu \,.\, s}$ przez H, a $\frac{N}{s}$ przez B, wtedy otrzymamy:

$$1{,}256 \,.\, n i = H \,.\, l + B \,.\, \frac{\delta \,.\, s}{s'},$$

[1]) Według Gerard'a.

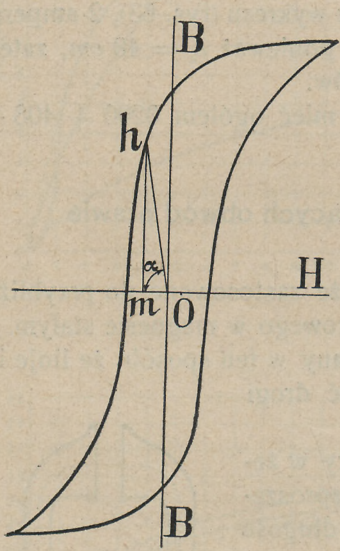
skąd:

$$H = \frac{1{,}256 \, . \, ni}{l} - B \, . \, \frac{\delta \, . \, s}{l \, . \, s'},$$

Wielkość H nazywać będziemy natężeniem magnesującym. Składa się ono z dwuch części: jedną daje zwojnica magnesująca, drugą, odwrotną, wywołuje szczelina powietrzna, bo gdy $\delta = 0$, to i cały ten wyraz równa się zeru. Stały magnes, pozbawiony zwojnicy magnesującej, będzie oczywiście znajdował się pod wpływem rozmagnesowującego natężenia: $B \frac{\delta \, . \, s}{l \, . \, s'}$.

Mając pętlicę histerezy dla danego gatunku żelaza (rys. 66), łatwo znaleźć sposobem wykreślnym B przy $H = -B \frac{\delta \, . \, s}{l \, . \, s'}$. Wystarcza tylko przeprowadzić prostą oh pod pewnym kątem α do osi H; kąt ten musi być wybrany w ten sposób, aby

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{B}{H} = \frac{l \, . \, s'}{\delta \, . \, s}.$$



Rys. 66.

Mając więc wymiary żelaza, łatwo znaleźć α, a prowadząc prostą oh, znajdziemy odcinek mh, który wyraża wielkość indukcji istniejącą w żelazie B po przerwaniu prądu.

W magnesach tego rodzaju, stosowanych w praktyce do galwanometrów, stosunek $\frac{l \, . \, s'}{\delta \, . \, s}$ równa się około 200.

Tak wielka liczba osiąga się głównie przez zmniejszenie grubości szczeliny powietrznej δ i przez zwiększenie jej przekroju s'.

Chcąc obliczyć indukcję w powietrzu, należy B zmniejszyć w stosunku $\frac{s}{s'}$; indukcja w powietrzu będzie przeto:

$$B' = B \, . \, \frac{s}{s'}.$$

ROZDZIAŁ VIII.

Samoindukcja.

Pole magnetyczne, istniejące wokoło przewodników z prądem, ma wpływ na przebieg samego prądu. Wpływ ten nazywamy **samoindukcją**.

Samoindukcja powstaje tylko przy prądzie **zmiennym**, t. j. wtedy, gdy pole magnetyczne wokoło prądu zmienia się. Zjawiska, zachodzące wtedy w obwodzie elektrycznym, dają się wyjaśnić przez powstawanie w przewodniku siły elektromotorycznej samoindukcji.

Najbardziej charakterystyczną własnością siły elektromotorycznej samoindukcji jest jej kierunek, który, jak wiemy z doświadczenia, jest zawsze taki, że siła elektromotoryczna przeciwdziała zmianom, zachodzącym w prądzie. Gdy prąd wzrasta, kierunek siły elektromotorycznej samoindukcji jest odwrotny względem kierunku prądu, gdy natomiast prąd się zmniejsza, jest on zgodny z kierunkiem prądu.

Zjawisko samoindukcji jest wypadkiem szczególnym indukcji prądów, zachodzącej pod wpływem zmian, w jakichkolwiek polach magnetycznych w pobliżu przewodnika.

1. Pojęcia zasadnicze. Prawo indukcji prądów stwierdza, że wielkość siły elektromotorycznej indukcji w przewodniku wyraża się ilościowo strumieniem indukcji magnetycznej, przeciętym przez przewodnik w jednostce czasu. [1])

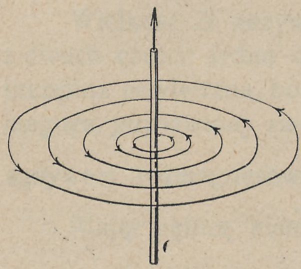
Określenie to jest zupełnie zrozumiałe, bez dokładniejszego wyjaśnienia, gdy przewodnik porusza się w polu magnetycznym. Tymczasem w zjawisku samoindukcji mamy zwykle do czynienia z przewodnikiem nieruchomym. Dla uzmysłowienia więc znaczenia słów w powyższym prawie musimy sobie wyobrazić, że podczas zmiany prądu elektrycznego linje magnetyczne są w ruchu. Przy wzrastaniu prądu linje magnetyczne oddalają się od przewodnika, po którym płynie prąd, wywołujący te linje, a przy zmniejszaniu się prądu linje zbliżają się do tego przewodnika. Można nawet wyobrazić sobie, że przy powstawaniu prądu linje magnetyczne wyłaniają się z przewodnika, a przy znikaniu prądu przewodnik pochłania te linje.

Rozważając kawałek przewodnika, stanowiącego część obwodu zamknięte-

---

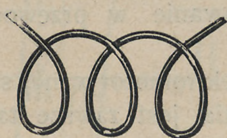
[1]) Patrz rozdział XVIII, O przemianie pracy mechanicznej na pracę prądu, i rozdz. XIX O powstawaniu energji pola magnetycznego skutkiem pracy prądu.

go (rys. 67), można sobie wyobrazić, że linje magnetyczne, powstają i znikają przy zmianach siły prądu i, przecinając przewodnik, wywołują tym sposobem odpowiednią siłę elektromotoryczną samoindukcji. Gdy mamy długi prosty przewodnik, [1]) po którym płynie prąd zmienny, to siłę elektromotoryczną samoindukcji wywoływać będą w danym kawałku przewodnika tylko te linje, które w nim powstały. Gdybyśmy jednak drut zwinęli tak, jak to widzimy na rys. 68 a, znaczna liczba linji magnetycznych, wywołanych przez pewien zwój, przecięłaby też inne zwoje i siła elektromotoryczna wypadkowa byłaby większa, niż poprzednio. Tę wypadkową siłę elektromotoryczną również nazywamy siłą elektromotoryczną samoindukcji.

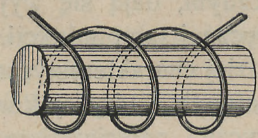


Rys. 67.

Przez umieszczenie wewnątrz zwojnicy rdzenia żelaznego (rys. 68 b), możemy jeszcze bardziej zwiększyć siłę elektromotoryczną samoindukcji. Strumień magnetyczny, powstający wewnątrz zwojnicy, przy tej samej sile prądu, co poprzednio, będzie teraz większy wobec tego, że żelazo ma wielką przenikliwość magnetyczną.



Rys. 68 a.



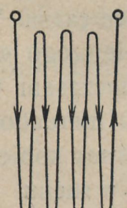
Rys. 68 b.

Chcąc osłabić siłę elektromotoryczną samoindukcji w przewodniku, należy zmniejszyć, o ile tylko można, strumień magnetyczny, wywołany przez prąd. W tym celu przewodnik, prowadzący prąd, można złożyć we dwoje, jak to wskazano na rys. 69. Nazewnątrz takiej pętlicy strumienie magnetyczne od obydwuch jej gałęzi bez mała znoszą się wzajemnie; zniosłyby się one zupełnie, gdyby obie gałęzie mogły zająć w przestrzeni ściśle jedno i to samo miejsce.

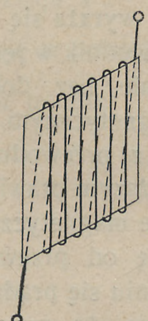
Gdy drut długi złożymy we dwoje i zwiniemy go w kształcie zwojnicy, nazwiemy taką zwojnicę zwiniętą bifilarnie. Można także ułożyć długi drut zygzakiem, jak to wskazano na rys. 70, lub też nawinąć na bardzo cienką płytkę z materjału izolacyjnego (rys. 71); w tych wszystkich wypadkach samoindukcja będzie bardzo mała.



Rys. 69.



Rys. 70.



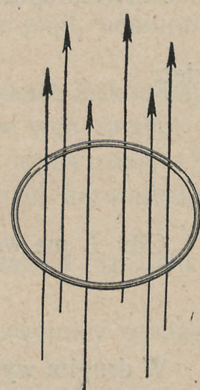
Rys. 71.

2. Wzór ogólny spółczynnika samoindukcji. Ponieważ zjawisko samoindukcji jest wypadkiem szczególnym indukcji prądów, wzory, dotyczące zjawiska samoindukcji, wyprowadzamy ze wzoru

[1]) Zakładamy, że inne części obwodu zamkniętego, którego część stanowi rozważany przewodnik, znajdują się w znacznej odległości od rozważanej cząstki przewodnika.

dla indukcji prądów, podanego dalej w rozdziale XVIII. W tym celu zastosujemy wzór, wyrażający siłę elektromotoryczną indukcji w obwodzie, obejmującym zmienny strumień indukcji magnetycznej. W rozdziale XVIII wyprowadzono, że, gdy strumień indukcji N_t, objęty przez pewien obwód elektryczny w chwili t, zmienia się o dN_t w czasie dt, w obwodzie tym powstaje w chwili t siła elektromotoryczna indukcji, wyrażona wzorem:

$$E_t = -\frac{dN_t}{dt}.$$

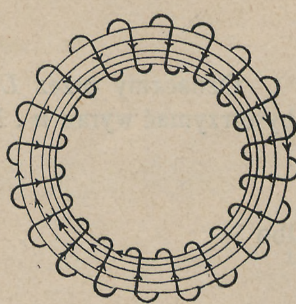


Rys. 72a.

Wzór ten wyraża np. siłę elektromotoryczną indukcji, powstającą w pierścieniu (rys. 72a), obejmującym wiązkę linij magnetycznych, które przedstawiają obrazowo strumień magnetyczny.

Gdy obwód elektryczny obejmuje pewien strumień wielokrotnie (rys. 72b), w każdym zwoju powstaje siła elektromotoryczna, wyrażona powyższym równaniem. Wszystkie te siły elektromotoryczne skierowane są w drucie w jedną stronę, a więc dodają się arytmetycznie. Cała siła elektromotoryczna indukcji, powstająca w takim obwodzie, zależy od liczby zwojów, obejmujących strumień. Oznaczmy liczbę tych zwojów przez n, a strumień magnetyczny, objęty w chwili t każdym zwojem, przez N_t. Gdy strumień ten w czasie dt zmienia się o dN_t, całą siłę elektromotoryczną, powstającą w rozważanym obwodzie, wyrażamy wzorem:

$$E_t' = -\frac{dN_t}{dt} \cdot n.$$



Rys. 72b.

Znak minus określa tu kierunek siły elektromotorycznej indukcji. Gdy dN_t jest dodatnie, a więc strumień indukcji magnetycznej **wzrasta**, kierunek siły elektromotorycznej jest **przeciwny** kierunkowi prądu, który według prawidła śruby wywołałby objęty obwodem strumień magnetyczny. Gdy zaś dN_t jest ujemne — strumień indukcji magnetycznej **zmniejsza się**, wtedy kierunek siły elektromotorycznej indukcji jest **zgodny** z kierunkiem powyższego prądu. [1])

Jeżeli strumień magnetyczny N_t w powyższych przykładach został wywołany przez prąd, płynący w tym obwodzie, gdzie rozważamy siłę elektromotoryczną indukcji, to mamy tu do czynienia z samoindukcją. Siłę elektromotoryczną samoindukcji oznaczać będziemy przez E_s.

Rozważmy przykład najprostszy (rys. 72a). Siła elektromotoryczna samoindukcji wyraża się tu wzorem:

$$E_{st} = -\frac{dN_t}{dt}.$$

[1]) Wynika to z wywodów podanych w rozdziale XVIII.

Załóżmy, że w pierścieniu w chwili t płynie prąd i_t. Strumień magnetyczny, wywołany przez prąd jest proporcjonalny do siły prądu, a spółczynnik proporcjonalności jest stały, o ile przenikliwość magnetyczna ośrodka ma wartość stałą. Oznaczmy ten spółczynnik przez L, wtedy mamy:

$$N_t = L \cdot i_t,$$

a więc:

$$d N_t = d (L \cdot i_t)$$

i:

$$E_{st} = - \frac{d (L \cdot i_t)}{d t}.$$

Gdy L ma wartość stałą, niezależną od i, wtedy:

$$E_{st} = - L \cdot \frac{d i_t}{d t}.$$

W drugim wypadku, gdy mamy zwojnicę (rys. 72b), składającą się z n zwojów, obejmujących strumień N_t, [1]) wzory dla siły elektromotorycznej samoindukcji będą nieco inne:

$$E_{st}' = - \frac{d N_t}{d t} \cdot n.$$

Ponieważ n jest wielkością stałą, możemy napisać:

$$E_{st}' = - \frac{d (n \cdot N_t)}{d t}.$$

Oznaczmy przez L' spółczynnik, przez który należy pomnożyć siłę prądu, aby otrzymać wyraz $n \cdot N_t$, a więc:

$$L' = \frac{n \cdot N_t}{i_t}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

albo

$$n N_t = L' \cdot i_t$$

i

$$d (n N_t) = d (L' \cdot i_t),$$

wtedy:

$$E_{st}' = - \frac{d (L' \cdot i_t)}{d t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Gdy L' jest wielkością stałą, niezależną od i_t, wtedy:

$$E_{st}' = - L' \frac{d i_t}{d t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Wielkości L i L' nazywamy **spółczynnikami samoindukcji** odpowiednich obwodów.

Wzór (1) dla L' jest ogólniejszy, według niego więc określimy pojęcie spółczynnika samoindukcji pewnego obwodu jako: **stosunek strumienia magnetyczne-**

---

[1]) Gdy prąd przebiega w takiej zwojnicy, zjawiają się jeszcze strugi magnetyczne, które obejmują tylko po jednym lub po kilka zwojów; strugi te tu pomijamy.

go, pomnożonego przez liczbę zwojów obwodu elektrycznego, obejmującego ten strumień, do siły prądu elektrycznego, który ten strumień wywołał.

Jeżeli założymy, że w pewnym obwodzie elektrycznym przepływa prąd, którego siła równa się jednostce, to liczbowo spółczynnik samoindukcji tego obwodu równa się strumieniowi magnetycznemu, wywołanemu przez ten prąd, pomnożonemu przez liczbę zwojów, które ten strumień obejmuje.

Gdy prąd i strumień wyrażone są w bezwzględnych jednostkach elektromagnetycznych, to i wartość spółczynnika samoindukcji wyrazi się w tych samych jednostkach. Praktyczna jednostka spółczynnika samoindukcji, odpowiadająca woltom i amperom, nosi nazwę **henry**. Jeden henry równa się 10^9 bezwzględnych jednostek elektromagnetycznych. [1])

Uwzględniając wzór dla obwodu magnetycznego w paragrafie 4 rozdziału VII, możemy wyrazić spółczynnik samoindukcji inaczej.

Zależność strumienia magnetycznego od siły prądu w zwojnicy wyraża się według rozdziału VII wzorem:

$$N_t = \frac{1{,}256 \,.\, n\, i_t}{\int\limits_0 \frac{dl}{s\,.\,\mu}}.$$

Załóżmy, że i wprowadzamy w bezwzględnych jednostkach elektromagnetycznych i oznaczmy opór magnetyczny przez **R**, wtedy będzie:

$$N_t = \frac{12{,}56 \,.\, n \,.\, i_t}{\mathbf{R}},$$

lub inaczej:

$$N_t = \frac{4\pi \,.\, n \,.\, i_t}{\mathbf{R}}.$$

Mając na względzie wzór (1), otrzymamy:

$$L' = \frac{4\pi \,.\, n^2}{\mathbf{R}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Wzór ten wykazuje, że spółczynnik samoindukcji jest wprost proporcjonalny do **drugiej** potęgi liczby zwojów zwojnicy i odwrotnie proporcjonalny do oporu magnetycznego obwodu strumienia, wywołującego samoindukcję.

O ile opór ten jest stały, np. gdy strumień magnetyczny przebiega całkowicie w powietrzu, to i spółczynnik samoindukcji jest stały.

Gdy obwód magnetyczny składa się z powietrza i żelaza, nieraz również dość dokładnie spółczynnik ten można uważać za stały. Opór magnetyczny jest odwrotnie proporcjonalny do przenikliwości magnetycznej ośrodka, więc nawet przy jednakowej długości średniej linji strumienia w powietrzu i w żelazie, w normalnych warunkach magnesowania, stały opór magnetyczny powietrza jest tysiące razy większy od zmiennego oporu żelaza. [2])

---

[1]) Patrz dowodzenie w rozdziale XXVII.

[2]) Pamiętać jednak należy, że rozumowanie tego rodzaju jest słuszne tylko wtedy, gdy spółczynnik samoindukcji stosujemy do takich zmian prądu elektrycznego, przy których stan magnetyczny żelaza zmienia się nie wiele.

Wogóle obwód elektryczny może obejmować kilka różnych strumieni magnetycznych, zawsze jednak dla dowolnego obwodu elektrycznego w sposób podobny, jak poprzednio, możemy znaleźć spółczynnik samoindukcji, który daje możność wyrażenia siły elektromotorycznej samoindukcji wzorem (2) lub (3).

Spółczynnik samoindukcji, jak to widzimy ze wzoru (4), zależy od postaci geometrycznej obwodu elektrycznego i od własności magnetycznych otaczającego ośrodka; spółczynnik ten wyraża magnetyczne własności obwodu elektrycznego.

W praktyce stosujemy nieraz spółczynniki samoindukcji nie tylko dla całych obwodów, lecz i dla **części** tych obwodów. Wtedy w podanym wyżej określeniu spółczynnika samoindukcji mamy na myśli strumień magnetyczny, który wywołuje **tylko rozważana część** obwodu, gdy w niej płynie prąd elektryczny.

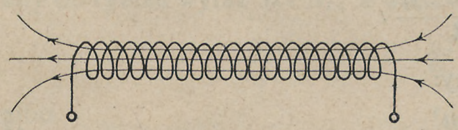
3. Spółczynnik samoindukcji zwojnicy pierścieniowej. Rozważymy zwojnicę (rys. 32), która ma n zwojów i jest nawinięta na pierścieniu o przekroju poprzecznym $s\ cm^2$. Długość średniej linji strumienia magnetycznego oznaczymy przez l, a przenikliwość magnetyczną materyału, z którego zrobiony jest pierścień przez μ. Opór obwodu magnetycznego wyrażamy tu wzorem przybliżonym:

$$\mathrm{R} = \frac{l}{s \cdot \mu}.$$

Zatem według wzoru (4):

$$L = \frac{4\pi \cdot n^2}{l} \cdot s\mu.$$

4. Spółczynnik samoindukcji zwojnicy długiej i cienkiej. Mając zwojnicę cienką i długą (rys. 73), możemy przyjąć w przybliżeniu, że wszystkie zwoje obejmują ten sam strumień magnetyczny i że opór obwodu magnetycznego zewnątrz zwojnicy jest bardzo mały w porównaniu do oporu obwodu magnetycznego wewnątrz zwojnicy.



Rys. 73.

Oznaczmy długość zwojnicy przez l, przekrój poprzeczny przez s, a przenikliwość magnetyczną ośrodka przez μ. Wtedy opór magnetyczny będzie:

$$\mathrm{R} = \frac{l}{s \cdot \mu},$$

a więc wyraz dla spółczynnika samoindukcji otrzymamy według wzoru (4) następujący:

$$L = \frac{4\pi \cdot n^2}{l} \cdot s \cdot \mu.$$

Możemy drogą ścisłego rozumowania przekonać się, że zrobione powyżej przypuszczenia są zgodne z wynikami wywodów ścisłych, które w dalszym ciągu przytaczam.

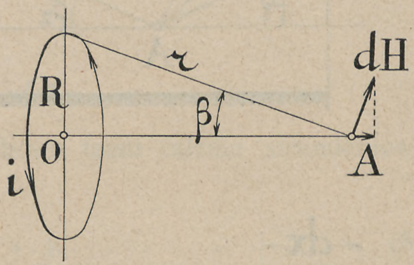
Przedewszystkim wyprowadzimy wzór dla natężenia pola w punkcie A, znajdującym się na osi przewodnika kołowego o promieniu R (rys. 74), po którym

płynie prąd — i. Każda cząstka dl obwodu koła wytwarza w punkcie A natężenie pola. [1])

$$dH = \frac{dl \cdot i}{r^2} \cdot \sin\alpha .$$

r — jest to odległość punktu A od obwodu koła, a α — kąt pomiędzy kierunkiem prądu a linją r; kąt ten $= 90^0$, przeto:

$$dH = \frac{dl \cdot i}{r^2} .$$



Rys. 74.

Natężenie pola, wypadkowe od całego prądu kołowego, jest skierowane wzdłuż linji OA, ponieważ rzuty natężenia pola od prądu w poszczególnych cząstkach obwodu koła na kierunek prostopadły do OA znoszą się nawzajem.

Natężenie wypadkowe otrzymamy, biorąc sumę rzutów wielkości dH na kierunek OA.

$$H = \int_0^{2\pi R} \frac{dl \cdot i}{r^2} \cdot \sin\beta ,$$

albo:

$$H = \frac{i}{r^2} \cdot \sin\beta \cdot \int_0^{2\pi R} \cdot dl ,$$

skąd:

$$H = \frac{2\pi \cdot R \cdot i}{r^2} \cdot \sin\beta$$

Z rysunku widzimy, że:

$$r = \frac{R}{\sin\beta} ,$$

a więc:

$$H = \frac{2\pi i}{R} \cdot \sin^3\beta \quad \dots\dots\dots \quad (5)$$

Rozważmy teraz zwojnicę (rys. 75), utworzoną z szeregu zwojów o średnicy $2R$ i długości l. Załóżmy, że w drutach zwojnicy płynie prąd i, a liczba zwojów na całej długości równa się n. Jeżeli zwoje nawinięte są bardzo gęsto, to możemy oznaczyć przez j siłę prądów w drutach, przypadającą na jednostkę długości zwojnicy, wtedy:

$$l \cdot j = n \cdot i \quad \dots\dots\dots \quad (6)$$

Wyprowadźmy natężenie pola w punkcie A na osi zwojnicy. Rozważając wycięty ze zwojnicy pierścień szerokości dx, łatwo spostrzec, że przepływa po nim prąd.

$$j \cdot dx .$$

[1]) Patrz rozdział I.

Prąd ten wytworzy w punkcie A natężenie pola, które, według wzoru (5) możemy wyrazić w sposób następujący:

$$dH = \frac{2\pi j \,.\, dx}{R} \,.\, \sin^3\beta .$$

Kąt β tworzy oś zwojnicy z prostą, przeprowadzoną z punktu A do punktu B na obwodzie zwojnicy (patrz rys. 76).

Natężenie pola w punkcie A od całej zwojnicy będzie:

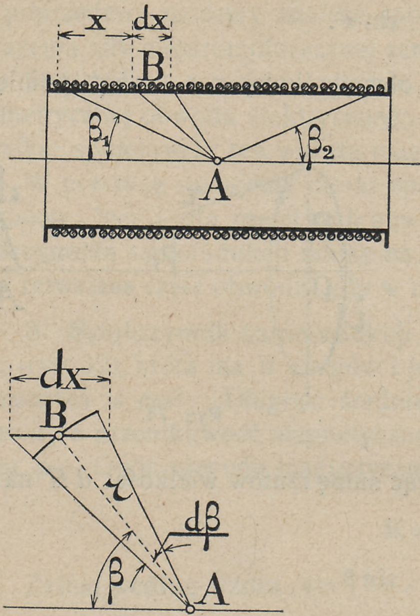
$$H = \int \frac{2\pi \,.\, j \,.\, dx}{R} \,.\, \sin^3\beta \quad . \quad . \quad (7)$$

Długość dx można zastąpić przez łuk, odpowiadający $< d\beta$, zakreślony z punktu A promieniem $AB = r$. Długość tego łuku będzie:

$$r \,.\, d\beta .$$

Z rys. 76 widzimy, że

$$dx = \frac{r \,.\, d\beta}{\sin\beta},$$



Rys. 75 i 76.

a uwzględniając, że średnica zwojnicy $= 2R$:

$$R = r \,.\, \sin\beta .$$

Przez podstawienie ostatnich wyrazów we wzór (7), otrzymamy:

$$H = \int_{\beta_1}^{180^0-\beta_2} 2\pi j \,.\, \sin\beta \,.\, d\beta ,$$

lub po zcałkowaniu: $$H = 2\pi \,.\, j \,.\, \Big[-\cos\beta \Big]_{\beta_1}^{180^0-\beta_2} ,$$

lub też: $$H = 2\pi \,.\, j \,.\, (\cos\beta_1 + \cos\beta_2).$$

Ze wzoru (6) mamy: $$j = \frac{n \,.\, i}{l},$$

przeto: $$H = \frac{2\pi \,.\, ni}{l} (\cos\beta_1 + \cos\beta_2) .$$

Gdy zwojnica jest bardzo długa w porównaniu do średnicy, **natężenie pola w pobliżu środka** znajdziemy, zakładając $\beta_1 = \beta_2 = 0$. $\cos 0^0 = 1$, w tych zatem warunkach:

$$H = \frac{4\pi \,.\, ni}{l} \,.\, {}^{1})$$

---

[1]) Gdy $l = 20\,R$, na osi zwojnicy, pomiędzy punktami, odległemi od końców na $\frac{1}{16} l$, H zmienia się mniej niż o 1%, a pomiędzy punktami odległemi od końców o $\frac{1}{6}\, l$ mniej, niż o 0,1% (według W. Webera).

Przyjmując, że natężenie pola mało się zmienia przy przesuwaniu wzdłuż i w poprzek zwojnicy długiej a cienkiej i oznaczając przez s pole przekroju poprzecznego takiej zwojnicy, otrzymamy strumień indukcji magnetycznej wewnątrz zwojnicy:

$$N = \mu H \,.\, s = \frac{4\pi \,.\, ni}{l} \,.\, s \,.\, \mu \,.$$

Strumień objęty wszystkiemi zwojami:

$$N \,.\, n = \frac{4\pi \,.\, n^2 \,.\, i}{l} \,.\, s \, \mu \,.$$

Spółczynnik samoindukcji równa się liczbowo temu całemu strumieniowi przy prądzie równym jednostce, zatem:

$$L = \frac{4\pi \,.\, n^2}{l} \,.\, s \,.\, \mu \,. \qquad \qquad (8)$$

Jest to wzór przybliżony; w rzeczywistości spółczynnik samoindukcji jest mniejszy, ponieważ nie wszystkie zwoje obejmują cały strumień.

5. Przykłady obliczenia spółczynnika samoindukcji. I. Długa, cienka zwojnica (rys. 73) składa się z 1000 zwojów w jednej warstwie, długość jej wynosi 100 *cm*, a średnica każdego zwoju 3 *cm*. Zwojnica jest nawinięta na rdzeniu drewnianym.

Przy tych założeniach wartość poszczególnych wielkości we wzorze (8) jest następująca: $n = 1000$, $l = 100\ cm$, $s = \frac{\pi \,.\, 3^2}{4} = 7{,}069\ cm^2$, $\mu = 1$. Podstawiając te liczby we wzór (8), otrzymamy:

$$L = \frac{4 \,.\, \pi \,.\, 1000^2}{100} \, 7{,}069 = 887500 \text{ c. g. s.}$$

Ponieważ jeden henry $= 10^9$ c. g. s., przeto:

$$L = 0{,}0008875 \text{ henry.}$$

II. Stan magnetyczny elektromagnesu, przedstawionego na rys. 61, jest określony przez liczby podane w przykładzie, przytoczonym w rozdziale VII § 7. Obliczyć należy spółczynnik samoindukcji dla zwojnicy magnesującej, zakładając, że składa się ona z 1000 zwojów.

Obliczenie możemy przeprowadzić w sposób dwojaki.

Chcąc otrzymać wyniki dość dokładne dla celów praktycznych, możemy założyć, że samoindukcję wywołuje tylko strumień główny. Wtedy, stosując dla obliczenia spółczynnika samoindukcji wzór (4) niniejszego rozdziału, obliczymy przedewszystkim opór magnetyczny obwodu strumienia głównego (rys. 62). Stosować będziemy oznaczenia i liczby przyjęte w przykładzie, rozważonym w rozdziale VII, § 7:

$$R = \frac{l_1}{\mu_1 \,.\, \frac{s_1}{\sigma}} + \frac{2\delta}{s_3} + \frac{l_2}{\mu_2 \,.\, s_2} \,.$$

Wartość spółczynników μ_1 i μ_2 zależy od indukcji i gatunku materjału. Z obliczeń w przykładzie, podanym w paragrafie 7 rozdziału VII, wynika, że indukcja w podkowie wynosi 10000, a w kotwicy 5000.

Przypuśćmy, że mamy tu do czynienia z żelazem kutym, możemy wówczas skorzystać z krzywej dla μ, podanej na rys. 35. Zestawiając krzywe (rys. 34 i 35), widzimy, że indukcji magnetycznej 10000 odpowiada $\mu_1 = 2700$, a indukcji 5000—$\mu_2 = 3300$.

Podstawiając zatem wartość liczbową wielkości poszczególnych we wzór powyższy, otrzymamy:

$$\mathfrak{R} = \frac{60}{2700 \cdot \frac{100}{1,1}} + \frac{2 \cdot 0,2}{100} + \frac{40}{3300 \cdot 200} =$$

$$= 0,000245 + 0,004 + 0,000061 = 0,004306.$$

A więc:

$$L = \frac{4\pi n^2}{\mathfrak{R}} = \frac{4\pi \cdot 1000^2}{0,004306} = 2915 \cdot 10^6 \text{ c. g. s.},$$

albo:

$$L = 2915 \cdot 10^6 \cdot 10^{-9} = 2,92 \text{ henry}.$$

Można przeprowadzić obliczenie, unikając wprowadzania wielkości μ. Według powyższej teorji, spółczynnik samoindukcji równa się ilościowo strumieniowi magnetycznemu, który odpowiada jednostce prądu, wziętemu tylokrotnie, ile zwojów obwodu elektrycznego obejmuje ten strumień.

Posiłkując się tym określeniem, postępujemy w sposób następujący:

Z danych przykładu, obliczonego w § 7 rozdziału VII widzimy, że strumień magnetyczny wynosi 10^6 c. g. s., a z obliczeń tam przeprowadzonych wynika, że strumień ten powstaje pod wpływem 3688 amperozwojów. Gdy zwojnica ma 1000 zwojów, prąd w drutach zwojnicy wynosi:

$$\frac{3688}{1000} = 3,688 \text{ ampera} = 0,3688 \text{ c. g. s.}$$

Cały zaś strumień magnetyczny, objęty przez 1000 zwojów, będzie:

$$10^6 \cdot 1000 \text{ c. g. s.}$$

Strumień zaś, przypadający na bezwzględną jednostkę siły prądu, stanowi:

$$\frac{10^6 \cdot 1000}{0,3688} = 2,71 \cdot 10^9 \text{ c. g. s.}$$

A więc w powyższych warunkach spółczynnik samoindukcji zwojnicy magnesującej wynosi 2,71 henry.

Różnica w wynikach, przytoczonych wyżej dwuch obliczeń, pochodzi od pewnej dowolności w wyborze spółczynnika μ.

Ze względu na zmienność spółczynnika μ w zależności od siły prądu magnesującego, wyznaczony tu spółczynnik samoindukcji może być stosowany tylko przy małych zmianach siły prądu.

ROZDZIAŁ IX.

Pole elektryczne, pojemność przewodników.

1. Ładunek elektryczny. [1]) O ładunku elektrycznym w elektrostatyce tworzymy sobie wyobrażenie, opierając się na wzorze Coulomb'a, wyrażającym siłę spółdziałania ładunków elektrycznych:

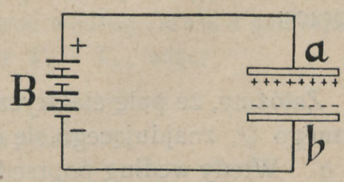
$$f = \frac{1}{\mathbf{k}} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}.$$

q_1 i q_2 są to wielkości charakteryzujące ciała naelektryzowane, zwane **ładunkami elektrycznemi**, f — siła oddziaływania jednego ciała na drugie, r — odległość pomiędzy ciałami o nieskończenie małych wymiarach, $\mathbf{k}$ — **zdolność elektryczna ośrodka**, w którym znajdują się te ciała.

O tem, że siła f działa wzdłuż prostej, łączącej ciała naelekryzowane i że wielkość jej jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości pomiędzy ciałami, przekonywamy się doświadczalnie.

Dowolnym zaś założeniem jest proporcjonalność siły f do ładunków elektrycznych, które w ten sposób ściśle określamy. Dowolnie również wprowadzony jest tu spółczynnik $\mathbf{k}$.

Można jednak powyższy wzór otrzymać inną drogą. Przedstawmy sobie, że ładujemy elektrycznością dwie płytki metalowe a i b, doprowadzając do nich prąd elektryczny z baterji B (rys. 77). Mierząc siłę prądu, możemy według wzorów rozdziału II wyznaczyć ilość elektryczności, która spływa na te płytki, a mierząc siłę ich przyciągania się, możemy sprawdzić, że siła ta, w granicach błędu pomiarów, jest proporcjonalna do ładunków elektrycznych, zebranych na tych płytkach. Można także przekonać się przez pomiar, że siła współdziałania ładunków, skupionych w poszczególnych punktach, jest odwrotnie proporcjonalna do kwadratu odległości tych punktów.



Rys. 77.

Wtedy powyższy wzór prawa Coulomb'a oparty będzie prawie wyłącznie na doświadczeniu, gdyż tylko wpływ ośrodka określimy dowolnie przez wielkość $\mathbf{k}$. [2])

---

[1]) Inaczej – ilość elektryczności.

[2]) Patrz szczegóły w rozdziale XXVII § 7.

2. Natężenie pola elektrycznego. Przestrzeń, w której na ładunek elektryczny działają siły elektryczne, nazywamy polem elektrycznym. Własności pola określamy wielkością, zwaną **natężeniem pola**. Natężenie pola elektrycznego określa stopień zmian elektrycznych w eterze.

Wzór dla natężenia pola **E** jest następujący:

$$\mathbf{E} = \frac{f}{q};$$

f oznacza siłę, działającą na ilość elektryczności q, umieszczoną w tym punkcie pola, w którym ma miejsce powyższe natężenie pola. Kierunek natężenia pola przyjmujemy za zgodny z kierunkiem siły działającej na ładunek dodatni.

W polu elektrycznym wokoło ładunku Q, skupionego w jednym punkcie, na odległości r od tego punktu, siła, działająca na ładunek q będzie, według wzoru Coulomb'a:

$$f = \frac{1}{\mathrm{k}} \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2},$$

a więc natężenie pola:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\mathrm{k}} \cdot \frac{Q}{r^2}.$$

Gdy mamy w polu dużo ładunków elektrycznych, wtedy natężenie pola w danym punkcie jest wypadkowe z natężeń pól od poszczególnych ładunków.

Natężenia dodają się wektorowo, tak jak siły w mechanice.

Linje, przeprowadzone w polu elektrycznym w ten sposób, że w każdym punkcie są one styczne do natężenia pola, nazywamy **linjami sił elektrycznych**.

W polu elektrycznym, wywołanym przez szereg ładunków, linje sił elektrycznych biegną od ładunków dodatnich do ujemnych.

3. Potencjał. Ładunek elektryczny q w polu elektrycznym o natężeniu **E** znajduje się pod wpływem siły:

$$\mathbf{E} \cdot q.$$

Gdy ładunek q przesunie się o dl na drodze, tworzącej z natężeniem pola **E** kąt α, wówczas, według zasad mechaniki, siła, działająca na ten ładunek, wykona pracę:

$$\mathbf{E} \cdot q \cdot dl \cdot \cos\alpha.$$

Załóżmy, że pole elektryczne powstało pod wpływem pewnego ładunku elektrycznego Q, znajdującego się w odległości r od tego miejsca, gdzie mamy ładunek q. Wtedy według poprzedniego paragrafu:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\mathrm{k}} \cdot \frac{Q}{r^2}.$$

A więc powyższa praca będzie:

$$\frac{1}{\mathrm{k}} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot q \cdot dl \cdot \cos\alpha.$$

Kierunek natężenia pola **E** jest zgodny w tym wypadku z kierunkiem r, więc

$dl \cdot \cos\alpha$ jest rzutem odcinka drogi dl na kierunek r. Rzut ten oznaczymy przez dr, a więc:

$$dl \cdot \cos\alpha = dr.$$

Wtedy powyższa praca będzie:

$$\frac{1}{k} \cdot \frac{Q}{r^2} \cdot q \cdot dr.$$

Jeżeli pole elektryczne powstało pod wpływem dowolnej liczby różnych ładunków Q, skupionych w poszczególnych punktach przestrzeni, to na ładunek q działać będzie kilka sił. Praca każdej z nich da się wyrazić takim wzorem, jak powyższy. Pracę, wykonaną przez wszystkie te siły, przy przesuwaniu ładunku q na drodze dl, oznaczymy przez dA. Jest ona sumą algebraiczną prac sił poszczególnych, więc może być wyrażona wzorem:

$$dA = \frac{1}{k} \cdot q \cdot \sum \frac{Q}{r^2} \cdot dr.$$

Załóżmy teraz, że ładunek q przesuwa się z punktu a do punktu b i że punkty te znajdują się w odległości skończonej jeden od drugiego, wtedy siły pola wykonają pracę:

$$A = \frac{1}{k} \cdot q \cdot \sum Q \int_a^b \frac{dr}{r^2}.$$

Oznaczmy odległości poszczególnych ładunków do punktu a przez r_a, a do punktu b przez r_b, wtedy, po rozwiązaniu całki otrzymamy: [1])

$$A = \frac{1}{k} \cdot q \cdot \sum Q \cdot \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right),$$

albo:

$$A = q \cdot \left(\frac{1}{k} \cdot \sum \frac{Q}{r_a} - \frac{1}{k} \cdot \sum \frac{Q}{r_b}\right).$$

Wyrazy $\frac{1}{k} \cdot \sum \frac{Q}{r_a}$ i $\frac{1}{k} \cdot \sum \frac{Q}{r_b}$ zależą jedynie od wielkości i rozkładu ładunków względem punktów a i b, określają więc one pewną własność tych punktów w polu elektrycznym, którą przyjęto nazywać według Gauss'a **potencjałem**.

Oznaczmy potencjały w punktach a i b przez V_a i V_b, więc:

$$V_a = \frac{1}{k} \cdot \sum \frac{Q}{r_a} \quad \text{i} \quad V_b = \frac{1}{r_b} \cdot \sum \frac{Q}{r_b}.$$

Wtedy otrzymamy:

$$A = q \cdot (V_a - V_b).$$

Wzór ten wskazuje, że, przy przesunięciu ładunku q w polu elektrycznym z punktu a, gdzie potencjał jest V_a do punktu b o potencjale V_b, siły pola

---

[1]) Dla ułatwienia zrozumienia przejścia do tego wzoru, przypominam, że:

$$d\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2} \cdot dr, \text{ a więc } \int \frac{dr}{r^2} = -\frac{1}{r}.$$

elektrycznego wykonają pracę, która wyraża się iloczynem tego ładunku przez różnicę potencjałów, w tych punktach, **niezależnie od drogi**, po której przesuwa się ładunek.

Wzór ten jest taki sam, jak podany poprzednio w rozdziale III przy omawianiu pracy prądu elektrycznego. Tam zdolność elektryczności do wykonania pracy nazywaliśmy potencjałem, tu potencjał pewnego punktu w polu elektrycznym możemy pojmować jako własność pola elektrycznego, określającą zdolność jego, jako układu sił elektrycznych, do wykonania pracy przy przesuwaniu w nim ładunku elektrycznego.

Są to dwa sposoby ujmowania tego samego pojęcia; drugi sposób jest ściślejszy.

Z powyższego wzoru wynika, że praca, którą wykonają siły pola, nie zależy od bezwzględnej wartości potencjału.

Praca ta zależy tylko od różnicy potencjałów w tych punktach, pomiędzy któremi przesuwa się ładunek elektryczny. Za pomocą pomiaru wyznaczyć możemy tylko różnicę potencjałów w dwuch punktach. [1]) Mając to na względzie, przyjęto określać wielkość potencjałów względem ziemi. Zwykle przyjmujemy, że **potencjał ziemi równa się wszędzie zeru.**

Jeżeli założymy w powyższym wzorze, że punkt b znajduje się na ziemi i że

$$V_b = 0,$$

otrzymamy wtedy wyraz pracy:

$$A = q \, . \, V_a,$$

stąd:

$$V_a = \frac{A}{q}.$$

Wzór ten wyraża, że potencjał w danym punkcie a liczbowo stanowi pracę, przypadającą na jednostkę ładunku elektrycznego, przy przenoszeniu tego ładunku z punktu a na ziemię.

Możemy jeszcze określić potencjał inaczej, korzystając z określenia, podanego w rozdziale III. Tam różnicę potencjałów nazwaliśmy napięciem. Jeżeli napięcie pomiędzy punktami a i b oznaczymy przez e, wtedy według powyższego określenia:

$$e = V_a - V_b.$$

Gdy punkt b znajduje się na ziemi, wówczas:

$$V_b = 0,$$

a więc:

$$V_a = e.$$

Wzór ten wskazuje, że potencjał w danym punkcie możemy określić jako **napięcie** pomiędzy tym punktem a ziemią.

W ten sposób należy rozumieć np. wielkość potencjałów w punktach A i B

---

[1]) Patrz rozdział XXX.

części obwodu elektrycznego (rys. 7 na str. 13), lub też wogóle w jakichkolwiek punktach na obwodach elektrycznych i zewnątrz tych obwodów.

W dowolnym polu elektrycznym, określonym wielkością natężenia pola **E** w każdym punkcie, zmianę potencjału można wyznaczyć, rozważając np. ruch ładunku elektrycznego q wzdłuż linji siły na drodze dl. Praca sił pola będzie wtedy:

$$\mathbf{E} \cdot q \cdot dl.$$

Oznaczmy przez V potencjał na początku drogi dl, a przez $V + dV$ potencjał w końcu tejże drogi dl, wtedy pracę możemy wyrazić przez różnicę potencjałów za pomocą wzoru:

$$[V - (V + dV)] \cdot q.$$

Ponieważ obadwa wzory powyższe są jednoznaczne, możemy napisać:

$$[V - (V + dV)] \cdot q = \mathbf{E} \cdot q \cdot dl,$$

stąd:

$$dV = -\mathbf{E} \cdot dl.$$

Gdy pole jest jednostajne [1]) i zamiast odcinka dl weźmiemy drogę l, a potencjały w końcu i na początku tej drogi oznaczymy przez V_2 i V_1, to, na zasadzie powyższego wzoru, otrzymamy:

$$V_1 - V_2 = \mathbf{E} \cdot l,$$

albo:

$$\mathbf{E} = \frac{V_1 - V_2}{l}.$$

4. **Przewodniki i izolatory.** Wszystkie ciała w przyrodzie pod względem własności elektrycznych mogą być rozważane, przy ustaleniu pojęcia o idealnych przewodnikach i idealnych izolatorach. W przyrodzie istnieją ciała bardzo zbliżone do przewodników idealnych, są to metale, natomiast nie znamy równie dobrych izolatorów; większość ciał w przyrodzie posiada cechy przewodników i izolatorów jednocześnie.

Własności przewodników są następujące: W przewodnikach elektryczność może poruszać się swobodnie. Doświadczenie wskazuje, że nadmiar elektryczności dodatniej lub ujemnej, powstający na przewodniku, w stanie statycznym, zbiera się zawsze tylko na powierzchni zewnętrznej przewodnika, a natężenie pola elektrycznego wewnątrz przewodników równa się zeru, t. j. $\mathbf{E} = 0$. Na powierzchni przewodnika kierunek natężenia pola jest prostopadły do tej powierzchni, gdybyśmy bowiem przypuścili, że tak nie jest, to ładunki poruszałyby się pod wpływem sił, wywołanych przez pole elektryczne.

Ze wzoru:

$$dV = -\mathbf{E} \cdot dl$$

widzimy, że przy $E = 0$, $dV = 0$, to znaczy, że potencjał przy przejściu z jedne-

---

[1]) Natężenie pola wszędzie jednakowe co do wielkości i kierunku.

go punktu do drugiego wewnątrz przewodników nie zmienia się, we wszystkich więc tych punktach jest on jednakowy.

Taki sam potencjał jak wewnątrz przewodników mamy i na powierzchni. Powierzchnia przewodnika jest więc **ekwipotencjalną**, t. j. posiada ona jednakowy potencjał we wszystkich swoich punktach.

Wszystkie te twierdzenia stosują się tylko do pola elektrycznego, gdzie ładunki są nieruchome.

W izolatorach idealnych ruch elektryczności odbywać się nie może. Dla wyjaśnienia jednak wielu zjawisk przypuszczamy, że izolator idealny składa się z bardzo drobnych cząsteczek, wewnątrz których ruch elektryczności odbywa się swobodnie, lecz z jednej cząsteczki do drugiej elektryczność przejść nie może.

Gdy izolator idealny znajduje się w polu elektrycznym, w każdej cząsteczce izolatora elektryczność dodatnia jest przesunięta w kierunku natężenia pola, a elektryczność ujemna w stronę przeciwną. Wtedy mówimy, że izolator jest **spolaryzowany**. Każda cząsteczka ma jakby dwa bieguny, t. j. powstaje w niej „biegunowość", inaczej „polaryzacja". [1])

Wiele ciał ma tę własność, że polaryzacja nie znika zaraz po usunięciu pola elektryzującego. Mając np. kilka płytek szklanych, ułożonych szczelnie i ustawionych prostopadle do kierunku natężenia pola, można przekonać się, że nawet po usunięciu pola elektryzującego, płytki nie łatwo dadzą się oderwać od siebie. Przyczynę tego łatwo wykryć, jeżeli płytki rozdzielimy i zbadamy ich powierzchnie. Na powierzchni wszystkich płytek znajdziemy wówczas ładunki elektryczne.

5. Potencjał przewodników. W zagadnieniach praktycznych mamy do czynienia z zespołem przewodników naelektryzowanych, rozdzielonych za pomocą izolatorów.

Gdy więc ładunki są w równowadze, to według powyższych wywodów potencjał na przewodniku jest wszędzie jednakowy. Jeśli mamy szereg przewodników izolowanych od siebie, to wogóle na każdym z nich będziemy mieli potencjały różne, jednak w przestrzeni objętej przez jeden przewodnik są one jednakowe. Wielkość tych potencjałów, według § 3, określi się wzorem:

$$V = \frac{1}{k} \cdot \sum \frac{Q}{r},$$

gdzie Q — ładunki w rozważanym polu, r — odległość tych ładunków do punktu, gdzie istnieje potencjał V, k — zdolność elektryczna ośrodka izolującego. Wzór ten wskazuje, że potencjał jest proporcjonalny do ładunków, znajdujących się w polu. Gdy wielkość ładunków, przy zachowaniu ich układu, będzie zwiększona kilkakrotnie, to tyleżkrotnie wzrośnie i potencjał. Spółczynniki proporcjonalności zależą tu tylko od zdolności elektrycznej ośrodka i układu geometrycznego przewodników, [2]) na których znajdują się ładunki.

6. Kondensatory. W praktyce najczęściej mamy do czynienia z układem, składającym się z dwuch izolowanych od siebie przewodników. Taki układ prze-

---

[1]) „Pôle" znaczy po francusku biegun.

[2]) t. j. od kształtu i położenia przewodników w przestrzeni. Jeżeli izolator nie jest jednorodny, to i układ różnych części izolatora ma wpływ na wielkość potencjałów

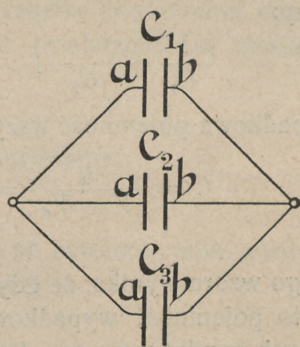
wodników nazywamy **kondensatorem**. Przewodniki te, czyli tak zwane okładki kondensatora, naładowują się zawsze ładunkami elektrycznemi jednakowemi, co do wielkości bezwzględnej, lecz różnemi, co do znaku, np. $+Q$ i $-Q$.

Gdy więc w ten sposób okładki są naładowane i potencjały na okładkach otrzymamy V_1 i V_2, to stosunek Q do $V_1 - V_2$ nazywamy **pojemnością** takiego zespołu przewodników. Pojemność zwykle oznaczamy przez C, więc:

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2}.$$

Gdy ilość elektryczności na obydwuch okładkach wzrasta jednocześnie w jednakowym stopniu, to i różnica potencjałów również wzrasta w tym samym stopniu. Widzieliśmy bowiem, że potencjały są proporcjonalne do ilości elektryczności. Stąd wniosek, że pojemność kondensatora jest wielkością stałą, zależną tylko od kształtu, wymiarów i względnego położenia dwuch powyższych przewodników, oraz od własności elektrycznych ośrodka izolującego.

Gdy mamy kilka kondensatorów połączonych równolegle (rys. 78), tak, że okładki a są połączone ze sobą i b również ze sobą, to na wszystkich okładkach a, stanowiących jeden przewodnik, istnieje jeden wspólny potencjał V_a, a na wszystkich okładkach b wspólny potencjał V_b.



Rys. 78.

Pojemność poszczególnych kondensatorów oznaczymy przez C_1, $C_2 \ldots . C_n$ i ładunki na każdej z okładek a lub b przez q_1, $q_2 \ldots . q_n$, wtedy:

$$C_1 = \frac{q_1}{V_a - V_b},$$

$$C_2 = \frac{q_2}{V_a - V_b},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$C_n = \frac{q_n}{V_a - V_b}.$$

Dodając te równania, otrzymamy:

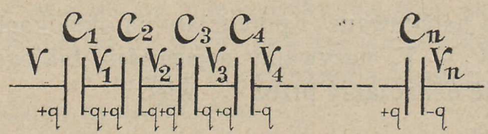
$$C_1 + C_2 \ldots . C_n = \frac{1}{V_a - V_b} \cdot \left(q_1 + q_2 \ldots . + q_n\right) = \frac{1}{V_a - V_b} \cdot Q,$$

gdzie Q jest ładunkiem całkowitym.

Pojemnością całego układu kondensatorów jest więc:

$$C = C_1 + C_2 + \ldots . + C_n.$$

Przy połączeniu szeregowym kondensatorów (rys. 79) należy mieć na względzie, że ładunki q na wszystkich okładkach są jednakowe; wynika to z następującego rozumowania. Gdy lewej okładce pierwszego kondensatora damy ładunek $+q$, to przez wpływ na prawej okładce pierwszego kondensatora powstanie ładunek $-q$, a wolny ładunek $+q$ przejdzie na lewą okładkę kondensatora drugiego i t. d. Potencjały na poszczególnych izolowanych od siebie przewodnikach będą różne, jak to wskazano na rysunku.



Rys. 79.

Równania dla poszczególnych kondensatorów są następujące:

$$C_1 = \frac{q}{V - V_1},$$

$$C_2 = \frac{q}{V_1 - V_2},$$

. . . .

$$C_n = \frac{q}{V_{n-1} - V_n}.$$

Dodając odwrotne wartości pojemności poszczególnych kondensatorów, otrzymamy:

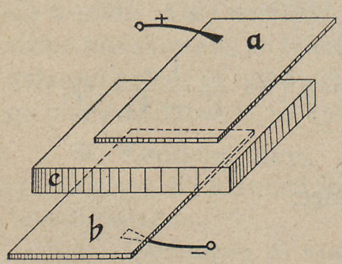
$$\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n} = \frac{1}{q} \cdot \left(V - V_n\right).$$

Wypadkowa pojemność wszystkich kondensatorów będzie:

$$C = \frac{q}{V - V_n} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}}.$$

Z tego wzoru wynika, że gdyby wszystkie kondensatory miały pojemność jednakową, to pojemność wypadkowa byłaby n razy mniejszą od pojemności poszczególnych kondensatorów. Pozatem ze stosunku którychkolwiek dwuch równań dla poszczególnych kondensatorów wypadnie, że napięcia na kondensatorach poszczególnych są odwrotnie proporcjonalne do pojemności.

7. Kondensator płaski. Opierając się na wzorze zasadniczym, podanym wyżej, pojemność kondensatora możemy wyrazić przez jego wymiary i zdolność elektryczną izolatora.

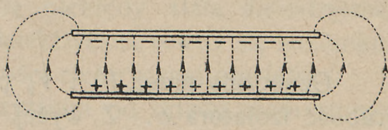


Rys. 80.

Dla przykładu wyprowadzimy wzór kondensatora płaskiego.

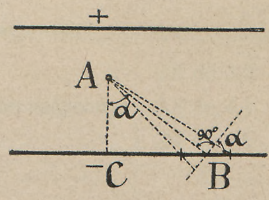
Kondensator taki składa się z dwuch płytek metalowych a i b (rys. 80) i izolatora c. Zakładamy, że izolator, do którego płytki przylegają szczelnie, jest bardzo cienki w porównaniu do sze-

rokości i długości płytek. W tych warunkach ładunki elektryczne znajdują się prawie wyłącznie na wewnętrznych powierzchniach płytek metalowych i pole pomiędzy płytkami jest prawie wszędzie jednostajne. Linje sił elektrycznych (rys. 81) są skierowane prostopadle do powierzchni płytek, tylko przy brzegach wyginają się nieco nazewnątrz.



Rys. 81.

Natężenie pola pomiędzy płytkami wyznaczymy w sposób następujący. Na jednej z płytek (rys. 82) rozważymy cząstkę powierzchni ds w punkcie B. Oznaczając gęstość ładunku elektrycznego przez σ, będziemy mieli na cząstce powierzchni ds ładunek $ds \,.\, \sigma$. Natężenie pola, wywołane przez ten ładunek w punkcie A, w odległości r od B, według poprzednio podanych wzorów będzie:



Rys. 82.

$$dE = \frac{1}{k} \cdot \frac{ds \,.\, \sigma}{r^2}.$$

Kierunek natężenia pola dE jest zgodny z kierunkiem $\overline{AB}$.

Przedstawmy sobie kulę, zakreśloną promieniem r z punktu A, i stożek o podstawie ds z wierzchołkiem, znajdującym się w punkcie A. Stożek ten wyznaczy na powierzchni kuli cząstkę powierzchni ds', prostopadłą do r. Z rysunku widzimy, że gdy cząstki powierzchni są nieskończenie małe, to:

$$ds' = ds \,.\, \cos\alpha.$$

Oznaczając przez $d\omega$ kąt bryłowy stożka, otrzymamy:

$$ds' = d\omega \,.\, r^2.$$

Wprowadźmy powyższe zależności do wzoru na natężenie pola, wtedy:

$$dE = \frac{1}{k} \cdot \frac{\sigma \,.\, d\omega}{\cos\alpha}.$$

Mnożąc dE przez $\cos\alpha$, otrzymamy rzut natężenia pola dE na kierunek $\overline{AC}$

$$dE \,.\, \cos\alpha = \frac{1}{k} \,.\, \sigma \,.\, d\omega.$$

Natężenie pola wypadkowe, wywołane przez ładunek dolnej płytki jest sumą takich rzutów przy uwzględnieniu całej płytki.

Gdy odległość AC jest bardzo mała w porównaniu do szerokości i długości płytki, to

$$\int dE \,.\, \cos\alpha = \frac{1}{k} \,.\, \sigma \,.\, \int d\omega = \frac{1}{k} \,.\, \sigma \,.\, 2\pi.$$

Całkowite natężenie pola w punkcie A powstałe od ładunków, skupionych na obydwuch płytkach: górnej i dolnej, jest dwa razy większe, ponieważ jedna z płytek ma ładunek dodatni, a druga ujemny, kierunek zaś natężenia pola jest

zgodny z kierunkiem siły, działającej na ładunek dodatni, umieszczony w tym punkcie, gdzie rozważamy natężenie pola.

A więc:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\mathbf{k}} \cdot 4\pi \cdot \sigma .$$

Oznaczmy przez V_1 i V_2 potencjały okładek a i b kondensatora, a przez d grubość izolatora c. Z wyżej podanych wzorów dla różnicy potencjałów wiemy, że:

$$V_1 - V_2 = \mathbf{E} \cdot d .$$

Oznaczając przez Q ilość elektryczności na każdej z okładek kondensatora, a przez S powierzchnię każdej płytki, przylegającą do izolatora c, będziemy mieli:

$$Q = \sigma \cdot S ,$$

$$V_1 - V_2 = \frac{1}{\mathbf{k}} \cdot 4\pi \cdot \frac{Q}{S} \cdot d .$$

i

$$\frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{S \cdot \mathbf{k}}{4\pi \cdot d} ,$$

albo, oznaczając pojemność przez C, otrzymamy:

$$C = \frac{S \cdot \mathbf{k}}{4\pi \cdot d} .$$

W układzie jednostek bezwzględnych elektrostatycznych przyjmujemy zdolność elektryczną powietrza za jednostkę oderwaną, **k** więc wyraża zdolność elektryczną ośrodka względem powietrza.

Gdy w powyższym wzorze zastosujemy jednostki bezwzględne elektrostatyczne, to wyrazimy S w cm^2, a d w *cm*, [1]) i otrzymamy pojemność w *cm*.

Chcąc przejść do jednostek praktycznych współrzędnych kulombom i woltom, należy powyższą liczbę, wyrażającą pojemność, podzielić przez 9.10^{11}, otrzymamy wtedy pojemność w jednostkach praktycznych, które nazywamy **faradami**.

Częściej jednak mierzymy pojemność w **mikrofaradach**, czyli w częściach milionowych farada. Dzieląc liczbę, wyrażającą pojemność w jednostkach bezwzględnych elektrostatycznych, przez 9.10^5, otrzymamy liczbę, wyrażającą tę pojemność w mikrofaradach.

Przykład. Z dwuch stron cienkiej szyby szklanej mamy dwa arkusze cynfolji, szczelnie przylegające do szkła. Wymiary cynfolji są: 20 *cm* × 20 *cm*. Grubość szkła 2 *mm*. Zdolność elektryczna szkła w stosunku do powietrza — 5.

Pojemność takiego kondensatora będzie:

$$C = \frac{400 \cdot 5}{4\pi \cdot 0{,}2} = 797 \; cm ,$$

lub:

$$C = \frac{797}{9 \cdot 10^5} = 0{,}000885 \text{ mikrofarada.}$$

---

[1]) Patrz rozdział XXVII § 6.

8. Zdolność elektrycza izolatorów. Ze wzoru dla pojemności kondensatora widzimy, że pojemność jest proporcjonalna do wielkości stałej **k**, określającej własności izolatora, zwanej zdolnością elektryczną, którą wyznaczamy zwykle względem powietrza. Spółczynnik **k** nazywa się niekiedy **stałą dielektryczną**. Ściślej jednak, według prof. Witkowskiego, stała dielektryczna równa się stosunkowi zdolności elektrycznej danego ośrodka do zdolności elektrycznej powietrza.

Wartość stałej dielektrycznej zależy przedewszystkim od składu chemicznego izolatora. W przytoczonej poniżej tablicy podaję kilka liczb, najczęściej stosowanych.

Stała dielektryczna, t. j. stosunek zdolności elektrycznej danego ośrodka do zdolności elektrycznej powietrza: [1])

Nafta	2 do 2,2	Siarka	2,5 do 3,9
Olej parafinowy	2 do 2,5	Izolacja kablowa (papier nasycony)	3,5 do 4,3
Terpentyna	2 do 2,3	Papier twardy	3,4 do 4,5
Olej transformatorowy	2 do 2,3	Kalafonja	2,5
Porcelana	4,4 do 5,4	Gutaperka	4,2
Parafina	2 do 2,3	Kauczuk wulkanizowany . . .	2,5 do 3
Papier	1,8 do 2,8	Guma twarda	2 do 3
Mika	4.7 do 6,7	Szellak	2,7 do 3,5
Mikanit	4,5 do 5,5	Szkło	3 do 9,1

Wszystkie ciała posiadają zdolność elektryczną większą od zdolności elektrycznej eteru. Zdolność elektryczna powietrza, wymierzona względem eteru, wynosi 1,00059; różni się więc ona od zdolności eteru bardzo mało.

Dla wielu ciał w tablicy podane są dwie liczby, wskazujące granice wartości **k**, otrzymane przy różnych badaniach; znaczne różnice wartości **k** dla tego samego materjału wywołane są głównie przez różnice w składzie materjałów, poddanych próbom i zanieczyszczeniami w ciałach prostych.

Należy jeszcze zwrócić uwagę na to, że zdolność elektryczna posiada wiele cech podobnych do przenikliwości magnetycznej i, chociaż nie w tak znacznym stopniu, jest jednak w wielu wypadkach wielkością zmienną, zależną od napięcia elektrycznego pomiędzy okładkami kondensatora i od czasu połączenia kondensatora ze źródłem elektryczności. W nieznacznym stopniu zależy od napięcia zdolność elektryczna np. powietrza, czystej miki i parafiny. Natomiast w większości ciał innych zmienia się ona w dość znacznych granicach.

Izolatory posiadają nadto własność ładunku szczątkowego i histerezy dielektrycznej, która ma wiele cech wspólnych z histerezą magnetyczną.

Znaczenie w praktyce histerezy dielektrycznej ogranicza się jednak tylko do napięć bardzo wysokich, wynoszących dziesiątki i setki tysięcy woltów. Najważniejszym wówczas zjawiskiem jest wywiązywanie się w izolatorach ciepła wskutek

[1]) Według tablicy podanej w książce W. Petersen'a „Hochspannungs-Technik".

histerezy dielektrycznej, w sposób podobny do opisanego dla histerezy magnetycznej w rozdziale XXIII.

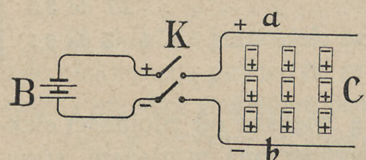
Bardzo ważne znaczenie praktyczne ma jeszcze zdolność elektryczna przy rozważaniu warunków wytrzymałości elektrycznej izolatorów na przebicie prądem. Czynnikiem, wywołującym przebicie izolatora, jest natężenie pola elektrycznego w tym izolatorze.

W § 7 widzieliśmy, że natężenie pola pomiędzy płytkami płaskiego kondensatora wyraża się wzorem:

$$E = \frac{1}{k} \cdot 4\pi \cdot \sigma.$$

Wzór ten wskazuje, że natężenie pola jest odwrotnie proporcjonalne do zdolności elektrycznej ośrodka. Jeżeli rozważymy np. kondensatory połączone w szereg (rys. 79), zakładając, że powierzchnie płytek dla wszystkich kondensatorów są jednakowe, to natężenia pól w izolatorach tych kondensatorów będą odwrotnie proporcjonalne do zdolności elektrycznych tych izolatorów. Ten więc izolator, którego zdolność elektryczna jest największa, podlegać będzie najsłabszemu naprężeniu elektrycznemu.

9. Kondensator w obwodzie prądu. Prądy elektryczne powstają nietylko w przewodnikach, lecz także w izolatorach. Połączmy baterję B (rys. 83) za pomocą wyłącznika K z przewodnikami a i b, które nie tworzą obwodu zamkniętego, ponieważ są odosobnione jeden od drugiego za pomocą izolatora.



Rys. 83.

Przy takim układzie przewodniki a i b, które dotychczas były elektrycznie obojętne, naelektryzują się do tego samego stanu, w jakim znajdują się końcówki baterji B. [1]) W izolatorze zaś pomiędzy przewodnikami powstanie pole elektryczne. Ładunki elektryczne zbiorą się na przewodnikach a i b i, według naszego pojęcia o polaryzacji dielektrycznej, na przeciwnych krańcach poszczególnych cząsteczek izolatora.

Taki układ ładunków może nastąpić tylko przez przesuwanie się ich zarówno po przewodnikach a i b jak i wewnątrz izolatora, ponieważ przed połączeniem baterji z przewodnikami a i b, przewodniki te i izolator między nimi były elektrycznie obojętne.

Przesuwanie się ładunków elektrycznych stanowi prąd elektryczny, możemy więc twierdzić, że mieliśmy tu chwilowy prąd elektryczny w obwodzie kołowym $acbBa$, którego część stanowi izolator. Rozumując w ten sposób, mówimy o prądach chwilowych w izolatorze doskonałym.

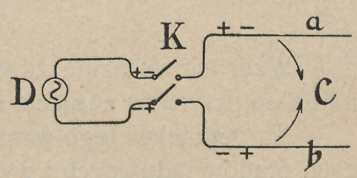
Umieszczając zamiast baterji galwanicznej prądnicę (dynamomaszynę), wytwarzającą zmienną siłę elektromotoryczną (rys. 84a), możemy otrzymać w takim

---

[1]) Gdy ładunki elektryczne będą w równowadze, na całym górnym przewodniku, połączonym z baterją, będziemy mieli pewien potencjał wszędzie jednakowy, a na przewodniku dolnym inny, lecz również wszędzie jednakowy.

obwodzie prąd ciągły, zmienny. Przy zamkniętym wyłączniku K prąd ten będzie przebiegał po drodze $aCbDa$, której część stanowi izolator aCb.

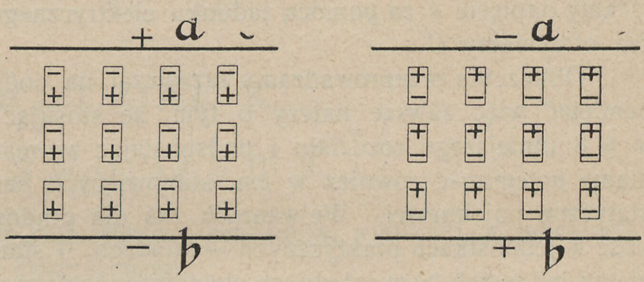
Powstawanie takiego prądu tłómaczy się tem, że bieguny źródła prądu zmieniają ustawicznie swój znak, przez co zmienia się znak ładunków na przewodnikach ab i układ ładunków w cząsteczkach izolatora.



Rys. 84a.

Na rys. 84b pokazane jest zestawienie tych dwuch układów; przejście od jednego do drugiego może odbyć się tylko przez ruch elektryczności. Ponieważ takie zmiany trwają ciągle, przeto również ciągle trwa ruch tych ładunków to w jedną, to w drugą stronę.

Siłę, powstającego w tych warunkach, prądu elektrycznego określamy przez przyrost w jednostce czasu ilości elektryczności, która zbiera się na przewodnikach a i b. Jeżeli przez q oznaczymy ilość elektryczności, istniejęcą na każdym z przewodników a i b w chwili t, to siła prądu wyrazi się liczbowo przez przyrost tego ładunku w jednostce czasu. Gdy więc w ciągu czasu dt przyrost ilości elektryczności wynosi dq_t, to ilość ta przepływa w tym czasie przez przewody i siła prądu w chwili t jest: [1])



Rys. 84b.

$$i_t = \frac{dq_t}{dt} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

Ilość elektryczności, zbierająca się na przewodnikach, jest w każdej chwili proporcjonalna do różnicy potencjałów, czyli do napięcia e pomiędzy temi przewodnikami, przeto:

$$q_t = C \cdot e_t, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

gdzie C stanowi stały spółczynnik, zależny od wielkości i kształtu przewodników a i b, od ich położenia względem siebie i od rodzaju izolatora pomiędzy nimi.

Spółczynnik C jest oczywiście pojemnością zespołu dwuch przewodników a i b, które wspólnie stanowią **kondensator**.

Z równania (2) wynika, że

$$C = \frac{q_t}{e_t} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3)$$

Jeżeli q wyrażamy w kulombach, a e w woltach, to C otrzymamy w **faradach**.

Gdy do przewodników a i b przypłynie ilość elektryczności dq, to napięcie podniesie się o de.

---

[1]) Patrz Rozdział II.

Przez różniczkowanie wzoru (2) otrzymujemy:

$$d q_t = C \cdot d e_t .$$

Podstawiając ten wyraz dla dq_t we wzór (1), znajdziemy prąd w chwili t:

$$i_t = C \cdot \frac{d e_t}{dt} .$$

Wzór ten wskazuje, że siła prądu, płynącego przez kondensator, jest proporcjonalna do przyrostu napięcia na kondensatorze w jednostce czasu.

Na podstawie tego wzoru możemy rozwiązać cały szereg zagadnień, dotyczących prądów ładujących i wyładowujących kondensatory, a to stosownie do tego czy napięcie wzrasta, czy też maleje. Uczynimy to w innym miejscu, tu zaś zastanowimy się jeszcze nad samym pojęciem pojemności.

Wzory, służące do obliczenia pojemności na podstawie danego układu przewodników, opierają się na wzorze (3). Ażeby otrzymać wzór dla pojemności, wyrażamy napięcie e za pomocą ładunku elektrycznego q; dzieląc q przez ten wyraz, otrzymamy C.

Obliczenia przeprowadzamy zazwyczaj na podstawie wzorów elektrostatyki, pamiętać więc zawsze należy o tym, że stosując stałe dielektryczne, podane w § 8 niniejszego rozdziału i podstawiając wymiary kondensatora w *cm*, otrzymamy pojemność również w *cm*, stanowiących bezwzględne jednostki elektrostatyczne pojemności. We wzorach zaś dla prądów należy wprowadzać pojemność w jednostkach praktycznych — faradach, [1]) stanowiących wielokrotność dziesiętną jednostek bezwzględnych elektromagnetycznych.

---

[1]) Patrz Rozdział XXVII § 6.

CZĘŚĆ III.

Prawa przepływu prądów w obwodach elektrycznych.

ROZDZIAŁ X.

Prawo Ohma.

W rozdziałach poprzednich rozważaliśmy cały szereg wielkości, stosowanych przy określeniu zjawiska prądu elektrycznego.

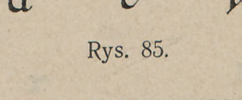
Własności samego prądu elektrycznego wyraziliśmy za pomocą siły prądu i; czynniki wpływające na rozmaite przemiany energji, zachodzące w obwodzie prądu w tę lub w ową stronę, określone zostały przez napięcie e i siłę elektromotoryczną E; wreszcie własności obowodu, po którym prąd przebiega przez opór omiczny r, spółczynnik samoindukcji L i pojemność C.

Obecnie wyprowadzimy szereg związków, jakie istnieją pomiędzy temi poszczególnemi wielkościami.

Związki te wyrażają się rozmaicie, zależnie od własności prądu i obwodu, a także stosownie do tego, jakie wartości prądu — chwilowe, czynne, lub stałe — wprowadzone będą do wzorów.

Różne wzory, przedstawiające siłę prądu i w zależności od wielkości e, E, r, L i C, przyjęto w elektrotechnice nazywać wyrażeniami **prawa Ohma**.

1. Pojedyńczy przewodnik z oporem omicznym. Najprostszy przypadek jest następujący. Rozważmy część obwodu zamkniętego (rys. 85), po którym w danej chwili przebiega prąd i_t. Żadne siły elektromotoryczne w przewodniku nie istnieją, posiada on jednak pewien opór omiczny r.



Rys. 85.

W tych warunkach praca prądu wytwarza ciepło Joule'a. Z rozdziału V wiemy, że moc równoważna ilości ciepła, która wytwarza się w przewodniku skutkiem pracy prądu w jednostce czasu, jest:

$$i_t^2 \, . \, r \, .$$

Moc prądu dla rozważanej szęści obwodu, jak wiemy z rozdziała III, wyraża się wzorem:

$$e_t \,.\, i_t .$$

e_t — jest to różnica potencjałów pomiędzy końcami przewodnika czyli napięcie w chwili t.

Ponieważ moc prądu wytwarza w tym razie ciepło, więc:

$$e_t \,.\, i_t = i_t^2 \,.\, r .$$

Z powyższego wzoru wynika bezpośrednio, że:

$$i_t = \frac{e_t}{r} .$$

Wzór ten jest najprostszą postacią **prawa Ohma.**

W rozważanym przypadku siła prądu zależy tylko od napięcia na końcach przewodnika i od oporu, istniejącego pomiędzy temi punktami, na których działa powyższe napięcie. Wzór prawa Ohma piszemy nieraz w innej postaci:

$$e_t = i_t \,.\, r .$$

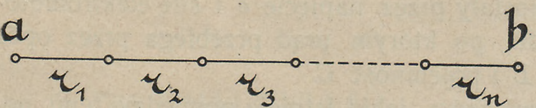
Wprowadzając, zamiast oporu, przewodnictwo k i mając na uwadze, że:

$$k = \frac{1}{r} ,$$

możemy napisać:

$$i_t = k \,.\, e_t .$$

2. **Kilka przewodników połączonych w szereg.** Gdy pomiędzy punktami a i b mamy nie jeden przewodnik, lecz większą ich liczbę o oporach r_1, r_2, $r_3 \ldots . r_n$ i wszystkie te przewodniki, jak wskazuje rys. 86, połączone są w **szereg**, to doświadczenie poucza, że siła prądu w każdym oporze jest jednakowa.



Rys. 86.

Cała moc prądu wytwarza w tych przewodnikach ciepło, będziemy więc mogli napisać równanie:

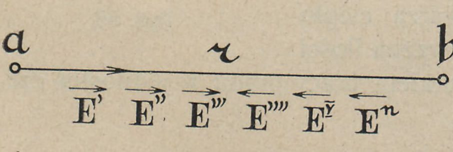
$$e_t \,.\, i_t = \Sigma\, i_t^2 \,.\, r = i_t^2 \,.\, \Sigma\, r ,$$

a przeto:

$$i_t = \frac{e_t}{\Sigma\, r} .$$

Z tego wzoru wynika, że **opór wypadkowy przewodników, połączonych w szereg, równa się sumie oporów przewodników poszczególnych.**

3. **Przewodnik z siłami elektromotorycznemi.** Rozważmy jeszcze przewodnik, stanowiący część ab obwodu zamkniętego. Opór omiczny przewodnika ab jest r. W przewodniku działa szereg sił elektromotorycznych, skierowanych w różne strony; wielkości tych sił elektromotorycznych w danej chwili oznaczymy przez E_t', E_t'', $E_t''' \ldots . E_t^n$.



Rys. 87.

W obwodzie przebiega prąd, którego siła w danej chwili jest i_t a pomiędzy punktami a i b istnieje napięcie $e_t = V_a - V_b$, gdy V_a i V_b są potencjałami w punktach a i b. Prąd płynie tu od a do b.

Moc prądu, równoważną wytwarzającej się w jednostce czasu ilości ciepła Joule'a, wyrażamy wzorem:

$$i_t^2 \cdot r.$$

Według określenia podanego w rozdziale IV, siły elektromotoryczne, skierowane wbrew prądowi, sprawiają wytwarzanie się energji w pewnej postaci. Moc, równoważna ilości energji, która powstaje w jednostce czasu, równa się według określenia, podanego w rozdziale IV,:

$$\Sigma_1 E_t \cdot i_t.$$

Zaznaczyć należy, że znakiem sumy obejmujemy tylko siły elektromotoryczne, skierowane wbrew prądowi.

Siły elektromotoryczne o kierunku zgodnym z prądem, sprawiają pochłanianie energji przez obwód elektryczny i moc, równoważna ilości energji pochłoniętej w jednostce czasu, będzie:

$$\Sigma_2 E_t \cdot i_t.$$

W tym przypadku znakiem sumy obejmujemy tylko siły elektromotoryczne, skierowane zgodnie z prądem. Dodając algebraicznie powyższe trzy wyrazy, otrzymamy:

$$i_t^2 \cdot r + \Sigma_1 E_t \cdot i_t - \Sigma_2 E_t \cdot i_t.$$

Za dodatnią przyjęliśmy w tym równaniu moc, która odpowiada energji otrzymanej z obwodu.

Energję otrzymujemy z obwodu skutkiem pracy prądu, moc prądu równoważną energji, otrzymanej w jednostce czasu, wyrażamy wzorem: [1])

$$e_t \cdot i_t.$$

Na podstawie zasady zachowania energji, możemy napisać:

$$e_t \cdot i_t = i_t^2 \cdot r + \Sigma_1 E_t \cdot i_t - \Sigma_2 E_t \cdot i_t.$$

Wzór ten można przedstawić prościej, wstawiając za znakiem sumy siły elektromotoryczne z właściwemi znakami, a więc ze znakiem (+), gdy kierunek siły elektromotorycznej jest zgodny z prądem i ze znakiem (—), gdy jest mu przeciwny. Otrzymamy wtedy:

$$e_t \cdot i_t = i_t^2 \cdot r - \Sigma E_t \cdot i_t,$$

albo:

$$i_t^2 \cdot r = (e_t + \Sigma E_t) \cdot i_t,$$

skąd:

$$i_t = \frac{e_t + \Sigma E_t}{r},$$

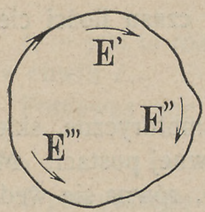
albo:

$$e_t = i_t \cdot r - \Sigma E_t.$$

---

[1]) Patrz Rozdział III.

4. Obwód zamknięty. Inną jeszcze postać przybiera prawo Ohma, gdy rozważamy całkowity obwód zamknięty. Wtedy o przemianach energji rozstrzygać będą tylko siły elektromotoryczne i opór omiczny obwodu R (rys. 88).



Rys. 88.

W przypadku całkowitego obwodu zamkniętego, wywody nasze możemy oprzeć na tej zasadzie, że energja pochłonięta przez obwód równa się energji wytworzonej w nim. Moc równoważna energji, pochłoniętej w jednostce czasu, jest:

$$\Sigma_1 E_t \,.\, i_t,$$

gdzie znakiem sumy objęte są tylko siły elektromotoryczne, zgodne co do kierunku z prądem.

Moc równoważna energji, wytworzonej w jednostce czasu, równa się:

$$i_t^2 \,.\, R + \Sigma_2 E_t \,.\, i_t.$$

Znak sumy obejmuje tu tylko siły elektromotoryczne o kierunku odwrotnym względem prądu.

Według zasady zachowania energji, moc pochłonięta równa się mocy wytworzonej, przeto:

$$\Sigma_1 E_t \,.\, i_t = i_t^2 \,.\, R + \Sigma_2 E_t \,.\, i_t.$$

Rozumując jak w § poprzednim, napiszemy prościej:

$$i_t^2 \,.\, R = \Sigma_t E_t \,.\, i_t,$$

skąd:

$$i_t = \frac{\Sigma E_t}{R}.$$

Opór R składa się z oporów poszczególnych części obwodu. Według § 2 niniejszego rozdziału, opór wypadkowy równa się sumie oporów składowych. Oznaczmy opory składowe przez r_1, r_2, ... r_n, wtedy:

$$R = \Sigma r.$$

Podstawiając wyraz dla R we wzór prawa Ohma, otrzymamy:

$$i_t = \frac{\Sigma E_t}{\Sigma r}.$$

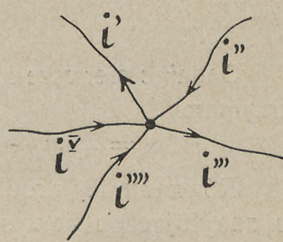
Prawo to wyrazić można w sposób następujący: **w obwodzie zamkniętym siła prądu w danej chwili równa się ilorazowi sumy algebraicznej wszystkich sił elektromotorycznych, czynnych w tym obwodzie, przez sumę wszystkich oporów omicznych, stanowiących części składowe obwodu zamkniętego.**

ROZDZIAŁ XI.

Prawa Kirchhoffa.

Oprócz prawa Ohma mamy jeszcze dwa prawa Kirchhoffa, rządzące prądami w obwodach rozgałęzionych.

1. **Pierwsze prawo Kirchhoffa** opiera się na doświadczeniu. W kilku prądach, schodzących się w jednym punkcie (rys. 89) ilość elektryczności, przypływająca w każdej chwili do tego punktu w jednostce czasu, równa się ilości elektryczności, odpływającej z tegoż punktu w tymże czasie.



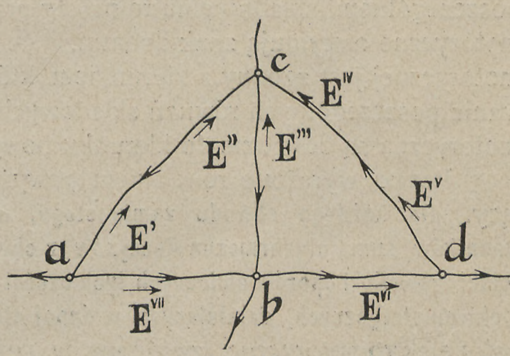
Rys. 89.

Uwzględniając określenie ilości elektryczności, podane w rozdziale II, możemy wyrazić powyższe prawo za pomocą bardzo prostego wzoru:

$$\Sigma\, i_t = 0\,.$$

Znak sumy obejmuje prądy, przypływające z pewnym znakiem, a odpływające ze znakiem odwrotnym. Prawo to daje się w krótkości wypowiedzieć w sposób następujący: **suma algebraiczna prądów, schodzących się w danej chwili w jednym punkcie, równa się zeru.**

2. **Drugie prawo Kirchhoffa** stanowi wynik matematyczny prawa Ohma. Rozważmy sieć przewodników, połączonych ze sobą w punktach skrzyżowania (rys. 90). W częściach obwodu pomiędzy dwoma punktami skrzyżowania płynie na całej długości jeden i ten sam prąd, natomiast w różnych częściach są prądy różne.



Rys. 90.

Przypuśćmy, że we wszystkich częściach obwodu działają siły elektromotoryczne; gdyby siły te gdziekolwiek nie powstały, to w równaniach, zamiast litery E, należałoby napisać zero. Na rysunku siły elektromotoryczne są oznaczone lirerami E', E'' i t. d. Kierunki tych sił wskazane są za pomocą strzałek obok przewodników.

We wzystkich częściach obwodu płyną prądy, których kierunki oznaczono na rysunku strzałkami na przewodnikach. Siły prądów w równaniach oznaczać będziemy przez i_1, i_2, i_3 i t. d., a opory omiczne odpowiednich poszczególnych części obwodu przez r_1, r_2, r_3 i t. d.

Wybierzmy dowolny obwód zamknięty, np. *abca*. Według prawa Ohma (patrz rozdział X § 3) dla każdej części obwodu, zawierającej siły elektromotoryczne, mamy zależność:

$$e_t = i_t \cdot r - \Sigma E_t.$$

Napięcie możemy wyrazić, jako różnicę potencjałów:

$$e_t = V_t' - V_t''.$$

V_t' oznacza potencyał na tym końcu części obwodu, gdzie prąd wchodzi, a V_t'' — na tym końcu, skąd prąd wychodzi.

Według prawa Ohma napiszmy równania kolejno dla wszystkich części obwodu zamkniętego *abca*. Napięcia wyrażać będziemy przez różnice potencjałów, które oznaczymy literami V z odpowiednimi znaczkami:

$$V_{at} - V_{bt} = i_{t1} \cdot r_1 - E_t^{VII}$$
$$V_{ct} - V_{bt} = i_{t2} \cdot r_2 + E_t'''$$
$$V_{ct} - V_{at} = i_{t3} \cdot r_3 + E_t' + E_t''.$$

Dodając pierwsze równanie do trzeciego, a odejmując od tej sumy drugie, otrzymamy:

$$0 = i_{t1} \cdot r - i_{t2} \cdot r_2 + i_{t3} \cdot r_3 + E_t^{I} + E_t'' - E_t''' - E_t^{VII}.$$

Równanie tego rodzaju otrzymać możemy dla dowolnego obwodu zamkniętego, znajdującego się w sieci przewodników rozgałęzionych. Ogólna postać takiego równania jest następująca:

$$\Sigma i_t \cdot r - \Sigma E_t = 0$$

albo:

$$\Sigma i_t \cdot r = \Sigma E_t.$$

Co się tyczy znaków, jakie trzeba zastosować w równaniu powyższem przed poszczególnemi składnikami, to należy przestrzegać zasadę, że prądy i siły elektromotoryczne otrzymują znak dodatni, o ile kierunek tego prądu lub tej siły elektromotorycznej jest zgodny z kierunkiem, który zachowaliśmy przy porządku wypisywania poszczególnych równań składowych, a zaś ujemny, gdy prąd lub siła elektromotoryczna są odwrotne do kierunku powyższego.

Prawo, wyrażone równaniem powyższym, wypowiadamy w sposób następujący: **dla każdego obwodu zamkniętego, istniejącego w sieci krzyżujących się przewodników, suma algebraiczna iloczynów z chwilowych sił prądów, w poszczególnych częściach obwodu i oporów omicznych tych części równa się sumie algebraicznej wszystkich sił elektromotorycznych, działających w danej chwili w tymże obwodzie zamkniętym.** Prądy i siły elektromotoryczne, zwrócone w pewnym kierunku, przyjętym przy obiegu wokoło obwodu zamkniętego, otrzymują w równaniu znak dodatni, zwrócone zaś w stronę odwrotną — znak ujemny.

ROZDZIAŁ XII.

Prawa Ohma i Kirchhoffa dla prądów stałych.

Prądy stałe są niezmienne w czasie, a siła ich na całej długości przewodnika nierozgałęzionego jest jedna i ta sama; wszystkie więc, poprzednio wyprowadzone wzory, mogą być zastosowane wprost do prądów stałych, przyczem znaczki t można opuścić, ponieważ odpowiednie wielkości są niezmienne w czasie.

Dla przypomnienia zestawimy wzory praw zasadniczych.

Prawo Ohma:

rys. 85 . . . . $i = \frac{e}{r}$, ... (1)

rys. 86 . . . . $i = \frac{e}{\Sigma r}$, ... (2)

rys. 87 . . . . $i = \frac{e + \Sigma E}{r}$, ... (3)

rys. 88 . . . . $i = \frac{\Sigma E}{\Sigma r}$ . . . . (4)

Prawa Kirchhoffa:

według prawa pierwszego:

$\Sigma i = o$, ... (5)

według prawa drugiego:

$\Sigma i . r = \Sigma E$. . . . . (6)

Chcąc ułatwić zastosowanie tych praw w praktyce, podaję niżej szereg przykładów.

1. **Opór pojedyńczy.** Obliczyć siłę prądu w napowietrznym przewodniku tramwajowym o przekroju 50 mm^2, przy spadku napięcia, wynoszącym 12 woltów na długości jednego kilometra.

Dla rozwiązania tego zagadnienia znajdziemy przedewszystkim, na podstawie wzoru podanego w rozdziale V, opór drutu. Opór właściwy drutów tramwajowych, wyrabianych z miedzi, przyjmiemy $\frac{1}{57}$.

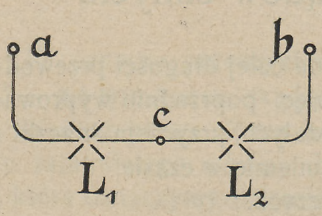
Przy przekroju 50 mm^2 opór takiego drutu wyniesie:

$$\frac{1}{57} \cdot \frac{1000}{50} = 0{,}351\ \Omega .$$

Spadek napięcia na długości jednego kilometra stanowi 12 woltów, to znaczy, że różnica potencjałów pomiędzy dwoma punktami drutu, znajdującemi się na odległości jednego kilometra, wynosi 12 woltów; wobec tego prąd obliczyć należy na podstawie równania (1) prawa Ohma:

$$i = \frac{12}{0,351} = 34,2 \text{ ampera.}$$

2. **Dwa opory połączone w szereg.** Obwód składa się z dwuch lampek żarowych L_1 i L_2 (rys. 91); lampka L_1 ma nitkę węglową, której opór wynosi 200 Ω, lampka zaś L_2 posiada nitkę metalową o oporze 750 Ω. Napięcie pomiędzy punktami *a* i *b* równa się 220 woltom. Należy określić prąd, przepływający przez lampki, i napięcie, istniejące na poszczególnych lampkach, t. j. między punktami *a* i *c* i *c* i *b*.



Rys. 91.

Stosując wzór (2) prawa Ohma, znajdziemy: [1])

$$i = \frac{220}{200 + 750} = 0,2315 \text{ amp.}$$

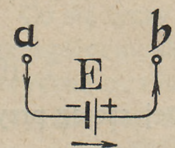
Po przekształceniu wzoru (1) otrzymamy:

$$e = i \,.\, r.$$

Zastosujmy ten wzór do poszczególnych części obwodu. Oznaczmy napięcie pomiędzy punktami *a* i *c*, przez e_1, a pomiędzy punktami *c* i *b* przez e_2; mając na uwadze, że prąd w obwodzie nierozgałęzionym jest wszędzie ten sam, otrzymamy:

$$e_1 = 0,2315 \,.\, 200 = 46,3 \; V.$$
$$e_2 = 0,2315 \,.\, 750 = 173,7 \; V.$$

3. **Przewodnik, w którym kierunek siły elektromotorycznej jest zgodny z kierunkiem prądu.** Pomiędzy końcówkami *a* i *b* (rys. 92) mamy napięcie 6 woltów, powstające pod wpływem szeregu sił elektromotorycznych, z których jedną mamy w cząstce obwodu *ab*. Przyjmujemy końcówkę *a* za dodatnią a *b* za ujemną, t. j. że w *a* potencjał jest wyższy, a w *b* niższy. Napięcie więc zwrócone jest od *a* do *b*, ponieważ dodatni kierunek napięcia zawsze przyjmujemy [2]) od tego miejsca, gdzie potencjał jest wyższy, do tego miejsca, gdzie potencjał — niższy. Siła elektromotoryczna ogniwa galwanicznego, włączonego pomiędzy końcówkami *a* i *b*, wynosi 1,5 wolta i jest zwrócona od *a* do *b*, a całkowity opór cząstki obwodu *ab* — 5 Ω. Według powyższych danych mamy obliczyć siłę prądu.



Rys. 92.

W tym przypadku posiłkujemy się wzorem (3) prawa Ohma, zakładając, że prąd płynie od *a* do *b*.

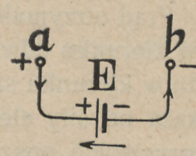
$$i = \frac{6 + 1,5}{5} = 1,5 \text{ amp.}$$

---

[1]) Opór przewodników łączących pomijamy, jako bardzo mały w porównaniu do oporu lamp.
[2]) Patrz rozdział III.

Siłę prądu i otrzymaliśmy dodatnią, prąd więc płynie rzeczywiście od a do b.

4. **Przewodnik, w którym kierunek siły elektromotorycznej jest przeciwny kierunkowi prądu.** Tak samo jak w przykładzie poprzednim na końcówkach a, b (rys. 93), mamy napięcie, równe 6 woltom. Końcówka a jest dodatnia, a b ujemna. Ogniwo galwaniczne włączyliśmy teraz w ten sposób, że siła elektromotoryczna tego ogniwa jest zwrócona od b do a. Wielkość tej siły elektromotorycznej równa się 2,5 wolta, a całkowity opór pomiędzy punktami a i b — 5 Ω.



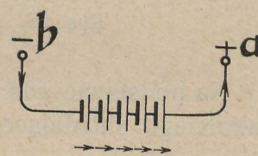
Rys. 93.

W celu obliczenia siły prądu zakładamy, że prąd płynie od a do b, i na podstawie wzoru (3) prawa Ohma otrzymujemy:

$$i = \frac{6 - 2,5}{5} = 0,7 \text{ amp.}$$

I w tym przypadku otrzymaliśmy siłę prądu dodatnią, zatem prąd płynie rzeczywiście od a do b.

5 **Przewodnik, w którym mamy kilka sił elektromotorycznych, skierowanych w jedną stronę.** Na końcówkach a, b mamy napięcie 6 woltów, skierowane od a do b, a — plus, b — minus (rys. 94). Pięć ogniw galwanicznych włączyliśmy w ten sposób, że wszystkie siły elektromotoryczne skierowane są od b do a. Siła elektromotoryczna każdego ogniwa wynosi 2 wolty, a opór całkowity części obwodu pomiędzy punktami a i b — 8 Ω.



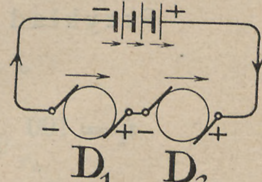
Rys. 94.

W celu obliczenia siły prądu zakładamy, że prąd płynie od a do b, t. j. w kierunku napięcia na końcówkach a, b. Według wzoru (3) prawa Ohma:

$$i = \frac{6 - 5 \cdot 2}{8} = -0,5 \text{ amp.}$$

Wynik obliczenia wskazuje, że prąd, wynoszący pół ampera, płynie w kierunku odwrotnym do kierunku, który założyliśmy.

6. **Obwód zamknięty z kilku siłami elektrycznemi.** W obwodzie (rys. 95) mamy baterję akumulatorów B, składającą się z 60 ogniw, połączonych w szereg w ten sposób, że siły elektromotoryczne poszczególnych ogniw są zwrócone w jedną stronę, pozatem są dwie prądnice (dynamomaszyny) D_1 i D_2, które wytwarzają siły elektromotoryczne w kierunkach, wskazanych na rysunku. Siła elektromotoryczna każdego ogniwa baterji wynosi 2,5 V, a opór wewnętrzny 0,001 Ω. Siły elektromotoryczne prądnic 120 V i 60 V, a ich opory wewnętrzne 0,2 Ω i 0,3 Ω. Opór przewodników, łączących między sobą poszczególne przyrządy w rozważanym obwodzie stanowi 0,04 Ω. W celu obliczenia siły prądu w takim obwodzie przyjmiemy dowolnie, że prąd ten płynie np. w kierunku ruchu wskazówek zegara.



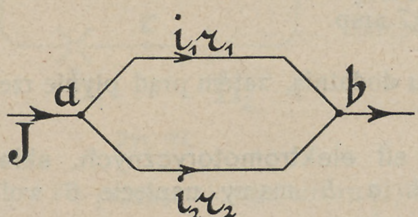
Rys. 95.

Według wzoru (4) prawa Ohma:

$$i = \frac{2,5 \cdot 60 - 60 - 120}{0,001 \cdot 60 + 0,2 + 0,3 + 0,4} = -50 \text{ amp.}$$

Prąd otrzymaliśmy ujemny, co świadczy o tem, że w rzeczywistości prąd płynie w kierunku odwrotnym do założonego i wskazanego na rysunku. Prąd płynie tu w kierunku sił elektromotorycznych prądnic, ponieważ suma tych sił jest większa od siły elektromotorycznej całej baterji, stanowiącej sumę sił elektromotorycznych poszczególnych ogniw.

7. Rozgałęzienie na dwa prądy. Mając część obwodu (rys. 96), w której znajduje się rozgałęzienie na dwa przewody, można łatwo na podstawie praw Kirchhofa i Ohma znaleźć wyrażenia matematyczne dla prądów i_1 i i_2, przepływających w poszczególnych gałęziach.



Rys. 96.

Oznaczmy przez J prąd przed rozgałęzieniem, a przez r_1 i r_2 opory rozgałęzień.

Na podstawie pierwszego prawa Kirchhoffa, według wzoru (5) możemy dla punktu a napisać:

$$J - i_1 - i_2 = 0.$$

Na podstawie zaś drugiego prawa Kirchhoffa według wzoru (6), dla obwodu zamkniętego, składającego się z oporów r_1 i r_2, wypada:

$$i_1 \cdot r_1 - i_2 \cdot r_2 = 0.$$

Rozwiązując powyższe dwa równania, otrzymamy:

$$i_1 = J \cdot \frac{r_2}{r_1 + r_2}; \qquad i_2 = J \cdot \frac{r_1}{r_1 + r_2}.$$

Z tych wzorów wynika, że:

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{r_2}{r_1}.$$

Prądy rozgałęzione są odwrotnie proporcjonalne do oporów tych gałęzi, w których przepływają.

Przykład liczbowy:

$$J = 100 \text{ amp.}, \quad r_1 = 1\ \Omega, \quad r_2 = 99\ \Omega.$$

$$i_1 = 100 \frac{99}{99 + 1} = 99 \text{ amp.}; \qquad i_2 = 100 \frac{1}{99 + 1} = 1 \text{ amp.}$$

Po przewodniku o małym oporze płynie 0,99 całego prądu, a po przewodniku o dużym oporze zaledwie 0,01 całego prądu.

8. Opór wypadkowy przewodników rozgałęzionych. W punkcie a (rys. 97) przewodnik rozgałęzia się na kilka przewodników, połączonych równolegle. Opory tych przewodników są $r_1, r_2, r_3 \ldots\ldots r_n$. Oznaczmy prąd przed

rozgałęzieniem przez J, a prądy w poszczególnych gałęziach przez i_1, i_2, i_3 . . . . . . i_n.

Znajdźmy opór, jaki miałby jeden przewodnik, który, włączony pomiędzy punktami a i b zamiast wszystkich oporów równoległych, przepuściłby w tych samych warunkach cały prąd J.

Gdy napięcie pomiędzy punktami a i b jest e, wtedy na zasadzie prawa Ohma dla poszczególnych przewodników mamy:

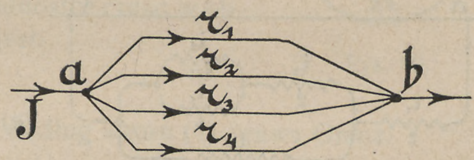
$$i_1 = \frac{e}{r_1},$$

$$i_2 = \frac{e}{r_2},$$

$$i_3 = \frac{e}{r_3},$$

. . . .

$$i_n = \frac{e}{r_n}.$$



Rys. 97.

Dodając te równania, otrzymamy:

$$J = e \cdot \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \ldots\ldots + \frac{1}{r_n}\right).$$

Oznaczmy przewodnictwo poszczególnych gałęzi przez: k_1, k_2, k_3 . . . . . k_n, wtedy będziemy mieli:

$$J = e \cdot \left(k_1 + k_2 + k_3 + \ldots\ldots + k_n\right).$$

Sumę poszczególnych przewodnictw nazwiemy **przewodnictwem wypadkowym.** Oznaczmy to przewodnictwo przez K, wtedy:

$$J = e \cdot K,$$

gdzie:

$$K = k_1 + k_2 + k_3 + \ldots\ldots + k_n.$$

Przewodnictwo wypadkowe szeregu równolegle połączonych przewodników równa się sumie przewodnictw przewodników poszczególnych.

Opór wypadkowy R jest odwrotnością przewodnictwa, więc:

$$R = \frac{1}{K}.$$

$$R = \frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \ldots\ldots + \frac{1}{r_n}}.$$

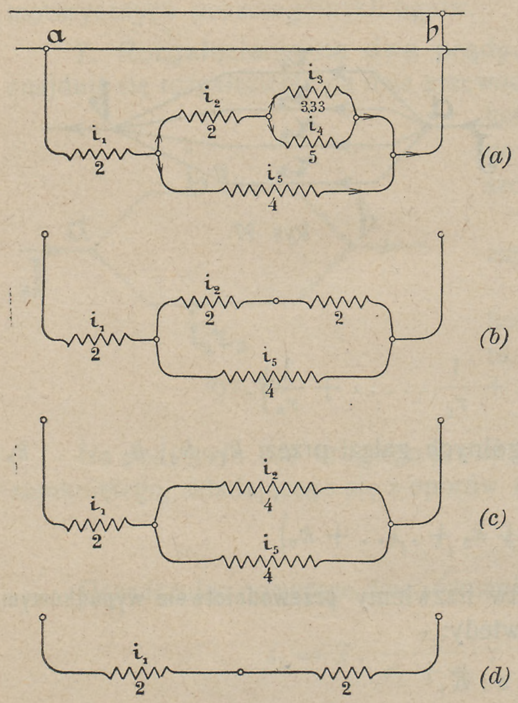
W przypadku szczególnym, gdy mamy tylko dwa równoległe przewodniki:

$$R = \frac{1}{\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}} = \frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2}.$$

A gdy mamy n przewodników o jednakowym oporze r, połączonych równolegle, to:

$$R = \frac{1}{n \cdot \frac{1}{r}} = \frac{r}{n}.$$

9. Obliczyć prądy w układzie przewodów rozgałęzionych. Pomiędzy punktami a i b (rys. 98 a) istnieje napięcie 120 V. Wielkości poszczególnych oporów wskazane są na rysunku. W celu obliczenia siły prądów i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, zastępujemy dany układ przewodników stopniowo coraz prostszym.



Rys. 98.

Przedewszystkim łączymy opory: 3,33 Ω i 5 Ω w jeden wypadkowy według wzoru § poprzedniego:

$$\frac{1}{3{,}33} + \frac{1}{5} = \frac{1}{2}.$$

Zastępczy opór wynosi więc 2 Ω (rys. 98 b). Dalej z dwuch oporów 2 Ω i 2 Ω, połączonych w szereg, wyliczamy opór wypadkowy:

$$2\,\Omega + 2\,\Omega = 4\,\Omega.$$

W ten sposób mamy już układ wskazany na rys. 98 c. Łącząc razem dwa równoległe opory 4 Ω i 4 Ω, znajdziemy:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2},$$

czyli opór wypadkowy 2 Ω i w ten sposób przejdziemy do układu na rys. 98 d. Prąd i_1 w tym układzie przewodów znajdziemy ze wzoru:

$$i_1 = \frac{120}{2+2} = 30 \text{ amp.}$$

Prądy i_2 i i_5 (rys. 98 c) będą:

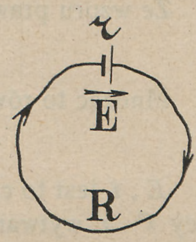
$$i_2 = i_5 = \frac{30}{4+4} \cdot 4 = 15 \text{ amp.}$$

Prądy i_3 i i_4 (rys. 98 a) wypadną:

$$i_3 = \frac{15}{3{,}33+5} \cdot 5 = 9 \text{ amp.}$$

$$i_4 = \frac{15}{3{,}33+5} \cdot 3{,}33 = 6 \text{ amp.}$$

10. Moc maksymalna w obwodzie zewnętrznym. Mamy obwód (rys. 99), składający się z jednego ogniwa galwanicznego i drutu, łączącego pomiędzy sobą jego końcówki. Oznaczmy przez r opór wewnętrzny ogniwa, przez R opór drutu, stanowiącego, tak zwany, obwód zewnętrzny, przez E siłę elektromotoryczną ogniwa.



Rys. 99.

Należy wyznaczyć, jaki ma być opór R w stosunku do r, aby ilość ciepła, wydzielającego się w obwodzie zewnętrznym, była maksymalna. Że taki opór być musi, wynika to z następującego rozumowania: Moc prądu, równoważna ilości ciepła, wywiązującej się w jednostce czasu w obwodzie zewnętrznym przy sile prądu i, jest:

$$i^2 \cdot R.$$

Dla obwodu zamkniętego (rys. 99), według wzoru (4) prawa Ohma:

$$i = \frac{E}{r+R}.$$

Po podstawieniu tego wyrazu we wzór poprzedni, otrzymamy:

$$\frac{E^2 \cdot R}{(r+R)^2}, \text{ albo } \frac{E^2}{\left(\frac{r}{R}+1\right)^2 \cdot R}.$$

Te dwa wyrażenia mocy prądu wskazują, że przy $R=0$ i przy $R=\infty$, moc ta będzie zerem, istnieje przeto pewna wartość oporu R, przy której powyższa moc będzie maksymalna.

Tę wartość oporu R, przy której omawiana moc stanie się maksymalną, znajdziemy, wyznaczając pochodną powyższego wyrazu względem R i przyrównywając tę pochodną do zera.

Pochodna wyrazu:

$$\frac{E^2 \cdot R}{(r+R)^2}$$

względem R będzie:

$$\frac{E^2}{(r+R)^2} - \frac{2 \cdot E^2 \cdot R}{(r+R)^3}.$$

Pochodna ta ma być równa zeru, a więc:

$$\frac{E^2}{(r+R)^2} - \frac{2 \cdot E^2 \cdot R}{(r+R)^3} = 0,$$

lub:

$$(r+R) - 2R = 0,$$

skąd:

$$r = R.$$

Wynik tych rozważań matematycznych wskazuje, że w obwodzie zewnętrznym ilość ciepła maksymalna wytworzy się wtedy, gdy opór obwodu zewnętrznego równać się będzie oporowi obwodu wewnętrznego.

Należy jednak zwrócić uwagę jeszcze na jeden szczegół. Rozważając wspom-

niane urządzenie jako przyrząd ogrzewający i przypuszczając, że tylko ciepło obwodu zewnętrznego może być zużytkowane, przekonamy się łatwo, że tego rodzaju urządzenie nie będzie bardzo oszczędne.

Ze wzoru prawa Ohma wynika, że.

$$E = i \, . \, r + i \, . \, R.$$

Mnożąc to równanie przez i, otrzymamy:

$$E \, . \, i = i^2 \, . \, r + i^2 \, . \, R.$$

$E \, . \, i$ jest to cała moc prądu, dostarczona przez ogniwo galwaniczne. Z tej mocy $i^2 \, . \, r$ wytwarza ciepło wewnątrz ogniwa, a $i^2 \, . \, R$ w obwodzie zewnętrznym. Ponieważ zaś w przypadku rozważanym:

$$r = R,$$

przeto

$$i^2 \, . \, r = i^2 \, . \, R$$

i

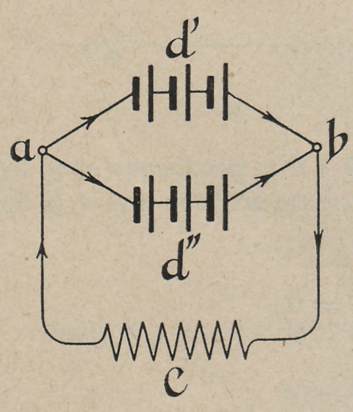
$$i^2 \, . \, R = \frac{E \, . \, i}{2}.$$

Stosunek energji pożytecznej, otrzymanej z tego przyrządu, do ilości energji dostarczonej do przyrządu nazywamy jego sprawnością. Gdy moc prądu jest stała, stosunek energji równa się stosunkowi mocy i wtedy sprawność rozważanego urządzenia będzie:

$$\eta = \frac{i^2 \, . \, R}{E \, . \, i} = \frac{1}{2} = 50\%.$$

Dla urządzeń elektrycznych o prądach silnych jest to sprawność mała.

11. Prąd w obwodzie baterji ogniw. Obliczmy prąd w części zewnętrznej obwodu, zasilanego z baterji ogniw galwanicznych (rys. 100). Baterja utworzona jest z m równoległych grup ogniw. Każda grupa składa się z n ogniw, połączonych w szereg. Na rysunku są wskazane dwie grupy równoległe, po trzy ogniwa w każdej grupie, połączone w szereg. Wszystkie ogniwa są jednakowe. Opór każdego ogniwa wynosi r omów, a siła elektromotoryczna — E woltów. Opór obwodu zewnętrznego jest R. Opory drutów, łączących pomiędzy sobą poszczególne ogniwa, włączone są do oporu ogniw.



Rys. 100.

Oznaczmy prądy w poszczególnych grupach ogniw przez i_1, i_2, i_3, ... i_m, a prąd w części zewnętrznej obwodu przez J. Dla każdego obwodu zamkniętego $acbd'a$, $acbd''a$ i t. d. możemy według drugiego prawa Kirchhoffa ułożyć równania następujące:

$$JR + i_1 \, . \, n \, . \, r = n \, . \, E,$$
$$JR + i_2 \, . \, n \, . \, r = n \, . \, E,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$JR + i_m \, . \, n \, . \, r = n \, . \, E,$$

a dodając je, otrzymamy:

$$m \,.\, JR + n \,.\, r \,.\, (i_1 + i_2 + \ldots . + i_m) = m \,.\, n \,.\, E.$$

Na zasadzie pierwszego prawa Kirchhoffa:

$$J = i_1 + i_2 + \ldots . + i_m,$$

a więc:

$$m \,.\, J \,.\, R + n \,.\, r \,.\, J = m \,.\, n \,.\, E,$$

skąd:

$$J = \frac{n \,.\, E}{R + \frac{n \,.\, r}{m}}.$$

Jeżeli baterję stanowi tylko jedna grupa, utworzona z n ogniw, połączonych w szereg, wtedy: $m = 1$, a

$$J = \frac{n \,.\, E}{R + n \,.\, r}.$$

Baterja, składająca się z m ogniw, połączonych równolegle, jak widać z ogólnego wzoru, wytworzy prąd:

$$J = \frac{E}{R + \frac{r}{m}}.$$

W tym przypadku w ogólnym wzorze $n = 1$.

12. Warunek największości prądu. Załóżmy, że mamy utworzyć baterję z pewnej liczby ogniw, którą oznaczymy przez p. Trzeba określić, na ile grup równoległych należy podzielić całą liczbę ogniw, aby w danym obwodzie zewnętrznym acb (rys. 100) otrzymać prąd najsilniejszy.

Jeżeli utworzymy m grup po n ogniw w każdej grupie, to:

$$p = m \,.\, n,$$

stąd:

$$m = \frac{p}{n}.$$

W poprzednim przykładzie wyprowadziliśmy wzór:

$$J = \frac{n \,.\, E}{R + \frac{n \,.\, r}{m}}.$$

Rugując w tym wzorze m, przez podstawienie na miejsce m wyrazu $\frac{p}{n}$, otrzymamy:

$$J = \frac{n \,.\, E}{R + \frac{n^2 \,.\, r}{p}}.$$

W celu określenia warunków, w których prąd będzie największy, znajdujemy pochodną tego wyrazu względem n i zakładamy, że ta pochodna równa się zeru:

$$\frac{dJ}{dn} = \frac{E}{R + \frac{n^2 . r}{p}} - \frac{2 . E . n^2 . \frac{r}{p}}{\left(R + \frac{n^2 . r}{p}\right)^2} = 0,$$

albo:

$$R + \frac{n^2 . r}{p} - \frac{2 . n^2 . r}{p} = 0,$$

skąd:

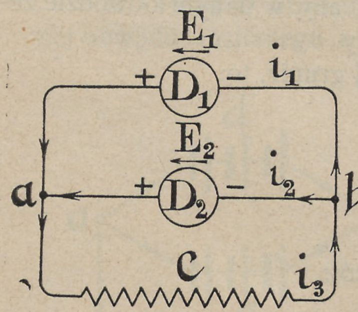
$$R = \frac{n^2 . r}{p} = \frac{n . r}{m}.$$

Wyraz $\frac{n . r}{m}$ stanowi opór wewnętrzny baterji; mamy tu m oporów równoległych, z których każdy składa się z n oporów, połączonych w szereg, a każdy ze składowych oporów wynosi r omów.

Na podstawie otrzymanych powyżej wyników, warunek największości prądu, przepływającego przez dany opór z baterji, można wyrazić w sposób następujący: **ogniwa powinny być połączone ze sobą w ten sposób, aby opór wewnętrzny baterji równał się danemu oporowi zewnętrznemu.**

Zwykle można osiągnąć ten warunek tylko w przybliżeniu, ponieważ przez zmianę układu ogniw nie można otrzymać ciągłej zmiany oporu wewnętrznego baterji w dowolnych granicach.

13. **Połączenie równoległe dwuch różnych źródeł prądu.** Mamy obwód (rys. 101), utworzony z dwuch źródeł prądu: D_1 i D_2 i przewodnika acb. Kierunki sił elektromotorycznych źródeł prądu wskazane są na rysunku. Siła elektromotoryczna $E_1 = 120\ V$, a $E_2 = 100\ V$. Nadto znane są także opory części poszczególnych obwodu, mianowicie opór części aD_1b wynosi 0,2 Ω, części aD_2b — 0,5 Ω, a części acb — 2 Ω. Według tych danych obliczymy wielkości i kierunki prądów w poszczególnych częściach obwodu.



Rys. 101.

Części obwodu nierozgałęzionych mamy tutaj trzy: aD_1b, aD_2b i acb. W każdej więc z nich będzie płynął inny prąd; oznaczymy te prądy w tejże kolei przez i_1, i_2, i_3 i przyjmiemy zupełnie dowolne kierunki prądów, wskazane na rysunku.

Według pierwszego prawa Kirchhoffa układamy równanie:

$$i_3 - i_1 - i_2 = 0,$$

a według drugiego prawa Kirchhoffa dwa równania: jedno dla obwodu aD_1bca:

$$0{,}2 . i_1 + 2 . i_3 = 120,$$

a drugie dla obwodu aD_2bca:

$$0{,}5 . i_2 + 2 . i_3 = 100.$$

Rugując za pomocą pierwszego równania z dwuch następnych wielkość i_3, otrzymamy:

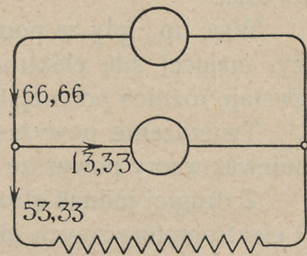
$$2{,}2 \,.\, i_1 + 2 \,.\, i_2 = 120,$$
$$2{,}5 \,.\, i_2 + 2 \,.\, i_1 = 100.$$

Z tych dwuch równań otrzymujemy:

$$i_1 = 66{,}66\ A,$$
$$i_2 = -13{,}33\ A,$$

a według równania pierwszego:

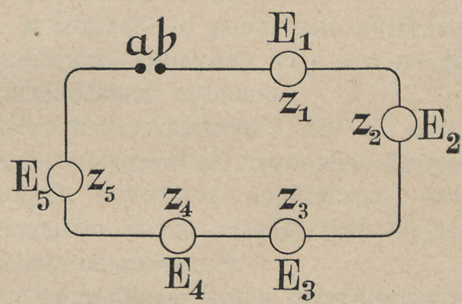
$$i_3 = i_1 + i_2 = 66{,}66 - 13{,}33 = 53{,}33\ A.$$



Rys. 102.

Znak minus przed liczbą, wyrażającą siłę prądu i_2, oznacza, że prąd ten płynie w kierunku odwrotnym względem założonego poprzednio. Rzeczywiście istniejący układ prądów wskazany jest na rysunku 102.

14. Napięcie w miejscu przerwania obwodu. Rozważmy obwód (rys. 103), składający się z szeregu przyrządów z_1, z_2 i t. d., w których istnieją siły elektromotoryczne, i drutów, łączących te przyrządy ze sobą. Oznaczmy przez E_1, E_2 i t. d. siły elektromotoryczne, a przez R cały opór obwodu.



Rys. 103.

Gdy końce drutów a i b zetkniemy, obwód będzie zamknięty; wtedy końce a i b będą stanowiły jeden punkt obwodu, różnica więc potencjałów między niemi, czyli napięcie, oczywiście równać się będzie zeru.

Przedstawmy sobie następnie, że końce drutów a i b zostały połączone ze sobą oporem dodatkowym r. Wtedy w obwodzie popłynie prąd, którego siłę wyznaczymy na zasadzie prawa Ohma ze wzoru:

$$i = \frac{\Sigma E}{r + R}.$$

Napięcie na końcach a i b oznaczmy przez e. Według prawa Ohma:

$$e = i \,.\, r,$$

albo:

$$e = r \,.\, \frac{\Sigma E}{r + R} = \frac{\Sigma E}{1 + \frac{R}{r}}.$$

Przerwać obwód, znaczy to uczynić opór $r = \infty$, wtedy z powyższego równania wypada:

$$e = \Sigma E.$$

Napięcie między końcami przewodników w miejscu, gdzie przerywamy obwód, równa się sumie algebraicznej sił elektromotorycznych czynnych w tym obwodzie.

Więc np., gdy za pomocą przerywacza gasimy lampkę, zasilaną prądem prądnicy, mającej siłę elektromotoryczną 120 *V*, pomiędzy kontaktami przerywacza powstaje różnica potencjałów, wynosząca 120 *V*.

Twierdzenie powyższe stosuje się do przerwy w **dowolnym** miejscu obwodu, ponieważ wzory powyższe nie zależą zupełnie od tego, gdzie jest przerwa.

Z drugiej jednak strony twierdzenie to jest ścisłe tylko wtedy, gdy wielkość sił elektromotorycznych nie zależy od siły prądu.

W przeciwnym razie należy to uwzględnić, wyrażając siły elektromotoryczne w zależności od prądów i zakładając siłę prądu równą zeru; wtedy możemy zupełnie ściśle powiedzieć, że napięcie w przerwie równa się sumie algebraicznej sił elektromotorycznych, działających w chwili, gdy prąd zmniejszy się do zera.

ROZDZIAŁ XIII.

Prawo Ohma dla prądów zmiennych.

Mówiąc o prądach zmiennych, będę miał na myśli prądy zmienne okresowo, według prawa sinusoidy, [1]) o sile jednakowej na całej nierozgałęzionej części obwodu.

Dla tego rodzaju prądów prawa Ohma, podane dla sił prądów i napięć w pewnej chwili, stosują się we wszystkich swoich postaciach bez zastrzeżeń.

W praktyce jednak, jak to zobaczymy w rozdziale o pomiarach, wielkości **czynne** prądów i napięć wskazują przyrządy miernicze; konieczną więc jest rzeczą znaleźć wzory, wyrażające związki pomiędzy wielkościami czynnemi.

Chcąc ułatwić czytelnikowi zapoznanie się z temi związkami i dać mu możność głębszego ujęcia samego przedmiotu, będę posługiwał się równolegle dwoma metodami, stosowanemi przy prądach zmiennych: wykreślną i analityczną. Aby zaś nie przerywać właściwego wykładu, przesunąłem szereg zasadniczych wyjaśnień, dotyczących metody wykreślnej do rozdziału ostatniego. [2])

Przy prądach zmiennych należy rozważyć szczegółowo wpływ dwuch nowych czynników, o których nie było mowy przy prądach stałych, a mianowicie samoindukcji i pojemności.

Przy prądach stałych oba te czynniki nie mają żadnego znaczenia, gdyż pole magnetyczne jest również stałe, a pojemność przewodników nie odgrywa tu żadnej roli, — prąd stały przez idealny izolator nie przepływa.

Dla uwydatnienia wpływu poszczególnych czynników na przebieg prądu zmiennego, rozważymy przedewszystkim kolejno kilka prostych przypadków.

1. Przewodnik posiada tylko opór omiczny. Załóżmy przedewszystkim, że przewodnik nie posiada ani samoindukcji, ani pojemności, lecz tylko opór omiczny (rys. 104); wtedy wzór dla prądu w pewnej chwili według prawa Ohma będzie:

---

[1]) W rzeczywistości prądy zmienne mniej lub więcej odbiegają od prawa zmienności sinusoidalnej, zwykle jednak odchylenia są nie wielkie, wobec czego można posiłkować się wynikami rozumowań, opartych na założeniu ścisłej zgodności zmiany prądu z prawem sinusoidy. W przypadkach wyjątkowych należy uciec się do rozkładu prądów niesinusoidalnie zmiennych na kilka prądów sinusoidalnie zmiennych o różnych okresach i różnej wartości maksymalnej.

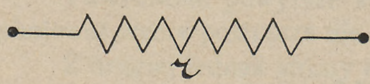
[2]) Czytelnicy, nieobeznani ze sposobem wykreślnego przedstawiania zjawisk sinusoidalnie zmiennych, powinni zapoznać się z nim przed przystąpieniem do czytania tego rozdziału.

$$i_t = \frac{e_t}{r},$$

a więc:

$$e_t = i_t \, . \, r \, .$$

Założmy następnie, że prąd zmienia się według prawa sinusoidy, a więc siła jego w danej chwili wyrazi się wzorem:



Rys. 104.

$$i_t = \overline{i} \, . \, \sin \frac{2 \pi t}{T},$$

gdzie $\overline{i}$ oznacza maksymalną wartość siły prądu, T — okres zmienności.

Podstawiając wyrażenie powyższe we wzór na e_t, otrzymamy:

$$e_t = \overline{i} \, . \, r \, . \, \sin \frac{2 \pi t}{T} \, .$$

Ponieważ $\overline{i} \, . \, r$ jest wielkością stałą, z tego więc wzoru wynika, że i napięcie będzie się zmieniało według prawa sinusoidy, a wielkość maksymalną osiągnie przy $t = \frac{T}{4}$, gdyż wówczas:

$$\frac{2 \pi t}{T} = \frac{\pi}{2} \quad \text{i} \quad \sin \frac{\pi}{2} = 1 \, .$$

Maximum napięcia wynosi:

$$\overline{e} = \overline{i} \, . \, r \, .$$

Wprowadzając zamiast maksymalnych wielkości czynne [1]) prądu i napięcia e i i, otrzymamy:

$$\sqrt{2} \, e = \sqrt{2} \, i \, . \, r \, ,$$

a więc:

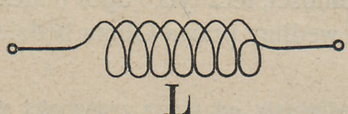
$$e = i \, . \, r \, ,$$

czyli:

$$i = \frac{e}{r} \, .$$

W tym przypadku prawo Ohma dla wielkości czynnych prądu zmiennego pozostaje takie samo, jak przy prądzie stałym.

2. Przewodnik posiada tylko samoindukcję. Założmy, że mamy przewodnik, który nie posiada ani oporu omicznego, ani pojemności, lecz tylko samoindukcję (rys 105); spółczynnik samindukcji niech będzie L.



Rys. 105.

W tym przypadku zastosujemy prawo Ohma w postaci, uwzględniającej siły elektromotoryczne w obwodzie, a mianowicie mamy tu siłę elektromotoryczną samoindukcji, którą oznaczymy przez E_s.

---

[1]) Patrz rozdział I.

Prawo Ohma dla siły prądu w danej chwili jest następujące:

$$i_t = \frac{e_t + E_{st}}{r},$$

albo:

$$e_t + E_{st} = i_t \, . \, r,$$

ponieważ jednak założyliśmy, że $r = 0$, więc:

$$e_t + E_{st} = 0 \, . \qquad \text{(a)}$$

Z rozdziału zaś VIII wiemy, że:

$$E_{st} = -L \, . \, \frac{d\,i_t}{d\,t} \, .$$

Załóżmy, że prąd zmienia się według prawa sinusoidy:

$$i_t = \bar{i} \, . \sin \frac{2\,\pi\,t}{T} \, .$$

Otrzymamy wtedy:

$$\frac{d\,i_t}{d\,t} = \bar{i} \, . \, \frac{2\,\pi}{T} \, . \cos \frac{2\,\pi\,t}{T},$$

$$E_{st} = -L \, . \, \bar{i} \, . \, \frac{2\,\pi}{T} \, . \cos \frac{2\,\pi\,t}{T}$$

Ponieważ:

$$-\cos \frac{2\,\pi\,t}{T} = \sin \left(\frac{2\,\pi\,t}{T} - \frac{\pi}{2} \right),$$

więc:

$$E_{st} = L \, . \, \bar{i} \, . \, \frac{2\,\pi}{T} \, . \sin \left(\frac{2\,\pi\,t}{T} - \frac{\pi}{2} \right) .$$

Wielkość $\frac{2}{T}$ nazywamy **liczbą zmian prądu na sekundę**, ponieważ $\frac{1}{T}$ jest liczbą okresów zmienności prądu na sekundę, a w ciągu jednego okresu kierunek prądu zmienia się dwa razy.

Jeżeli $\frac{2}{T}$ oznaczymy przez z, to:

$$E_{st} = \bar{i} \, . \, z\,\pi\,L \, . \sin \left(\frac{2\,\pi\,t}{T} - \frac{\pi}{2} \right) .$$

Podstawiając wyraz powyższy we wzór (a), otrzymamy dla napięcia na końcach przewodnika, wyrażenie następujące:

$$e_t = -\bar{i} \, . \, z\,\pi\,L \, . \sin \left(\frac{2\,\pi\,t}{T} - \frac{\pi}{2} \right),$$

albo, mając na względzie, że:

$$-\sin \left(\frac{2\,\pi\,t}{T} - \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left(\frac{2\,\pi\,t}{T} + \frac{\pi}{2} \right),$$

otrzymamy:

$$e_t = \bar{i} \, . \, z\,\pi\,L \, . \sin \left(\frac{2\,\pi\,t}{T} + \frac{\pi}{2} \right) .$$

Wzór ten wskazuje, że napięcie zmienia się sinusoidalnie, zmienność jednak napięcia jest przesunięta w fazie względem zmienności prądu o ćwierć okresu naprzód, cały bowiem okres odpowiada 2π. Przy $t = 0$:

$$\sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1,$$

przeto napięcie będzie wtedy maksymalne i z powyższego wynika, że:

$$\bar{e} = \bar{i} \,.\, z\pi L,$$

skąd:

$$\bar{i} = \frac{\bar{e}}{z\pi L}.$$

Wprowadzając zamiast maksymalnych, wielkości czynne prądu i napięcia, otrzymamy:

$$i \,.\, \sqrt{2} = \frac{e \,.\, \sqrt{2}}{z\pi L},$$

albo:

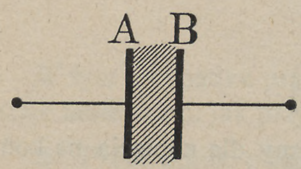
$$i = \frac{e}{z\pi L}.$$

Wyraz $z\pi L$ nazywamy **oporem indukcyjnym** [1]) przewodnika. Opór ten zależy od własności indukcyjnych przewodnika, wyrażonych przez spółczynnik L, i od własności prądu zmiennego. Opór indukcyjny jest **wprost proporcjonalny do liczby zmian prądu na sekundę**. Nadto wielkość tego oporu zależy od postaci krzywej prądu, albowiem podany tu wzór stosuje się ściśle tylko do prądu sinusoidalnie zmiennego.

W celu skrócenia wzoru oznaczamy niekiedy $z\pi$ przez a [2]), wtedy:

$$i = \frac{e}{aL}.$$

3. Przewodnik posiada tylko pojemność. Rozważmy prąd zmienny, przepływający przez warstwę izolatora idealnego pomiędzy płytkami A i B (rys. 106). Pojemność utworzonego w ten sposób kondensatora niech będzie C. Przewodniki, doprowadzające prąd, nie mają ani samoindukcji, ani oporu omicznego.



Rys. 106.

Z rozdziału IX wiadomo, że prąd, płynący w danej chwili przez kondensator, wyrazi się wzorem:

$$i_t = C \,.\, \frac{de_t}{dt}.$$

Załóżmy, jak poprzednio, że prąd ten będzie sinusoidalnie zmienny, że więc:

$$i_t = \bar{i} \,.\, \sin\frac{2\pi t}{T}.$$

---

[1]) Opór indukcyjny nazywamy także *zawadą*, a stosując wyrazy, przyjęte w wielu obcych językach, możnaby go nazwać *induktancją*, albo *reaktancją*.

[2]) W języku francuskim $a = \frac{2\pi}{T} = z\pi$ nazywa się „pulsation“

Podstawiając ten wzór w równanie poprzednie, otrzymamy:

$$\bar{i} \,.\, \sin \frac{2\pi t}{T} = C \,.\, \frac{d e_t}{d t},$$

skąd:

$$d e_t = \frac{1}{C} \,.\, \bar{i} \,.\, \sin \frac{2\pi t}{T} \, dt.$$

Po zcałkowaniu zaś będziemy mieli: [1])

$$e_t = -\frac{1}{C} \,.\, \bar{i} \,.\, \frac{T}{2\pi} \,.\, \cos \frac{2\pi t}{T}.$$

Oznaczając $\frac{2}{T}$ przez z i mając na względzie, że:

$$-\cos \frac{2\pi t}{T} = \sin \left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{2} \right),$$

otrzymamy:

$$e_t = \bar{i} \,.\, \frac{1}{z \pi C} \,.\, \sin \left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{2} \right).$$

Wzór ten wskazuje, że napięcie zmienia się również sinusoidalnie, ale jest ono przesunięte w fazie względem prądu o ćwierć okresu wstecz.

Przy $t = 0$:

$$\sin \left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{2} \right) = \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) = -1,$$

przeto w tej chwili napięcie będzie maksymalne. Bezwzględna jego wartość niezależnie od znaku wyrazi się wzorem:

$$\bar{e} = \frac{\bar{i}}{z \pi C}.$$

Wprowadzając zaś wielkości czynne zamiast maksymalnych, znajdziemy:

$$e = \frac{i}{z \pi C}.$$

Lub też, sprowadzając ten wzór do zwykłej postaci prawa Ohma, otrzymamy:

$$i = \frac{e}{\frac{1}{z \pi C}},$$

oznaczając $z\pi$ przez a, będzie:

$$i = \frac{e}{\frac{1}{a C}},$$

albo:

$$i = e \,.\, z \pi C = e \,.\, a C.$$

---

[1]) Stałą całkowania zakładamy = 0, ponieważ w ten sposób otrzymane wzory odpowiadają przypadkom najczęściej spotykanym w praktyce.

Wyraz $\frac{1}{2 \pi C}$ nazywamy **oporem kondensatora**, albo **oporem pojemności**. [1])

Opór ten zależy od związanych z pojemnością własności drogi prądu, która w tym razie częściowo przechodzi przez izolator, a nadto od rodzaju samego prądu: od liczby zmian na sekundę i od postaci krzywej prądu.

Opór pojemności jest tym **mniejszy**, im **większa** jest liczba zmian prądu na sekundę, odwrotnie jak przy oporze indukcyjnym, rozważanym poprzednio.

4. Zestawienie powyższych trzech przypadków. We wszystkich trzech przypadkach, rozważanych powyżej, przyjmowaliśmy dla prądu prawo zmienności sinusoidalnej, wyrażonej wzorem:

$$i_t = \bar{i} \, . \sin \frac{2 \pi t}{T} \, .$$

Przy takim prądzie otrzymywaliśmy wzory dla napięć różne:
W pierwszym przypadku, gdy przewodnik posiadał tylko opór omiczny:

$$e_t = \bar{i} \, . \, r \, . \sin \frac{2 \pi t}{T} \, .$$

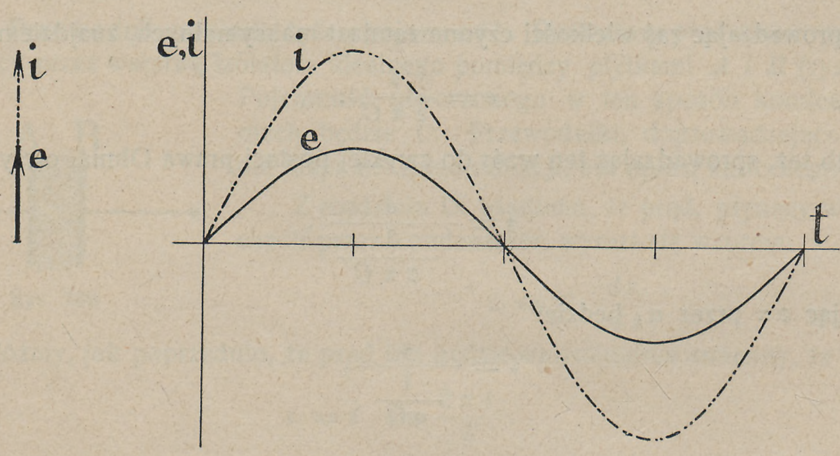
Gdy miał tylko samoindukcję:

$$e_t = \bar{i} \, . \, 2 \pi L \, . \sin \left(\frac{2 \pi t}{T} + \frac{\pi}{2} \right) .$$

Przy samej zaś tylko pojemności:

$$e_t = \bar{i} \, . \, \frac{1}{2 \pi C} \, . \sin \left(\frac{2 \pi t}{T} - \frac{\pi}{2} \right) .$$

Wzory prądów i napięć możemy wyrazić za pomocą wykresów, odkładając czas na odciętych, a na rzędnych napięcie i siłę prądu.

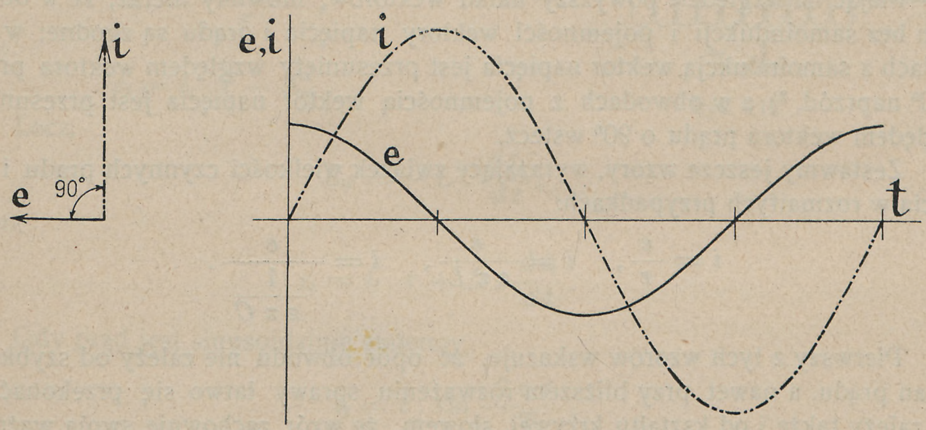


Rys 107.

[1]) Opór ten nazywamy inaczej *zawadą*. Stosując wyraz, przyjęty w wielu obcych językach, możnaby nazwać go *kapacytancją*.

Rysunek 107 stosuje się do pierwszego przypadku, gdy mamy do czynienia tylko z oporem omicznym, wtedy krzywe posiadają **fazy zgodne**.

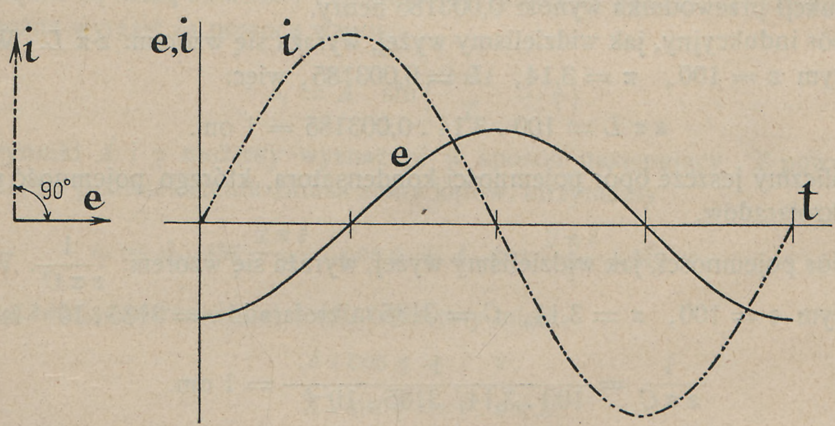
Rysunek 108 dotyczy przewodnika z samoindukcją. Krzywe prądu i napięcia są tu przesunięte jedna względem drugiej o ćwierć okresu i **napięcie wyprzedza prąd**.



Rys. 108.

To samo możemy wyrazić inaczej, mówiąc, że prąd spóźnia się względem napięcia o ćwierć okresu.

Rysunek 109 stosuje się do prądu w kondensatorze. Mamy tu znowu różnicę faz, wynoszącą ćwierć okresu, lecz krzywa napięcia jest przesunięta w przeciw-



Rys. 109.

ną stronę; **prąd wyprzedza tu napięcie o ćwierć okresu**, lub inaczej — napięcie spóźnia się względem prądu o ćwierć okresu.

We wzorach matematycznych różnica faz uwydatnia się wyraźnie przez dodawanie i odejmowanie od $\frac{2\pi t}{T}$ kąta $\frac{\pi}{2}$.

Omawiane tu własności prądów zmiennych można też przedstawić za pomo-

cą wektorów, obracających się w ten sposób, że jeden pełny obrót każdego wektora odbywa się w ciągu jednego okresu trwania prądu. [1])

Stosownie do układu krzywych na rys. 107, 108 i 109, odpowiednie wektory przedstawiają się tak, jak to wskazano obok na tych samych rysunkach.

Mając na względzie powyższy układ wektorów, mówimy nieraz, że w obwodach bez samoindukcji i pojemności wektory napięcia i prądu są zgodne; w obwodach z samoindukcją wektor napięcia jest przesunięty względem wektora prądu o 90^0 naprzód, [2]) a w obwodach z pojemnością wektor napięcia jest przesunięty względem wektora prądu o 90^0 wstecz.

Zestawmy jeszcze wzory, wyrażające związek wielkości czynnych prądu i napięcia w rozmaitych przypadkach:

$$\dot{i} = \frac{e}{r}, \quad \dot{i} = \frac{e}{z\pi L}, \quad \dot{i} = \frac{e}{\frac{1}{z\pi C}}.$$

Pierwszy z tych wzorów wskazuje, że opór obwodu nie zależy od szybkości zmian prądu, a nawet przy bliższem rozważeniu sprawy łatwo się przekonać, że nie zależy także i od kształtu krzywej, słowem, że wzór zachowuje swoją ważność dla wszelkich prądów zmiennych.

Dwa wzory następne dotyczą ściśle tylko prądów sinusoidalnych, a wielkość oporu zależy od szybkości zmian prądu. Wszystkie wyrazy oporów przy podstawieniu odpowiednich jednostek dają oczywiście wyniki wyrażone w omach.

P r z y k ł a d y. Obliczmy opór indukcyjny przewodnika dla prądu sinusoidalnie zmiennego, który zmienia swój kierunek 100 razy na sekundę. Spółczynnik samoindukcji przewodnika wynosi 0,003185 henry.

Opór indukcyjny, jak widzieliśmy wyżej, wyraża się wzorem: $z\pi L$. W przykładzie tym $z = 100$, $\pi = 3{,}14$, $L = 0{,}003185$, więc:

$$z\pi L = 100 \,.\, 3{,}14 \,.\, 0{,}003185 = 1 \text{ om}.$$

Obliczmy jeszcze opór pojemności kondensatora, którego pojemność wynosi 3185 mikrofaradów.

Opór pojemności, jak widzieliśmy wyżej, wyraża się wzorem: $\frac{1}{z\pi C}$. W przykładzie tym $z = 100$, $\pi = 3{,}14$, $C = 3185$ mikrofaradów $= 3185 \,.\, 10^{-6}$ faradów, więc:

$$\frac{1}{z\pi C} = \frac{1}{100 \,.\, 3{,}14 \,.\, 3185 \,.\, 10^{-6}} = 1 \text{ om}.$$

Mając na względzie opory indukcyjne i kondensatory, stosowane w praktyce, możemy wywnioskować z powyższych obliczeń, że, dla otrzymania oporu indukcyjnego, wynoszącego jeden om, należy zastosować przewodnik o małym spółczynniku samoindukcji, — a dla otrzymania oporu pojemności, wynoszącego jeden om, wypada użyć kondensator o bardzo dużej pojemności.

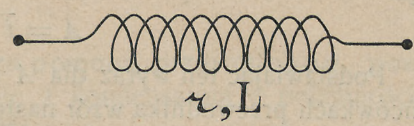
---

[1]) O wektorach, w zastosowaniu do rozważania prądów zmiennych, patrz rozdział XL. Obrót wektorów zakładamy wszędzie odwrotny do ruchu wskazówek zegara.

[2]) Naprzód, rozumie się, w kierunku odwrotnym do ruchu wskazówki zegara.

5. Przewodnik z oporem omicznym i samoindukcją. Gdy przewodnik posiada jednocześnie opór i samoindukcję (rys. 110), to na zasadzie prawa Ohma prąd w chwili t będzie:

$$i_t = \frac{e_t + E_{st}}{r},$$



Rys. 110.

stąd:

$$e_t = i_t \,.\, r - E_{st}.$$

Lecz:

$$E_{st} = -L \,.\, \frac{d i_t}{d t},$$

zatem:

$$e_t = i_t \,.\, r + L \,.\, \frac{d i_t}{d t}.$$

Gdy prąd jest sinusoidalnie zmienny,

$$i_t = \bar{i} \,.\, \sin \frac{2 \pi t}{T},$$

$$\frac{d i_t}{d t} = \bar{i} \,.\, \frac{2\pi}{T} \,.\, \cos \frac{2 \pi t}{T} = \bar{i} \,.\, z \,.\, \pi \,.\, \cos \frac{2 \pi t}{T},$$

więc:

$$e_t = \bar{i} \,.\, r \,.\, \sin \frac{2 \pi t}{T} + \bar{i} \,.\, z \pi L \,.\, \cos \frac{2 \pi t}{T} \quad \ldots \ldots \quad (a)$$

Wzór ten wskazuje, że napięcie, w zależności od czasu, wyraża się krzywą, której rzędne są sumą sinusoidy i cosinusoidy; suma ta tworzy zawsze sinusoidę, którą można wyrazić za pomocą wzoru:

$$e_t = A \,.\, \sin \left(\frac{2 \pi t}{T} + \varphi \right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (b)$$

Czynniki A i φ możemy wyznaczyć w sposób następujący: Z powyższego równania, po przekształceniu sinusa sumy kątów, otrzymamy:

$$e_t = A \,.\, \sin \frac{2 \pi t}{T} \,.\, \cos \varphi + A \,.\, \cos \frac{2 \pi t}{T} \,.\, \sin \varphi. \quad \ldots \ldots \quad (c)$$

Zestawiając równania (a) i (c), będziemy mieli:

$$A \,.\, \cos \varphi = \bar{i} \,.\, r,$$

$$A \,.\, \sin \varphi = \bar{i} \,.\, z \pi L.$$

Jeżeli uwzględnimy, że:

$$\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \text{tang}\, \varphi,$$

to z powyższych dwuch równań wynika, że:

$$\text{tang}\, \varphi = \frac{z \pi L}{r},$$

a następnie:

$$A^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = (\bar{i} \,.\, r)^2 + \bar{i}^2 \,.\, (z \pi L)^2.$$

Ponieważ:

$$\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1,$$

więc:

$$A = \bar{i} \, . \sqrt{r^2 + (z \pi L)^2}.$$

Podstawiając ten wyraz dla A w równaniu (b), otrzymamy dla napięcia na końcówkach przewodnika wzór następujący:

$$e_t = \bar{i} \, . \sqrt{r^2 + (z \pi L)^2} \, . \sin\left(\frac{2 \pi t}{T} + \varphi\right) \quad \ldots \ldots \ldots \text{(d)}$$

albo:

$$e_t = \bar{e} \, . \sin\left(\frac{2 \pi t}{T} + \varphi\right).$$

Z tego wzoru widzimy, że napięcie zmienia się sinusoidalnie i wyprzedza prąd o kąt φ, który stanowi różnicę faz pomiędzy prądem i napięciem.

Zakładając w równaniu (d):

$$\sin\left(\frac{2 \pi t}{T} + \varphi\right) = 1,$$

otrzymamy wartość maksymalną wielkości napięcia:

$$\bar{e} = \bar{i} \, . \sqrt{r^2 + (z \pi L)^2},$$

lub też czynne napięcie:

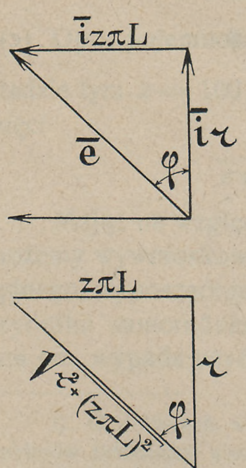
$$e = i \, . \sqrt{r^2 + (z \pi L)^2},$$

skąd:

$$i = \frac{e}{\sqrt{r^2 + (z \pi L)^2}}.$$

$\sqrt{r^2 + (z \pi L)^2}$ stanowi **całkowity opór przewodnika dla prądu zmiennego.** Wyraz ten inaczej nazywamy impendancją lub zawadą elektryczną.

Do tego samego wyniku można dojść jeszcze inną drogą.



Rys. 111 i 112.

Zwróćmy się do wzoru (a), wyrażającego napięcie e_t. Sinusoidę wypadkową, przedstawiającą zmienność napięcia e_t, możemy otrzymać, dodając wektory sinusoid składowych, przyczem należy mieć na względzie, że cosinusoida jest sinusoidą przesuniętą o ćwierć okresu naprzód. Na rys. 111 widzimy układ odpowiednich wektorów.

Z trójkąta prostokątnego wynika, że:

$$\bar{e} = \bar{i} \sqrt{r^2 + (z \pi L)^2},$$

$$\text{tang } \varphi = \frac{z \pi L}{r}.$$

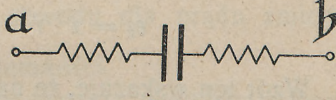
Układ wektorów wskazuje, że napięcie wyprzedza prąd o kąt φ. Kąt ten jest tym większy, im większy jest opór indukcyjny w porównaniu do oporu omicznego.

Wielkości czynne napięcia i prądu są $\sqrt{2}$ razy mniejsze

od maksymalnych, więc oczywiście ten sam trójkąt tylko w innej skali może być zastosowany do wielkości czynnych.

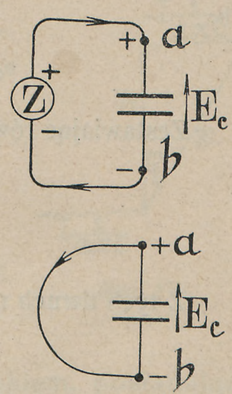
Podobny trójkąt (rys. 112) może służyć również do wyznaczenia oporu wypadkowego z oporów składowych.

6. Kondensator włączony w obwód za pomocą przewodników, posiadających opór omiczny. Obwód składa się z kondensatora o pojemności C i z przewodników, doprowadzających prąd, których opór omiczny wynosi r omów, samoindukcji nie uwzględniamy (rys. 113).



Rys. 113.

W celu zastosowania prawa Ohma w rozważanym przypadku, należy uprzytomnić sobie, że kondensator jest przyrządem, w którym odbywają się przemiany energji. [1]) Kondensator, połączony ze źródłem prądu o stałym napięciu, ładuje się (rys. 114), otrzymując pewną ilość energji. Stosownie do tego, co mówiliśmy o siłach elektromotorycznych w rozdziale IV, jest w nim wtedy czynna siła elektromotoryczna E_c, zwrócona przeciw prądowi.



Rys. 114 i 115.

Gdy okładki kondensatora naładowanego połączymy między sobą za pomocą drutu (rys. 115), prąd będzie przebiegał zgodnie z siłą elektromotoryczną E_c i kondensator będzie się wyładowywał, przetwarzając zawartą w nim energję na ciepło Joule'a.

Z powyższego rozumowania widzimy, że siła elektro motoryczna kondensatora jest odwrotna względem napięcia, o ile kierunek tegoż przyjmiemy od końcówki o wyższym potencjale do końcówki o potencjale niższym (od a do b wewnątrz kondensatora).

Wielkość siły elektromotorycznej E_c przyjmujemy za równą napięciu na końcówkach, ponieważ zakładamy, że przemiana energji w kondensatorze da się całkowicie wyrazić za pomocą siły elektromotorycznej E_c.

Mając te uwagi na względzie, wróćmy do obwodu, wskazanego na rys. 113. Załóżmy, że w obwodzie przebiega prąd sinusoidalny:

$$i_t = \bar{i} \,.\, \sin \frac{2\pi t}{T} \,.$$

Wtedy napięcie, istniejące na okładkach kondensatora, jak wiemy z przykładu 3 w niniejszym rozdziale, wynosi:

$$e_t' = \bar{i} \,.\, \frac{1}{z \pi C} \,.\, \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{2}\right).$$

Wobec tego siła elektromotoryczna kondensatora będzie:

$$E_{ct} = -e_t' ,$$

$$E_{ct} = \bar{i} \,.\, \frac{1}{z \pi C} \,.\, \cos \frac{2\pi t}{T} \,.$$

[1]) Patrz rozdział XXI.

Uwzględniając istnienie tej siły elektromotorycznej w kondensatorze, prąd w obwodzie ab (rys. 113), według prawa Ohma, wyrażamy wzorem:

$$i_t = \frac{e_t + E_{ct}}{r},$$

stąd:

$$e_t = i_t \cdot r - E_{ct}.$$

Podstawiając we wzór powyższy wyrazy dla i_t i E_{ct}, otrzymamy:

$$e_t = \bar{i} \cdot r \cdot \sin\frac{2\pi t}{T} - \bar{i} \cdot \frac{1}{z\pi C} \cdot \cos\frac{2\pi t}{T} \quad \ldots \ldots \quad (a)$$

Wzór ten wskazuje, że napięcie, w zależności od czasu, wyraża się krzywą, której rzędne są sumą sinusoidy i cosinusoidy; taka suma tworzy zawsze sinusoidę, którą można wyrazić wzorem:

$$e_t = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right), \quad \ldots \ldots \ldots \quad (b)$$

lub:

$$e_t = A \cdot \sin\frac{2\pi t}{T} \cdot \cos\varphi + A \cdot \cos\frac{2\pi t}{T} \cdot \sin\varphi \quad \ldots \quad (c)$$

Zestawiając równania (a) i (c), będziemy mieli:

$$A \cdot \cos\varphi = \bar{i} \cdot r,$$

$$A \cdot \sin\varphi = -\bar{i} \cdot \frac{1}{z\pi C}.$$

Z tych dwuch równań otrzymujemy:

$$\operatorname{tang}\varphi = -\frac{1}{r \cdot z\pi C},$$

$$A^2 \cdot (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \bar{i}^2 \cdot \left[r^2 + \left(\frac{1}{z\pi C}\right)^2\right].$$

a ponieważ:

$$\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1,$$

więc:

$$A = \bar{i} \cdot \sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{z\pi C}\right)^2}.$$

Podstawiając ten wyraz na A w równanie (b), otrzymamy dla napięcia na końcówkach ab wzór:

$$e_t = \bar{i} \cdot \sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{z\pi C}\right)^2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi\right). \text{ [1]}$$

Z tego wzoru widzimy, że napięcie na końcówkach ab zmienia się sinusoidalnie, spóźnia się jednak względem prądu o kąt φ, który stanowi różnicę faz pomiędzy prądem i napięciem.

---

[1]) Uwzględniamy tu, że kąt φ wypada ujemny.

Wielkość czynna napięcia będzie:

$$e = i \cdot \sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{z \pi C}\right)^2}.$$

Prąd zaś:

$$i = \frac{e}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{z \pi C}\right)^2}}.$$

$\sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{z \pi C}\right)^2}$ stanowi całkowity opór obwodu dla prądu zmiennego; opór ten składa się z oporu omicznego i oporu pojemności.

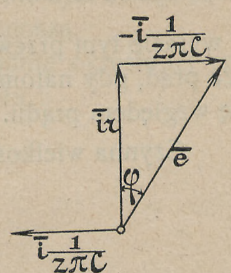
Do tego samego wyniku można dojść drogą dodawania wielkości sinusoidalnie zmiennych przy pomocy wektorów.

Zwróćmy się do wzoru (a). Wektor sinusoidy, wyrażającej napięcie e_t, otrzymamy, odejmując wektor cosinusoidy od wektora odpowiedniej sinusoidy.

Na rys. 116 widzimy układ wektorów i wynik odejmowania. Z trójkąta prostokątnego otrzymujemy:

$$\bar{e} = \bar{i} \cdot \sqrt{r^2 + \left(\frac{1}{z \pi C}\right)^2},$$

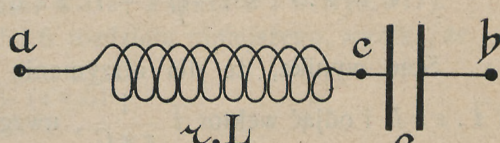
$$\operatorname{tang} \varphi = -\frac{1}{r \cdot z \pi C}.$$



Rys. 116.

Ten sam trójkąt może służyć w innej odpowiedniej skali do wyznaczenia związku pomiędzy wielkościami czynnemi lub też oporami.

7. Kondensator, włączony w szereg z przewodnikiem, posiadającym opór omiczny i samoindukcyjny. Zwojnica o oporze omicznym r i spółczynniku samoindukcji L włączona jest w szereg z kondensatorem o pojemności C (rys. 117).



Rys. 117.

W obwodzie tym są czynne dwie siły elektromotoryczne E_s i E_c, przeto prąd, według prawa Ohma, wyrazi się wzorem:

$$i_t = \frac{e_t + E_{st} + E_{ct}}{r},$$

stąd:

$$e_t = i_t \cdot r - E_{st} - E_{ct}.$$

Zakładając, że prąd jest zmienny sinusoidalnie, otrzymamy dla sił elektromotorycznych wzory następujące:

$$E_{st} = -\bar{i} \cdot z \pi L \cdot \cos \frac{2 \pi t}{T},$$

$$E_{ct} = \bar{i} \cdot \frac{1}{z \pi C} \cdot \cos \frac{2 \pi t}{T}.$$

Wprowadzając wyrażenia dla E_{st} i E_{ct} w równanie dla e_t, otrzymamy:

$$e_t = \bar{i} \cdot r \cdot \sin \frac{2\pi t}{T} + \bar{i}\left(z\pi L - \frac{1}{z\pi C}\right) \cdot \cos \frac{2\pi t}{T}.$$

Postępując podobnie jak w dwuch poprzednich przypadkach, możemy przekształcić powyższe wyrażenie. Wówczas otrzymamy:

$$e_t = \bar{i} \cdot \sqrt{r^2 + \left(z\pi L - \frac{1}{z\pi C}\right)^2} \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right),$$

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{z\pi L - \frac{1}{z\pi C}}{r}.$$

Z wyrazu powyższego widzimy, że napięcie zmienia się sinusoidalnie. Kąt φ może być tu dodatni lub ujemny, zależnie od znaku różnicy: $z\pi L - \frac{1}{z\pi C}$. Gdy w wyrazie tym przeważa wpływ samoindukcji, φ jest dodatni, i napięcie wyprzedza prąd, gdy natomiast, przeważa pojemność, φ jest ujemny — napięcie opóźnia się względem prądu.

Czynna wielkość prądu wyraża się wzorem:

$$i = \frac{e}{\sqrt{r^2 + \left(z\pi L - \frac{1}{z\pi C}\right)^2}}.$$

Mianownik tego wzoru stanowi wypadkowy opór obwodu.

Chcąc rozwiązać zagadnienie powyższe za pomocą dodawania wektorów, należy wzór e_t przedstawić w sposób następujący:

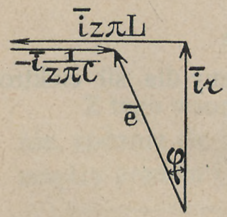
$$e_t = \bar{i} \cdot r \cdot \sin \frac{2\pi t}{T} + \bar{i} \cdot z\pi L \cdot \cos \frac{2\pi t}{T} - \bar{i} \cdot \frac{1}{z\pi C} \cdot \cos \frac{2\pi t}{T}.$$

Stąd wynika, że dla otrzymania wektora $\bar{e}$, należy dodać wektory $\bar{i} \cdot r$ i $\bar{i} \cdot z\pi L$ i odjąć wektor $\bar{i} \frac{1}{z\pi C}$, uwzględniając ich kierunki.

Na rys. 118 widzimy układ tych wektorów. Wypadkowy wektor $\bar{e}$ da się łatwo wyznaczyć z trójkąta prostokątnego, również jak i kąt φ:

$$\bar{e} = \bar{i}\sqrt{r^2 + \left(z\pi L - \frac{1}{z\pi C}\right)^2},$$

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{z\pi L - \frac{1}{z\pi C}}{r}.$$



Rys. 118.

Ten sam trójkąt w innej skali pozwala wyznaczyć wielkość czynną napięcia na końcówkach obwodu i opór wypadkowy.

8. Rezonans napięć. Przy rozważaniu obwodu (rys. 117), składającego się ze zwojnicy z oporem omicznym i samoindukcją, oraz z kondensatora, na szczególną uwagę zasługuje jeszcze przypadek, gdy wpływy samoindukcji i pojemności na przebieg prądu wzajemnie się znoszą.

Dostatecznie jest spojrzeć na wyprowadzone poprzednio równania dla i i tang φ, ażeby się przekonać, że przy:

$$z \pi L = \frac{1}{z \pi C},$$

$$i = \frac{e}{r}, \quad \text{a tang } \varphi = 0.$$

Obwód zachowuje się w ten sposób, jak gdyby zawierał tylko opór omiczny — r.

Taki przypadek nazywamy **rezonansem napięć.** Siły elektromotoryczne samoindukcji i pojemności, które zawsze mają kierunki przeciwne, [1]) tym razem są co do wielkości równe, a więc w równaniu prądu wzajemnie się znoszą.

Przy danych L i C rezonans zachodzi tylko przy dokładnie określonej częstości zmian prądu, czyniącej zadość wyżej podanemu równaniu.

Z tego równania wynika, że:

$$z = \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{1}{L \cdot C}}.$$

$$z = \frac{2}{T}, \text{ więc:}$$

$$T = 2 \pi \cdot \sqrt{L \cdot C}.$$

Wzór ten wyraża długość okresu zmienności prądu, przy której następuje rezonans.

W praktyce elektrotechnicznej duże znaczenie w przypadku rezonansu mają napięcia, jakie powstają pomiędzy punktami a i c, a także c i b (rys. 117).

Z tego, co było powiedziane w §§ 5 i 6 rozdziału niniejszego, wynika, że:

$$e_{ac} = i \cdot \sqrt{r^2 + (z \pi L)^2},$$

$$e_{cb} = i \cdot \frac{1}{z \pi C}.$$

Napięcia te przy odpowiednich warunkach mogą osiągnąć znaczne wartości przy niewielkim napięciu na końcówkach $a\,b$.

Przykład. Mamy obwód (rys. 117), w którym $r = 5\ \Omega$, $L = 1{,}5$ henry, $C = 2$ mikrofarady, a $i = 10$ amperów.

W tych warunkach rezonans zachodzić będzie, gdy: [2])

$$z = \frac{1}{3{,}14} \sqrt{\frac{1}{1{,}5 \cdot 2 \cdot 10^{-6}}} = 184.$$

---

[1]) Widzimy to ze wzorów, przytoczonych w § 7 niniejszego rozdziału.

[2]) Pojemność wyrażamy tu w faradach.

Całkowity opór zwojnicy ac jest wtedy:

$$\sqrt{r^2 + (z\pi L)^2} = 865\ \Omega.$$

Opór kondensatora będzie prawie taki sam, gdyż $z\pi L = \frac{1}{z\pi C}$, wpływ zaś oporu omicznego — r jest bardzo mały.

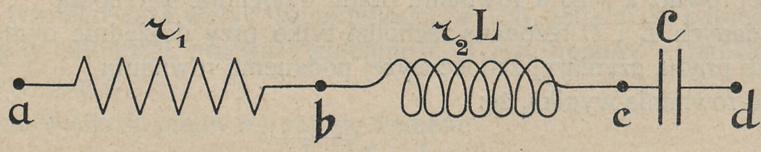
Na podstawie wyników tych obliczeń napięcie na końcówkach całego obwodu będzie:

$$e_{ab} = 10 \times 5 = 50\ V,$$

napięcie zaś na zwojnicy i na kondensatorze:

$$e_{cb} \text{ prawie } = e_{ac} = 10 \times 865 = 8650\ V.$$

9. Połączenie szeregowe różnych oporów. Część obwodu ad (rys. 119) składa się z oporu omicznego pomiędzy punktami a i b, oporu z samoindukcją



Rys. 119.

pomiędzy b i c i kondensatora pomiędzy punktami c i d. Opór omiczny w części ab jest r_1, a w części bc — r_2, spółczynnik samoindukcji L i pojemność kondensatora C.

Ponieważ prąd w danym przypadku nigdzie się nie rozgałęzia, siła jego pomiędzy końcówkami a i d w każdej chwili wszędzie jest jednakowa. Stąd wynika, że również wartość czynna prądu będzie wszędzie jednakowa i nie będzie różnicy faz pomiędzy prądami w rozmaitych miejscach.

Oznaczmy przez V z odpowiedniemi znaczkami potencjały w różnych punktach obwodu, a przez e — napięcia.

Mając na względzie wielkości w danej chwili t, możemy napisać równanie następujące: [1])

$$(V_{at} - V_{bt}) + (V_{bt} - V_{ct}) + (V_{ct} - V_{dt}) = (V_{at} - V_{dt}),$$

lub:

$$e_{abt} + e_{bct} + e_{cdt} = e_{adt}.$$

Z powyższych równań wynika, że, chcąc otrzymać napięcie czynne e_{ad}, należy dodać geometrycznie napięcia czynne e_{ab}, e_{bc} i e_{cd}.

Na rys. 120 wskazany jest układ wektorów, wyrażających składowe napięcia i prąd i, a na rys. 121 — dodawanie tych wektorów. Wypadkowy wektor $\overline{BC}$ wyraża napięcie e_{ad}.

[1]) Usuwając nawiasy, łatwo się przekonamy, że lewa strona równania równa się prawej.

Z trójkąta ABC mamy:

$$\overline{BC}^2 = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2}.$$

Z wywodów w paragrafach poprzednich wiemy, że:

$$e_{ab} = i \, . \, r_1,$$

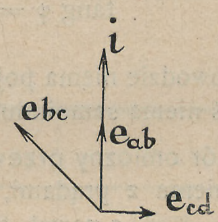
$$e_{cd} = i \, . \, \frac{1}{z \pi C};$$

rzut wektora e_{bc} na kierunek wektora prądu równa się:

$$i \, . \, r_2,$$

rzut zaś tego samego wektora na kierunek prostopadły do wektora prądu równa się:

$$i \, . \, z \pi L.$$



Rys. 120.



Rys. 121.

Mając to na uwadze, łatwo spostrzeżemy z rys. 121, że:

$$\overline{AB} \text{ wyraża } i \, . \, z \pi L - i \, . \, \frac{1}{z \pi C}$$

$$\text{i} \quad \overline{AC} \text{ wyraża } i \, . \, r_1 + i \, . \, r_2,$$

więc:

$$e_{ad} = \sqrt{\left(i \, . \, r_1 + i \, . \, r_2\right)^2 + \left(i \, . \, z \pi L - i \, . \, \frac{1}{z \pi C}\right)^2},$$

lub:

$$e_{ad} = i \, . \, \sqrt{\left(r_1 + r_2\right)^2 + \left(z \pi L - \frac{1}{z \pi C}\right)^2}$$

Różnica faz pomiędzy e_{ad} i i wyraża się kątem φ. Według rys. 121:

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{z \pi L - \frac{1}{z \pi C}}{r_1 + r_2}.$$

Na podstawie tego przykładu łatwo ułożyć wzór ogólny dla obwodu, składającego się z dowolnej liczby różnych oporów, połączonych w szereg.

Załóżmy, że w pewnym obwodzie nierozgałęzionym istnieje szereg oporów omicznych: r_1, $r_2 \ldots r_n$, oporów indukcyjnych ze spółczynnikami L_1, $L_2 \ldots L_n$ i pojemności: C_1, $C_2 \ldots C_n$.

Z powyższego przykładu widzimy, że wektory, wyrażające iloczyny: $i \, . \, r$ skierowane są wszystkie zgodnie z wektorem prądu, natomiast iloczyny $i \, . \, z \pi L$ i $i \, . \, \frac{1}{z \pi C}$ skierowane są do niego prostopadle, lecz w strony przeciwne, na rys 121 $i \, . \, z \pi L$ w lewo, a $i \, . \, \frac{1}{z \pi C}$ w prawo.

Przy takim układzie wektorów, napięcie na końcach obwodu będzie:

$$e = i\sqrt{(\Sigma\, r)^2 + \left(z\pi\, \Sigma\, L - \frac{1}{z\pi}\sum\frac{1}{C}\right)^2}.$$

Kąt, wyrażający różnicę faz pomiędzy napięciem e i prądem i, obliczymy według wzoru:

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{z\pi\,.\,\Sigma\, L - \frac{1}{z\pi}\sum\frac{1}{C}}{\Sigma\, r}.$$

Gdy w obwodzie niema pojemności, należy zamiast C podstawić nieskończoność, jeżeli zaś niema samoindukcji, to zamiast L zero.

10. Opór omiczny przewodników dla prądów szybkozmiennych. Jeżeli mamy do czynienia z prądami, których kierunki zmieniają się miljony, tysiące, a nawet chociażby tylko setki razy na sekundę, to łatwo spostrzegamy wpływ siły elektromotorycznej samoindukcji powstającej wewnątrz przewodnika z prądem, na rozkład siły prądu w przekroju poprzecznym tego przewodnika.



Rys. 122.



Rys. 123.

Rozważmy przewodnik znacznej grubości, w którym przebiega prąd o sile stopniowo wzrastającej. W tych warunkach, jak wiemy, powstaje w przewodniku siła elektromotoryczna samoindukcji przeciwna prądowi. Ta siła elektromotoryczna w przekroju poprzecznym przewodnika nie jest wszędzie jednakowa. Największa siła elektromotoryczna samoindukcji działa wzdłuż osi A przewodnika, najmniejsza zaś na obwodzie.

Stwierdzić to można, opierając się np. na wyobrażeniu o indukcji, jako o skutku przecinania przewodników przez linje magnetyczne.

Przewodnik o przekroju pełnym (rys. 122) można przedstawić sobie jako wiązkę oddzielnych drutów (rys. 123), w których płyną prądy składowe, stanowiące razem prąd pełnego przewodnika.

W każdym z poszczególnych drutów powstawać będzie siła elektromotoryczna indukcji pod wpływem własnych linji magnetycznych i linij drutów otaczających.

Jeżeli założymy, że wszystkie prądy składowe są siły jednakowej, to najsilniejsze działanie indukcyjne będzie na drut A, znajdujący się w środku, ponieważ średnia odległość tego drutu od innych jest najmniejsza.

Pod wpływem takiego rozkładu sił elektromotorycznych indukcji, gęstość prądu (siła prądu przypadająca na 1 cm^2 przekroju drutu) będzie oczywiście niejednakowa w całym przekroju. W pobliżu powierzchni drutu gęstość będzie największa.

Skupienie się prądu w pobliżu powierzchni przewodników spostrzegł pierwszy lord Kelvin. Nazywa on to zjawisko „skin-offect", co w tłomaczeniu dosłownem znaczy **działanie naskórkowe**.

Pod wpływem tej własności prądów szybko zmiennych, opór omiczny przewodników dla takich prądów nie da się obliczyć według wzoru:

$$r = \rho \frac{l}{q}. \text{[1]}$$

W tym przypadku uwzględnić należy, że gęstość prądu jest różna w różnych miejscach przekroju. Zwykle opór obliczony według powyższego wzoru należy pomnożyć przez spółczynnik większy od jedności.

W tablicy poniższej podany jest ów spółczynnik a dla drutów miedzianych przy różnej wartości stosunku $\frac{d^2}{T}$. [2]

$\frac{d^2}{T}$	a	$\frac{d^2}{T}$	a
0	1,0000	1620	1,8628
20	1,0000	2000	2,0430
80	1,0001	2420	2,2190
180	1,0258	2880	2,3937
320	1,0805	5120	3,0956
500	1,1747	8000	3,7940
720	1,3180	18000	5.5732
980	1,4920	32000	7,3250
1280	1,6778		

Przy $\frac{d^2}{T} > 32000$ opór omiczny drutu okrągłego równy jest oporowi rury, której średnica zewnętrzna równa się średnicy drutu pełnego, a grubość ścianki wynosi $6{,}38 \sqrt{T}$ *cm.*

Dla uniknięcia działania naskórkowego, przewodniki dla prądów bardzo szybko zmiennych (np. w przyrządach do telegrafji bez drutu) wykonywane są z tasiemek metalowych, lub też plecione z cienkich drucików w ten sposób, by działania indukcyjne jednych drucików na drugie nawzajem się znosiły.

Gdy chodzi o prądy bardzo silne i duże przekroje przewodów, to nawet w razie stosowania prądów o normalnym okresie $^1/_{50}$ sek., należy mieć na względzie omawiane zjawisko. Wtedy zamiast grubych sztab o pełnym przekroju stosują się rury, albo grupy cienkich pasków miedzianych.

Przewodniki żelazne, posiadające wielką przenikliwość magnetyczną, wykazują w znacznie wyższym stopniu omawiane własności. Z tego względu przy prądach zmiennych należy unikać ich stosowania.

---

[1]) Patrz str. 22.

[2]) d — średnica drutu w *cm*, T okres zmienności prądu w sekundach. Liczby podane są według tablicy znajdującej się w książce: „Leçons sur l'électricité" Er. Gerard.

ROZDZIAŁ XIV.

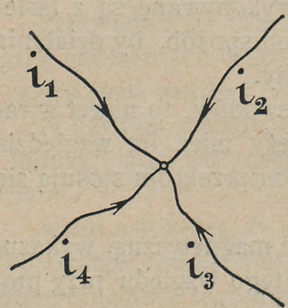
Prawa Kirchhoffa dla prądów zmiennych.

W rozdziale XI były podane wzory ogólne praw Kirchhoffa, dotyczące wszelkich prądów, mających niezmienną wartość na całej długości przewodników bez rozgałęzień.

Wzory rzeczone stosują się do wartości chwilowych prądów i sił elektromotorycznych, w praktyce jednak mamy zwykle do czynienia z wartościami czynnemi. Należy więc dla prądów zmiennych wyrazić prawa Kirchhoffa z uwzględnieniem czynnych wartości prądów i sił elektromotorycznych.

1. Prawo pierwsze. Dla wielkości chwilowych prądów, schodzących się w jednym punkcie, pierwsze prawo Kirchhoffa wyraża się w sposób następujący: suma algebraiczna prądów, w danej chwili schodzących się w jednym punkcie, równa się zeru, o ile przypływające prądy wprowadzamy do sumy z pewnym znakiem, a odpływające ze znakiem przeciwnym.

Rozważmy prądy, dopływające do jednego punktu (rys. 124) i zmieniające się według prawa sinusoidy. Przy wykreślaniu sinusoid za kierunki dodatnie przyjmiemy kierunki, wskazane strzałkami na rys. 124. Wszystkie te kierunki zwrócone są do punktu rozgałęzienia. Sinusoidy, wyrażające zmienność omawianych prądów, widzimy na rys. 125.



Rys. 124.

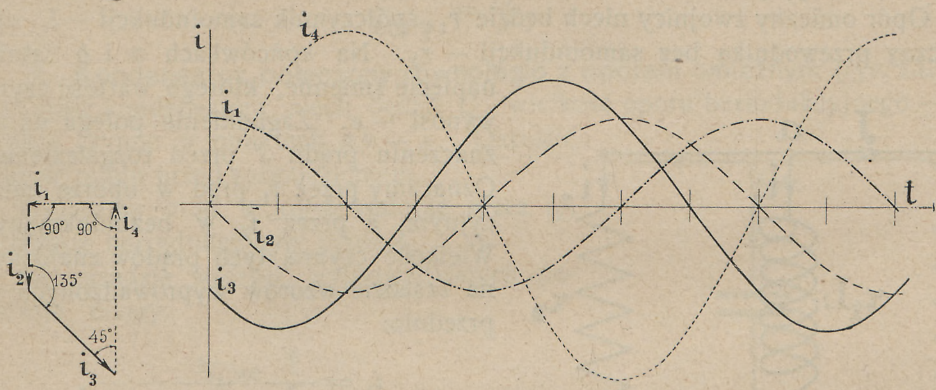
Na zasadzie przytoczonego powyżej prawa suma algebraiczna rzędnych tych sinusoid w każdej chwili jest równa zeru. Możemy więc powiedzieć, że suma tych sinusoid stanowi sinusoidę, której rzędne równają się zeru.

Według rozdziału XL, chcąc dodać sinusoidy, możemy posługiwać się wektorami, nakreślonemi pod odpowiednimi kątami. Wektor wypadkowy, który otrzymamy, dodając wektory składowe, odpowiada sinusoidzie wypadkowej.

Rzędne sinusoidy wypadkowej, jak to zaznaczyliśmy powyżej, równają się zeru, przeto i wektor wypadkowy będzie równy zeru. Na rys. 125 z lewej strony widzimy układ wektorów składowych, tworzących wielobok zamknięty.

Za pomocą tych wektorów możemy wyrazić wielkości maksymalne prądów, lub też proporcjonalne do maksymalnych wielkości czynne prądów. Pierwsze

więc prawo Kirchhoffa dla wielkości czynnych prądów wyrażamy w sposób następujący: **Suma geometryczna wielkości czynnych prądów, schodzących się w jednym punk-**



Rys. 125.

cie, równa się zeru, jeżeli przy wykreślaniu sinusoid kierunek dodatni został obrany dla wszystkich sinusoid jednakowy: do punktu lub od punktu zbieżności prądów.

2. Prawo drugie. Dla chwilowych wartości prądów i sił elektromotorycznych drugie prawo Kirchhoffa wyraża się jak następuje: dla każdego obwodu zamkniętego, istniejącego w sieci krzyżujących się przewodników, suma algebraiczna iloczynów z chwilowych sił prądów, w poszczególnych częściach obwodu, i oporów omicznych tych części równa się sumie algebraicznej wszystkich sił elektromotorycznych, działających w danej chwili w tymże obwodzie zamkniętym. Prądy i siły elektromotoryczne, zwrócone w pewnym kierunku, przyjętym przy obiegu wokoło obwodu zamkniętego, otrzymują w równaniu znak dodatni, zwrócone zaś w stronę odwrotną — znak ujemny.

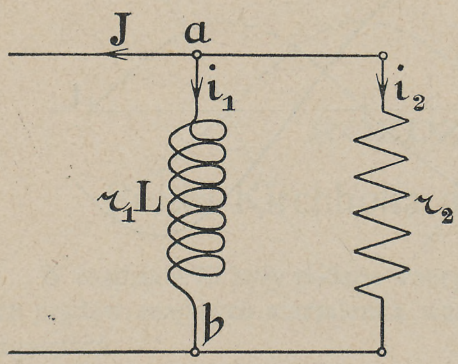
Wyrażając prądy i siły elektromotoryczne zmienne za pomocą sinusoid i dodając te ostatnie zgodnie z treścią przytoczonego powyżej prawa, można znowu wykonać dodawanie wektorów, wyrażając długością tych wektorów wartości czynne.

Zatem dla wartości czynnych prądów zmiennych prawo powyższe wyrażone być może w sposób następujący: **dla każdego obwodu zamkniętego, istniejącego w sieci krzyżujących się przewodników, suma geometryczna iloczynów z wartości czynnych sił prądów, w poszczególnych częściach obwodu przez opory omiczne tych części równa się sumie geometrycznej wartości czynnych wszystkich sił elektromotorycznych działających w tymże obwodzie zamkniętym.** Przy wykreślaniu sinusoid dla wszystkich prądów i sił elektromotorycznych powinien być przyjęty jednakowy kierunek dodatni wokoło obwodu.

W dalszym ciągu rozważymy kilka przykładów zastosowania praw Ohma i Kirchhoffa do prądów zmiennych.

3. Przewodnik z samoindukcją, połączony równolegle z oporem omicznym. Opór rozgałęziony (rys. 126) posiada zwojnicę połączoną równolegle z oporem bezindukcyjnym.

Opór omiczny zwojnicy niech będzie r_1, spółczynnik samoindukcji — L, opór omiczny przewodnika bez samoindukcji — r_2. Na końcówkach a i b istnieje napięcie zmienne, którego wartość czynna wynosi — e. Zagadnienie polega na wyznaczeniu prądu J przed rozgałęzieniem. Oznaczmy przez i_1 prąd w oporze indukcyjnym, a przez i_2 w bezindukcyjnym. Wielkość czynną tych prądów znajdziemy na zasadzie wzorów wyprowadzonych poprzednio:



Rys. 126.

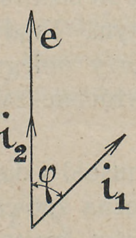
$$i_1 = \frac{e}{\sqrt{r_1^2 + (z \pi L)^2}},$$

$$i_2 = \frac{e}{r_2}.$$

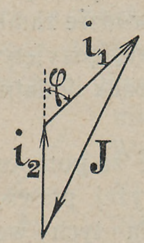
Prąd i_2 jest zgodny, co do fazy, z napięciem e, a prąd i_1 spóźnia się względem e o kąt φ, którego wielkość obliczymy ze wzoru:

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{z \pi L}{r_1}.$$

Układ wektorów e, i_1, i_2 wskazuje rys. 127. Kierunki dodatnie prądów przy wykreślaniu sinusoid przyjęto wskazane na rys. 126; na zasadzie więc pierwszego prawa Kirchhoffa bok trójkąta, wykreślonego na rys. 128, wyraża wielkość prądu J. Otrzymamy wtedy:



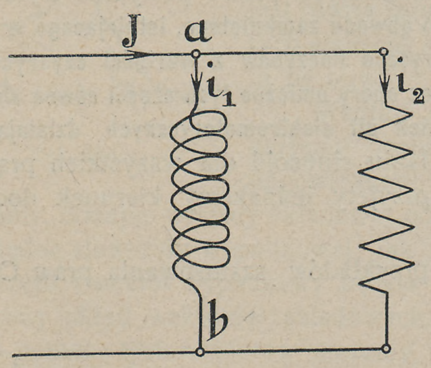
Rys. 127.



Rys. 128.

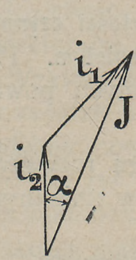
$$J = \sqrt{i_1^2 + i_2^2 + 2\, i_1\, i_2 \cos \varphi}.$$

Gdybyśmy przyjęli kierunek odwrotny za dodatni dla prądu J (rys. 129), to wektor J w trójkącie miałby kierunek inny, wskazany na rys. 130. Układ wektorów w tym trójkącie oznacza, że prąd J jest sumą geometrączną prądów i_1 i i_2.

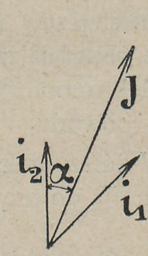


Rys. 129.

Na rys. 131 wektory i_1, i_2, J po-



Rys. 130.

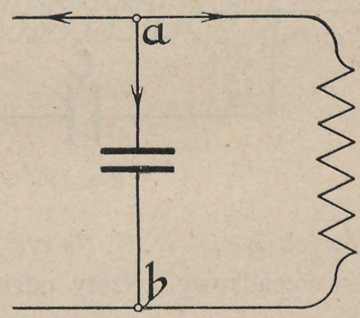


Rys. 131.

prowadzone są z jednego punktu. Kąt α, określający fazę prądu J, może być obliczony z powyższego trójkąta na zasadzie wzoru:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \varphi} = \frac{i_1}{J}.$$

4. **Kondensator, połączony równolegle z oporem omicznym** (rys. 132) [1]. Pojemność kondensatora niech będzie C, wielkość oporu bezindukcyjnego — r, napięcie czynne w punktach ab — e. Określić wielkość prądu przed rozgałęzieniem.



Rys. 132.

Oznaczmy prąd w kondensatorze przez i_2, a w oporze bezindukcyjnym przez i_1.

Na zasadzie wzorów, wyprowadzonych poprzednio, mamy:

$$i_1 = \frac{e}{r}.$$

$$i_2 = \frac{e}{\frac{1}{z \pi C}}.$$

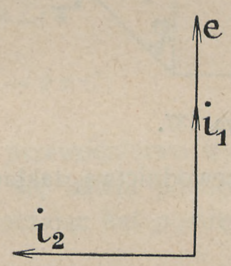
Wektory napięcia e i prądów i_1 i i_2 wskazuje rys. 133, wiadomo bowiem, że prąd w oporze bezindukcyjnym zgodny jest, co do fazy, z napięciem, a w kondensatorze wyprzedza napięcie o 90°.

Za kierunki dodatnie prądów przyjmujemy wskazane na rys. 132; wtedy bok trójkąta, przedstawionego na rys. 134, wyraża wielkość czynną prądu J:

$$J = \sqrt{i_1^2 + i_2^2},$$

a więc:

$$J = e \sqrt{\left(\frac{1}{r}\right)^2 + (z \pi C)^2}.$$



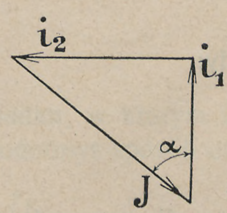
Rys. 133.

Zamieniając dodatni kierunek prądu J na odwrotny, otrzymamy wektory i_1, J, i_2, wskazane na rys. 135. Fazę prądu J określa kąt α, który łatwo obliczyć z trójkąta wskazanego na rys. 134:

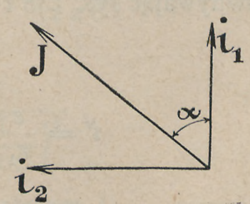
$$\text{tang}\, \alpha = \frac{i_2}{i_1},$$

albo:

$$\text{tang}\, \alpha = r \,.\, z \pi C.$$



Rys. 134.

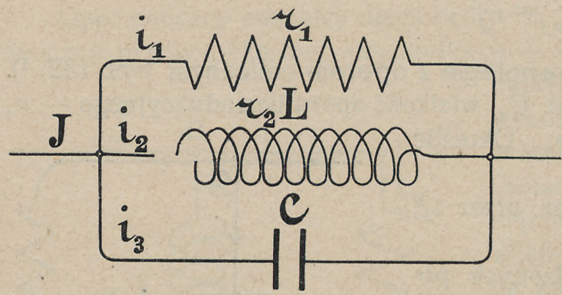


Rys. 135.

5. **Kilka obwodów połączonych równolegle.** Rozważmy układ obwodów, wskazany na rys. 136. Opór bezindukcyjny r_1 jest tu połą-

[1]) Oporu przewodników, łączących punkty a i b z kondensatorem, nie bierzemy pod uwagę.

czony równolegle z przewodnikiem, mającym opór omiczny r_2, a spółczynnik samoindukcyi L, i z kondensatorem o pojemności C.

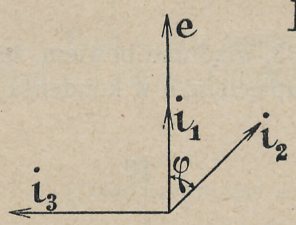


Rys. 136.

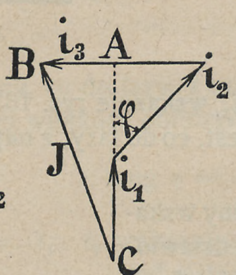
W takim układzie dla każdej z równoległych części obwodu mamy napięcie na końcach te same, lecz prądy będą różne.

Na zasadzie wywodów, podanych w rozdziale XIII, wskazany jest na rys. 137 układ wektorów poszczególnych prądów i napięcia.

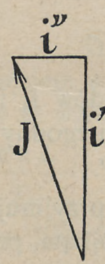
Według pierwszego prawa Kirchhoffa, prąd J w nierozgałęzionej części obwodu równa się sumie geometrycznej prądów składowych i_1, i_2, i_3. [1]) Na rys. 138 dodane są trzy wektory i_1, i_2 i i_3, wektor zaś J jest wypadkowy. Rzuty odcinka $\overline{BC}$, stanowiącego wektor J, na kierunki poziomy i pionowy będą: $\overline{BA}$ i $\overline{AC}$. Oznaczmy rzut pionowy przez i', a poziomy przez i'', wtedy z trójkąta rys. 139:



Rys. 137.



Rys. 138.



Rys. 139.

$$J = \sqrt{(i')^2 + (i'')^2}.$$

W celu wyznaczenia prądu wypadkowego, wprowadzimy odpowiednie oznaczenia przewodnictwa, zakładając:

$$J = eK,$$
$$i' = eK_1,$$
$$i'' = eK_2.$$

Wtedy:

$$eK = \sqrt{(eK_1)^2 + (eK_2)^2},$$

czyli:

$$K = \sqrt{K_1^2 + K_2^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Wyrazy dla przewodnictw K_1 i K_2 znajdziemy w sposób następujący: Porównywając rys. 138 i 139, prąd i' można wyrazić wzorem:

$$i' = i_1 + i_2 \,.\, \cos\varphi,$$

albo:

$$i' = \frac{e}{r_1} + \frac{e}{\sqrt{r_2^2 + (z\pi L)^2}} \,.\, \cos\varphi.$$

---

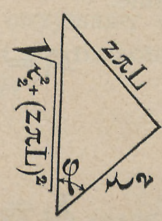
[1]) Za dodatni kierunek dla prądów składowych przyjmujemy np. kierunek od punktu rozgałęzienia, a za dodatni dla prądu J — kierunek do punktu rozgałęzienia.

Z rys. 140 widzimy, że:

$$\cos\varphi = \frac{r_2}{\sqrt{r_2^2 + (z\pi L)^2}},$$

więc:

$$i' = \frac{e}{r_1} + \frac{e \, . \, r_2}{r_2^2 + (z\pi L)^2}.$$



Rys. 140.

Podobnież:

$$i'' = \frac{e}{\sqrt{r_2^2 + (z\pi L)^2}} \, . \, \sin\varphi - \frac{e}{\frac{1}{z\pi C}}.$$

Z rys. 140 widzimy, że:

$$\sin\varphi = \frac{z\pi L}{\sqrt{r_2^2 + (z\pi L)^2}}.$$

Tym sposobem:

$$i'' = \frac{e \, . \, z\pi L}{r_2^2 + (z\pi L)^2} - e \, . \, z\pi C.$$

Z tych wyrażeń dla i' i i'' wynika, że:

$$K_1 = \frac{i'}{e} = \frac{1}{r_1} + \frac{z\pi L}{r_2^2 + (z\pi L)^2},$$

$$K_2 = \frac{i''}{e} = \frac{z\pi L}{r_2^2 + (z\pi L)^2} - z\pi C.$$

Mając przewodnictwa składowe, łatwo obliczyć przewodnictwo wypadkowe, a znając napięcie — siłę prądu. Faza prądu określi się kątem pomiędzy e i J czyli i' i J. Z trójkąta na rys. 139 widzimy, że, oznaczając kąt pomiędzy e i J przez α, możemy napisać:

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{i''}{i'} = \frac{K_2}{K_1}.$$

Przechodząc od rozważanego przykładu do przypadku, w którym i w obwodzie kondensatora mamy jeszcze opór omiczny r_3, w podobnyż sposób otrzymamy

$$K_1 = \frac{1}{r_1} + \frac{r_2}{r_2^2 + (z\pi L)^2} + \frac{r_3}{r_3^2 + \left(\frac{1}{z\pi C}\right)^2},$$

$$K_2 = \frac{z\pi L}{r_2^2 + (z\pi L)^2} - \frac{\frac{1}{z\pi C}}{r_3^2 + \left(\frac{1}{z\pi C}\right)^2}.$$

Przewodnictwo K_1 nazywamy **roboczym**, a K_2 **jałowym**. [1])

Przy większej liczbie oporów bezindukcyjnych, indukcyjnych i kondensatorów

---

[1]) Patrz rozdział XXV § 1 o wyrażeniach mocy prądu zmiennego.

połączonych równolegle, możemy dodawać przewodnictwa robocze i jałowe oddzielnie:

$$K_1 = \sum \frac{1}{r_1} + \sum \frac{r_2}{r_2^2 + (z\pi L)^2} + \sum \frac{r_3}{r_3^2 + \left(\frac{1}{z\pi C}\right)^2}.$$

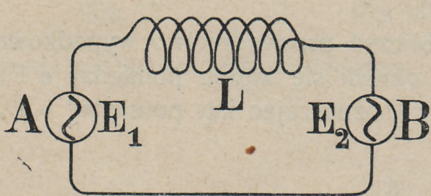
$$K_2 = \sum \frac{z\pi L}{r_2^2 + (z\pi L)^2} - \sum \frac{\frac{1}{z\pi C}}{r_3^2 + \left(\frac{1}{z\pi C}\right)^2}.$$

Jeszcze inne wzory otrzymamy, jeżeli przewodniki, prowadzące prąd do kondensatorów, mają samoindukcję, i spółczynnik samoindukcji jest L'. Wtedy:

$$K_1 = \sum \frac{1}{r_1} + \sum \frac{r_2}{r_2^2 + (z\pi L)^2} + \sum \frac{r_3}{r_3^2 + \left(z\pi L' - \frac{1}{z\pi C}\right)^2}.$$

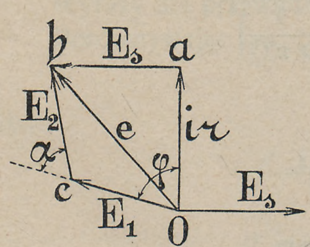
$$K_2 = \sum \frac{z\pi L}{r_2^2 + (z\pi L)^2} + \sum \frac{z\pi L' - \frac{1}{z\pi C}}{r_3^2 + \left(z\pi L' - \frac{1}{z\pi C}\right)^2}.$$

6. Dwa źródła prądu w połączeniu szeregowem z samoindukcją. W obwodzie zamkniętym, o oporze omicznym r, i spółczynniku samoindukcji L, znajdują się dwa źródła prądu zmiennego, w których działają siły elektromotoryczne E_1 i E_2 (rys. 141). Znając opór omiczny obwodu, spółczynnik samoindukcji tegoż i siły elektromotoryczne E_1 i E_2, możemy wyznaczyć siłę prądu w obwodzie.



Rys. 141.

Siły elektromotoryczne powinny być nam znane co do wielkości i różnicy faz, jaka zachodzi między niemi, a także liczby okresów na sekundę. Zakładamy, że okres zmienności tych sił elektromotorycznych jest jednakowy.



Rys. 142.

Zastosujmy do rozważanego obwodu drugie prawo Kirchhoffa. W obwodzie tym, oprócz sił elektromotorycznych źródeł prądu, czynna jest jeszcze siła elektromotoryczna samoindukcji. Z wywodów w § 2 rozdziału XIII wiemy, że gdy prąd jest zmienny sinusoidalnie, siła elektromotoryczna samoindukcji zmienia się według cosinusoidy, w ten sposób, że gdy:

$$i_t = \bar{i} \,.\, \sin \frac{2\pi t}{T},$$

to:

$$E_{st} = -i \,.\, z\pi L \,.\, \cos \frac{2\pi t}{T}.$$

Wzór ten wskazuje, że gdy wektor prądu będzie np. pionowy, to wektor siły elektromotorycznej E_s — poziomy, zwrócony w prawo.

Mając to na uwadze i stosując drugie prawo Kirchhoffa, otrzymamy wielobok *Ocba* (rys 142), który wyraża, że suma geometryczna sił elektromotorycznych, czynnych w zamkniętym obwodzie, równa się iloczynowi ir.

Z trójkąta *Obc* otrzymujemy:

$$e = \sqrt{E_1^2 + E_2^2 + 2\,E_1\,E_2 \cdot \cos\alpha}\,.$$

Wszystkie wielkości, znajdujące się pod znakiem pierwiastka, są znane, można więc obliczyć e.

Wielkość E_s otrzymamy ze wzoru:

$$E_{st} = -\,\bar{i} \,.\, z\,\pi\,L \,.\, \cos\frac{2\,\pi\,t}{T}\,,$$

$$E_s = i \,.\, z\,\pi\,L\,.$$

Więc z trójkąta *Oab*:

$$i = \frac{e}{\sqrt{r^2 + (z\,\pi\,L)^2}}\,.$$

Fazę zaś prądu określimy np. za pomocą kąta $\varphi = \sphericalangle\,(i,\,E_1)$.

$$\varphi = \sphericalangle\,(i,\,e) + \sphericalangle\,(e\,,\,E_1)\,.$$

$$\operatorname{tang} \sphericalangle\,(i,\,e) = \frac{z\,\pi\,L}{r}\,,$$

$$\text{a} \qquad \sin \sphericalangle\,(e\,,\,E_1) = \frac{E_2}{e} \,.\, \sin\alpha.$$

Można też wyznaczyć siłę prądu i sposobem wykreślnym. Przy zadanych wielkościach E_1, E_2 i α budujemy trójkąt *Ocb*, na którego boku *Ob* kreślimy następnie trójkąt *Oba*, wiedząc, że:

$$a\,b : O\,a = z\,\pi\,L : r\,.$$

Znając iloczyn ir, wyrażony wektorem *Oa*, łatwo obliczyć prąd.

CZĘŚĆ IV.

Przemiany energji w obwodach prądu elektrycznego.

ROZDZIAŁ XV.

Uwagi ogólne, dotyczące przemian energji, jakie zachodzą w obwodzie prądu elektrycznego.

Gdy prąd elektryczny przebiega po obwodzie, wokoło tegoż zachodzą zawsze przemiany energji. Mianowicie energja w pewnej postaci znika, a powstaje w innej, lub też postać energji pozostaje bez zmiany, lecz energja znika w pewnym miejscu, a powstaje w innym.

Pomiędzy energją znikającą i energją powstajacą prąd elektryczny odgrywa rolę pośrednika.

Mówimy zwykle, że energja, dopływająca zzewnątrz do obwodu i znikająca w nim, wytwarza pracę prądu elektrycznego. Skutkiem zaś tej pracy prądu powstają i wydzielają się na zewnątrz obwodu inne postacie energji.

Ze wszystkich przemian energji, zachodzących w obwodzie prądu elektycznego, wyróżniamy ciepło Joule'a; ilość tego ciepła, proporcjonalna do **drugiej** potęgi siły prądu, jest niezależna od kierunku prądu elektrycznego. Wszystkie inne przemiany energji zmieniają swój znak przy zmianie kierunku prądu; gdy przy jednym kierunku prądu pewna energja jest pochłaniana, to przy odwrotnym kierunku prądu wydziela się. Ilość energji wydzielona lub pochłonięta w przemianach energji tego rodzaju jest proporcjonalna do **pierwszej potęgi** siły prądu.

Jak wiemy z poprzednich rozdziałów, praca prądu w czasie dt, wytwarzająca ciepło Joule'a, wyraża się wzorem:

$$i_t^2 \cdot r \cdot dt,$$

gdzie i_t — siła prądu w chwili t, a r — opór omiczny obwodu.

Pracę zaś, wytwarzającą lub pochłaniającą energję w innych przypadkach przedstawiamy w postaci iloczynu:

$$\pm E_t \,.\, i_t \,.\, dt,$$

gdzie E_t — siła elektromotoryczna, i_t — siła prądu w chwili t.

Jeżeli zaś chodzi o pracę prądu, wykonaną w jakiejkolwiek części obwodu w czasie dt, to wyrażamy ją najczęściej wzorem:

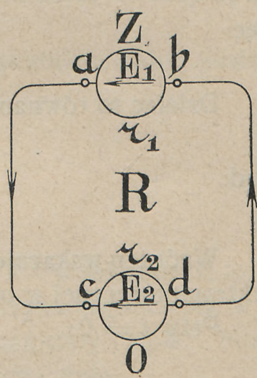
$$e_t \,.\, i_t \,.\, dt,$$

gdzie e_t oznacza napięcie na końcach tej części obwodu w chwili t, a i_t — siłę prądu, jednakową na całej długości tej części obwodu.

Ogólny przypadek przemian energji, zachodzących w obwodzie prądu elektrycznego, przedstawić możemy w sposób następujący.

Weźmy na uwagę obwód (rys. 143), gdzie Z jest to źródło prądu, t. j. przyrząd, w którym energja w pewnej postaci wytwarza pracę prądu, O — odbieracz prądu, t. j. przyrząd, w którym skutkiem pracy prądu wytwarza się energja.

Niech będzie E_1 siła elektromotoryczna źródła prądu, E_2 — siła elektromotoryczna w odbieraczu, r_1 — opór wewnętrzny źródła prądu, r_2 — opór wewnętrzny odbieracza, R — opór przewodników, łączących odbieracz ze źródłem prądu, e_1 — napięcie na końcówkach źródła prądu a, b, e_2 — napięcie na końcówkach odbieracza c, d i wreszcie i — siła prądu.



Rys. 143.

Całkowitą moc prądu, wytworzoną w źródle, wyrażamy wzorem:

$$E_1 \,.\, i.$$

Część tej mocy, z powodu oporu omicznego tego źródła, zamieni się na ciepło wewnątrz źródła prądu, a mianowicie:

$$i^2 \,.\, r_1.$$

Do obwodu zewnętrznego względem źródła prądu przejdzie moc:

$$E_1 \,.\, i - i^2 \,.\, r_1.$$

Moc prądu w części obwodu $acdb$ może być wyrażona inaczej iloczynem:

$$e_1 \,.\, i.$$

Tym sposobem:

$$e_1 \,.\, i = E_1 \,.\, i - i^2 \,.\, r_1.$$

Dzieląc równanie powyższe przez i, otrzymamy:

$$e_1 = E_1 - i \,.\, r_1.$$

Iloczyn ir_1 nazywamy stratą napięcia wewnątrz źródła prądu. Wzór powyższy wskazuje, że napięcie na końcówkach źródła prądu jest zawsze o tę stratę napięcia mniejsze od siły elektromotorycznej tego źródła. Stąd wynika, że przy:

$$i = 0, \quad e_1 = E_1.$$

Moc prądu w obwodzie *acdb* wytwarza w przewodnikach, łączących źródło prądu z odbieraczem, ciepło. Moc równoważną ilości ciepła, które wytwarza się w jednostce czasu, przedstawia wzór:

$$i^2 . R.$$

Odbieracz otrzymuje tylko:

$$e_1 . i - i^2 . R = e_2 . i.$$

Dzieląc zaś to równanie przez i, będziemy mieli:

$$e_1 - i . R = e_2,$$

gdzie $i . R$ stanowi tak zwany spadek napięcia w przewodach.

Oczywiście, gdy $i = 0$:

$$e_1 = e_2.$$

Z tej mocy prądu, która dostaje się do odbieracza, jeszcze część jej wytwarza ciepło w samym odbieraczu pod wpływem jego oporu omicznego r_2. Reszta mocy:

$$e_2 . i - i^2 . r_2$$

wytwarza energję, której moc wyrażamy wzorem:

$$E_2 . i,$$

więc:

$$E_2 . i = e_2 . i - i^2 . r_2.$$

Dzieląc to równanie przez i, otrzymamy:

$$E_2 = e_2 - i . r_2,$$

skąd:

$$e_2 = E_2 + i . r_2.$$

Wzór ten wskazuje, że napięcie na końcówkach odbieracza jest większe od siły elektromotorycznej w odbieraczu o spadek napięcia $i . r_2$ wewnątrz odbieracza.

Przy $i = 0$:

$$e_2 = E_2.$$

Zestawiając wszystkie poprzednie wzory przy $i = 0$, otrzymamy:

$$E_1 = e_1 = e_2 = E_2,$$

czyli:

$$E_1 = E_2.$$

Jeżeli w obwodzie zamkniętym (rys. 143) siły elektromotoryczne źródła prądu i odbieracza równoważą się, to prąd nie płynie.

Skoro zaś prąd zaczyna płynąć w kierunku siły elektromotorycznej E_1, to z poprzednich równań łatwo zauważyć, że $E_1 > E_2$. Wtedy następują omawiane powyżej przemiany energji i wogóle ruch energji.

W przypadkach wyjątkowych odbieracze mogą nie posiadać siły elektromotorycznej, pozostaje w nich wtedy tylko opór omiczny r_2 i w takich odbieraczach wydzielać się może tylko ciepło lub takie postacie energji, które są w ścisłym związku z energją cieplną.

ROZDZIAŁ XVI.

Przemiany cieplne, zachodzące w obwodzie prądu elektrycznego.

1. Ciepło Joule'a. Pod wpływem prądu elektrycznego wszystkie przewodniki ogrzewają się nawet wtedy, gdy są wykonane z materjałów o najlepszym przewodnictwie i gdy pod każdym względem są jednorodne na całej długości.

Prawo Joule'a głosi, że ilość ciepła, powstająca w jednostce czasu w przewodniku, po którym przepływa prąd, jest proporcjonalna do drugiej potęgi prądu, tudzież do pewnej wielkości, która określa własność przewodników, zwanej oporem elektrycznym, ściślej — oporem omicznym.

Stosowany już tutaj wielokrotnie wzór pracy prądu, skutkiem której powstaje ciepło Joule'a, jest następujący:

$$i_t^2 \,.\, r \,.\, dt,$$

lub też, gdy siła prądu jest stała w ciągu czasu t:

$$i^2 \,.\, r \,.\, t.$$

Gdy prąd jest wyrażony w amperach, r — w omach, t – w sekundach, to pracę otrzymujemy w dżaulach; chcąc zaś wyrazić ilość otrzymanego ciepła w kalorjach gramowych, należy uwzględnić równoważnik mechaniczny ciepła. Mianowicie z jednego dżaula otrzymujemy 0,24 kalorji gramowych ciepła.

Oznaczając więc ilość ciepła w kalorjach gramowych przez Q, otrzymamy:

$$Q = 0{,}24 \,.\, i^2 \,.\, r \,.\, t.$$

W praktyce elektrotechnicznej posiada jeszcze szczególne znaczenie wzór, dotyczący wzrostu temperatury w przewodniku pod wpływem omawianego wyżej ciepła.

Przewodnik, po którym przepływa prąd, przybiera po upływie pewnego czasu [1]) temperaturę stałą, wyższą od otoczenia. W warunkach takiej równowagi cieplnej cała ilość ciepła, otrzymywana pod wpływem prądu w ciągu pewnego czasu, rozprasza się w tym samym czasie naokoło przewodnika.

Możemy ułożyć równanie, które określa, że ciepło, otrzymane w przewodniku skutkiem prądu elektrycznego, równa się ilości ciepła rozproszonego.

---

[1]) Teoretycznie, temperatura może być uważana za stałą po upływie czasu nieskończenie długiego, praktycznie jednak — po kilku minutach lub kilku godzinach, zależnie od różnych okoliczności.

Oznaczmy przez:

θ_p — temperaturę przewodnika,
θ_o — „ otoczenia,
i — prąd,
t — czas,
r — opór omiczny przewodnika,
ρ — opór właściwy przewodnika,
l — długość przewodnika,
q — przekrój przewodnika,
u — obwód przekroju przewodnika.

Nadto przez h oznaczmy wielkość stałą, która jest zależna od własności powierzchni przewodnika i rodzaju otaczającego ośrodka. Załóżmy jednocześnie, że przewodnik traci ciepło przedewszystkim przez powierzchnię boczną i że wpływ końców przewodnika może być zupełnie pominięty.

Ilość ciepła, otrzymana przez przewodnik, wynosi:

$$i^2 \cdot r \cdot t = i^2 \cdot \rho \cdot \frac{l}{q} \cdot t.$$

Ilość zaś ciepła rozproszonego przyjmować będziemy za proporcjonalną do różnicy temperatur przewodnika i otoczenia, do powierzchni bocznej przewodnika i do czasu; otrzymamy wtedy wyrażenie następujące:

$$h \cdot (\theta_p - \theta_o) \cdot u \cdot l \cdot t.$$

Więc:

$$h (\theta_p - \theta_o) \cdot u \cdot l \cdot t = i^2 \cdot \rho \cdot \frac{l}{q} \cdot t,$$

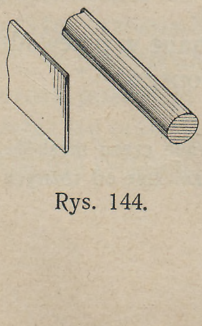
skąd:

$$\theta_p - \theta_o = \frac{1}{h} \cdot \frac{i^2 \cdot \rho}{u \cdot q}.$$

Wzór ten wskazuje, że różnica temperatur przewodnika i otoczenia nie zależy od długości przewodnika, a nadto, co najważniejsza, że nie będzie ona jednakowa dla różnych materjałów, jest bowiem proporcjonalna do oporu właściwego przewodnika.

Oprócz tego ważną jest rzeczą zwrócić uwagę na mianownik, w którym mamy iloczyn z obwodu przekroju przez pole przekroju przewodnika.

Jak wiadomo, druty o jednakowym polu przekroju mogą mieć różne obwody przekroju, a to zależnie od kształtu przekroju.



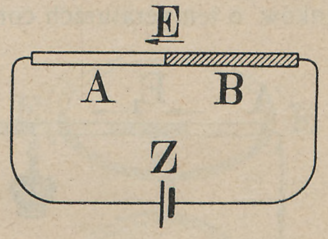
Rys. 144.

Najkrótszy obwód, ze wszystkich figur geometrycznych przy stałem polu, posiada koło. Natomiast bardzo długi obwód przy tem samem polu będzie miał prostokąt wydłużony (rys. 144).

Z wyrażenia nadwyżki temperatury przewodnika względem otoczenia wynika, że przewodnik o przekroju kołowym ogrzeje się do temperatury wyższej niż przewodnik o przekroju prostokątnym, przy tym samym polu przekroju.

2. Ciepło Peltier'a. Zupełnie innego rodzaju przemiany cieplne wykryte zostały przez Peltier'a.

Jeżeli przez miejsce spojenia dwuch różnych [1]) przewodników A i B (rys. 145) przepuszczać będziemy prąd elektryczny ze źródła Z, to zależnie od tego, w którą stronę popłynie prąd przez miejsce spojenia tych przewodników, w tym miejscu temperatura obniża się albo wzrasta.



Rys. 145.

W pierwszym przypadku ciepło jest oczywiście pochłaniane, w drugim zaś wydzielane.

Zjawisko to odbywa się tylko w miejscu zetknięcia dwuch przewodników, przeto twierdzimy, że w tym miejscu zjawia się siła elektromotoryczna E, która działa w pewnym kierunku, np. od B do A, i zależnie od tego, czy prąd elektryczny jest zgodny, co do kierunku, z tą siłą elektromotoryczną, czy też skierowany jest względem niej odwrotnie, otrzymujemy dwa rodzaje przemian cieplnych.

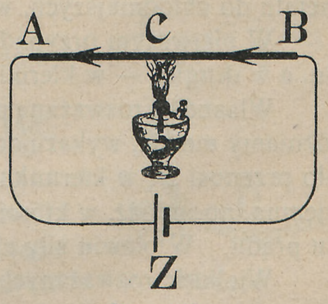
Jeżeli kierunek prądu i jest zgodny z siłą elektromotoryczną, to moc prądu Ei wytwarza się kosztem ciepła, pochłanianego w miejscu zetknięcia przewodników. Jeżeli natomiast prąd płynie wbrew tej sile elektromotorycznej, to $-Ei$ wyraża moc prądu, wytwarzającą ciepło w miejscu zetknięcia przewodników.

Wymierzając siłę prądu i ilość otrzymanego ciepła, łatwo obliczyć wielkość siły elektromotorycznej.

Doświadczenia wykazały, że wielkość i kierunek tej siły elektromotorycznej zależy od własności chemicznych i fizycznych przewodników A i B. Dla tych ciał, nad któremi wykonano dotychczas doświadczenia, wielkość tej siły elektromotorycznej jest bardzo mała. Wynosi ona zaledwie tysiączne części wolta. Przy zetknięciu np. miedzi z żelazem przy 0^0 powstaje siła elektromotoryczna, wynosząca około 0,00288 wolta.

3. Ciepło Thomsona. [2]) Istnieje jeszcze inny rodzaj zjawisk cieplnych, wykryty przez Thomsona.

Przewodnik AB (rys. 146), wykonany na całej swej długości z jednego metalu, jest zupełnie jednorodny. Przepuszczamy przezeń prąd, a jednocześnie ogrzewamy go pośrodku za pomocą płomienia (rys. 146).



Rys. 146.

Doświadczenie wykazało, że rozkład temperatur pod wpływem prądu staje się niesymetryczny. Zależnie od rodzaju metali, ciepło przenosi się z prądem lub przeciwko prądowi.

W tych warunkach jedna połowa przewodnika staje się cieplejszą od drugiej. Na podstawie przyję-

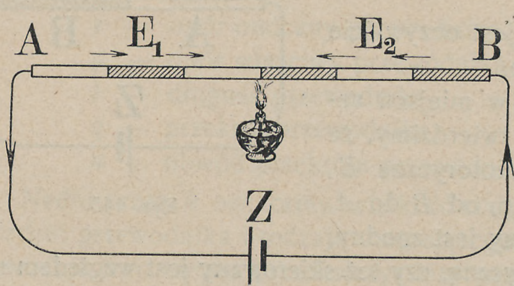
---

[1]) Różnica pomiędzy dwoma przewodnikami A i B może zachodzić pod względem chemicznym lub fizycznym, a więc mogą to być ciała nawet o tym samym składzie chemicznym, ale o różnych własnościach fizycznych.

[2]) W. Thomson posiada tytuł lorda Kelvina i często zamiast nazwiska używał tego tytułu.

tego wyobrażenia o siłach elektromotorycznych zjawisko to wytłomaczyć sobie możemy w sposób następujący.

Przewodnik AB, ogrzewany w środku, ma w tym miejscu temperaturę oczywiście najwyższą, na prawo zaś i na lewo od środka temperatury są coraz niższe; możemy więc sobie przedstawić, że cały ten przewodnik składa się z szeregu odcinków o temperaturach coraz niższych z jednej i z drugiej strony. Na rys. 147 uzmysłowiony jest układ takich odcinków przewodnika. Różnica temperatur dwuch odcinków stanowi różnicę ich własności fizycznych, wystarczającą, aby w miejscu zetknięcia tych odcinków powstała siła elektromotoryczna w pewnym określonym kierunku, np. od odcinka zimniejszego do cieplejszego. W tych warunkach rozkład wspomnianych sił elektromotorycznych będzie taki, jak wskazano na rys. 147. Oczywiście, pamiętać przytem należy, że odcinki są w rzeczywistości nieskończenie małe i takież są też siły elektromotoryczne, istniejące pomiędzy niemi; ponieważ jednak takich sił elektromotorycznych, działających w jedną stronę, będzie nieskończenie wiele, przeto siły elektromotoryczne wypadkowe będą wielkościami skończonemi.



Rys. 147

Prąd elektryczny, płynący od B do A, wywoła oczywiście pochłanianie ciepła z prawej strony, a powstawanie ciepła w stronie lewej. Moc równoważna ilości ciepła, pochłanianej w jednostce czasu, będzie:

$$E_2 \cdot i,$$

a moc prądu równoważna ilości ciepła, powstającej w jednostce czasu, będzie:

$$E_1 \cdot i.$$

W różnych metalach kierunek sił elektromotorycznych E_1 i E_2 bywa rozmaity. W jednych siły elektromotoryczne skierowane są od części cieplejszych metalu do chłodniejszych, w innych zaś od chłodniejszych do cieplejszych.

W pierwszym przypadku ciepło przenosi się w kierunku odwrotnym do prądu, a w drugim — w kierunku zgodnym z kierunkiem prądu.

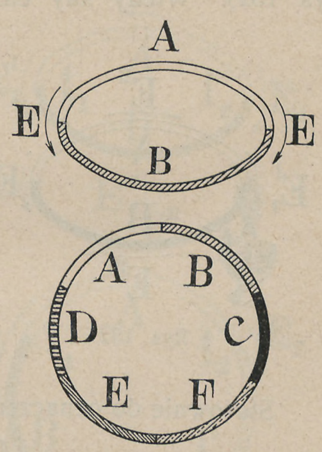
Własność, rozważaną powyżej, posiadają różne metale w stopniu różnym. Odróżniamy metale, wykazujące własność tę jako dodatnią, np. żelazo, w którym ciepło przenosi się w kierunku prądu elektrycznego, i metale, wykazujące własność ujemną, np. miedź, w której ciepło przenosi się w kierunku odwrotnym do kierunku prądu. W ołowiu siły elektromotoryczne Thomsona prawie nie istnieją.

Wielkość rozważanych sił elektromotorycznych zależy od spadku temperatury wzdłuż przewodnika i od wartości bezwzględnej tych temperatur.

4. Prawo Volty. Siły elektromotoryczne, występujące w zjawiskach Peltier'a i Thomsona, mogą wywołać w pewnych warunkach prąd elektryczny. Przede-

wszystkiem rozważymy te przypadki, kiedy tych sił elektromotorycznych niema lub też są one w równowadze.

W obwodzie, utworzonym z dwuch przewodników A i B (rys. 148) przy temperaturze jednakowej w całym obwodzie, dwie siły elektromotoryczne czynne w miejscach spojenia przewodników znoszą się wzajemnie, więc pod ich wpływem prąd w takim obwodzie powstać nie może.

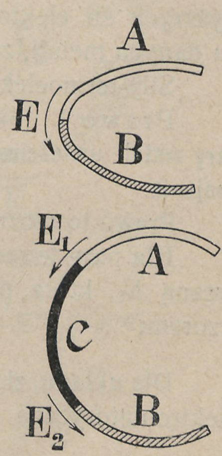


Rys. 148 i 149.

Jeżeli mamy cały szereg różnorodnych przewodników, ułożonych w obwód zamknięty (rys. 149) i w żadnym spojeniu nie odbywają się przemiany chemiczne z powodu oddziaływania jednego przewodnika na drugi, to przy jednakowej temperaturze w całym obwodzie, pod wpływem sił elektromotorycznych w spojeniach, prąd elektryczny powstać nie może, ponieważ siły elektromotoryczne znoszą się wzajemnie. O prawdziwości tego twierdzenia przekonywa nâs doświadczenie.

Prawo to ma największe znaczenie praktyczne dla metali i znane jest w nauce pod nazwą prawa Volty. Krócej to prawo wypowiedzieć można w sposób następujący: **w obwodzie zamkniętym, utworzonym z różnych metali o temperaturach jednakowych, suma algebraiczna sił elektromotorycznych, działających w miejscach zetknięcia metali, równa się zeru.**

Omawiane prawo można rozważać jako wynik prostszego twierdzenia, polegającego na tem, że siła elektromotoryczna, powstająca przy zetknięciu dwuch przewodników, równa się sumie algebraicznej sił elektromotorycznych, działających przy zetknięciu tych przewodników z trzecim.



Rys. 150 i 151.

Jeśli np. w miejscu zetknięcia przewodników A i B działa siła elektromotoryczna E (rys. 150), to, umieszczając pomiędzy A i B trzeci przewodnik C (rys. 151), otrzymamy nowe siły elektromotoryczne E_1 i E_2, których suma $E_1 + E_2$ równa się E.

Wychodząc z tego prawa, opartego na doświadczeniu, łatwo dowieść ogólnego prawa Volty.

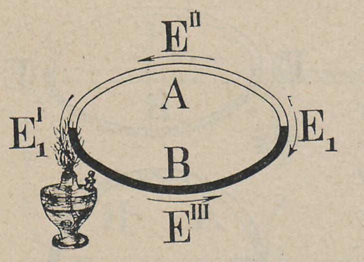
Dla obwodu, składającego się z dwuch metali (rys. 148), mamy oczywisty wyraz:

$$E - E = 0.$$

Dodając kolejno w spojeniach nowe metale, przez rozłączenie spojeń i wstawianie odpowiednich kawałków innych metali, otrzymamy obwód, składający się z dowolnej liczby metali, jak pokazany np. na rys. 149. Przy umieszczaniu nowych metali otrzymywać będziemy w powyższym równaniu nowe siły elektromotoryczne, których suma algebraiczna zawsze równać się będzie zeru.

5. Prąd termoelektryczny. Wszystkie omawiane w § 4 obwody rozważaliśmy przy temperaturze jednakowej wokoło całego obwodu.

Weźmy teraz inny przypadek, gdy w obwodzie, składającym się z dwuch metali, jedno spojenie jest ogrzewane, skutkiem czego temperatury spojeń są różne (rys. 152). Wtedy siły elektromotoryczne w spojeniach będą różne E_1' i E_1, a nadto wzdłuż metali A i B, z powodu różnicy temperatur na końcach tych metali, powstaną siły elektromotoryczne Thomsona.



Rys. 152.

W tych warunkach suma algebraiczna sił elektromotorycznych w obwodzie zamkniętym nie równa się zeru. W obwodzie powstanie prąd w kierunku siły elektromotorycznej wypadkowej. [1]) Prąd taki nazywamy prądem **termoelektrycznym**, a siłę elektromotoryczną wypadkową—siłą termoelektromotoryczną pary metali A i B przy danej różnicy temperatur spojeń.

Stosownie do oznaczeń na rys 152, siła termoelektromotoryczna będzie:

$$E = E'_1 - E_1 + E'' + E'''.$$

Wielkość siły termoelektromotorycznej zależy, jak wskazuje doświadczenie, przedewszystkim od rodzaju metali, a następnie od wysokości temperatur spojeń. Dla danego układu metali, według przyjętej obecnie teorji zjawisk termoelektrycznych, wielkość sił elektromotorycznych Thomsona E'' i E''' zależy tylko od temperatur końców przewodników, w których te siły elektromotoryczne powstają, i nie zależy od rozkładu temperatury wzdłuż przewodnika. Siły elektromotoryczne Peltier'a E_1' i E_1 zależą tylko od temperatur spojeń. Suma więc algebraiczna powyższych sił elektromotorycznych, wyrażająca siłę termoelektromotoryczną układu danych metali, zależy tylko od temperatur spojeń metali.

Siły termoelektromotoryczne podlegają trzem prawom zasadniczym.

Prawo I. **Siła termoelektromotoryczna nie zmienia się, gdy w miejscu spojenia pary metali umieścimy trzeci metal, którego temperatura równa się temperaturze tego spojenia.**

Prawo to można wyprowadzić drogą następującego rozumowania.

Dla pary termoelektrycznej AB (rys. 153) otrzymamy siłę termoelektromotoryczną E_{I}, która, przy zastosowaniu oznaczeń wskazanych na rysunku, wyrazi się wzorem:

$$E_{\mathrm{I}} = E_1' - E_1 + E'' + E'''. \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

Dla układu, złożonego z trzech metali ABC (rys. 154), wypadkowa siła termoelektromotoryczna E_{II}, jak widać z rysunku, będzie:

$$E_{\mathrm{II}} = E_1' - E_2 - E_3 + E'' + E'''. \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

---

1) Zjawisko to pierwszy spostrzegł Seebeck, stosując bismut i miedź. Przy omawianiu zjawisk tego rodzaju zwykle mówimy o metalach, ponieważ większa część doświadczeń była wykonywana z metalami. Odbywają się jednak takie same zjawiska przy zastosowaniu innych przewodników, nie oddziaływających na siebie chemicznie. Np. różne minerały posiadają ciekawe własności termoelektryczne.

Dla układu (rys. 155), złożonego z tych samych trzech metali, lecz przy jednakowej temperaturze t_2 wszystkich spojeń siły elektromotoryczne będą w równowadze:

$$E_1 - E_2 - E_3 = 0,$$

zatem:

$$E_1 = E_2 + E_3,$$

a na podstawie tej zależności, porównywając równania (1) i (2) widzimy, że:

$$E_{\mathrm{I}} = E_{\mathrm{II}}.$$

Prawo II. **Siła termoelektromotoryczna pary metali AB, równa się różnicy sił elektromotorycznych par metali A, C i B, C przy tych samych temperaturach spojeń, jakie miała para A, B.**

Siłę termoelektromotoryczną pary A, C oznaczmy przez E_{III}. Z rysunku 156 widzimy, że:

$$E_{\mathrm{III}} = E_2' - E_2 + E'' + E^{\mathrm{IV}}.$$

Siłę termoelektromotoryczną pary B, C oznaczmy przez E_{IV}. Z rysunku 157 widzimy, że:

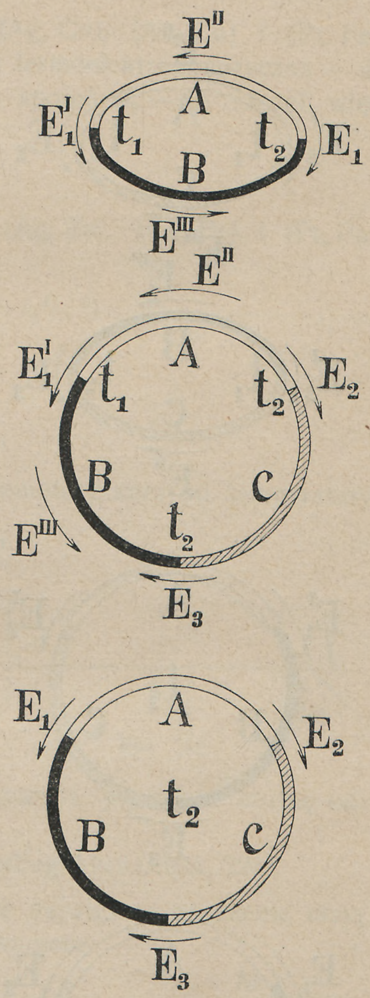
$$E_{\mathrm{IV}} = E_3' - E_3 - E''' + E^{\mathrm{IV}}.$$

Dla obwodu, składającego się z trzech metali A, B, C przy jednakowej temperaturze wszystkich spojeń t_1, mamy: (rys. 158).

$$E_1' + E_3' - E_2' = 0.$$

Dla takiegoż obwodu przy temperaturze t_2 (rys. 159):

$$E_1 + E_3 - E_2 = 0.$$



Rys. 153, 154 i 155.

Z tych czterech równań znajdujemy:

$$E_{\mathrm{III}} - E_{\mathrm{IV}} = E_2' - E_3' - E_2 + E_3 + E'' + E''' = E_1' - E_1 + E'' + E''',$$

a więc, mając na uwadze rys. 153, otrzymamy:

$$E_{\mathrm{III}} - E_{\mathrm{IV}} = E_{\mathrm{I}},$$

gdzie E_{I} oznacza siłę termoelektromotoryczną pary metali A, B.

Prawo III. **Siła termoelektromotoryczna pary metali przy temperaturach spojeń t_1, t_2 równa się sumie sił termoelektromotorycznych tej samej pary metali przy temperaturach t_1, t' i t', t_2.**

Wynika to z następującego rozumowania: Siłę termoelektromotoryczną pary A, B przy temperaturach t_1, t' oznaczymy przez E_V. Z rysunku 160 otrzymamy:

$$E_V = E_1' - E_1'' + E^{IV} + E^{V}.$$

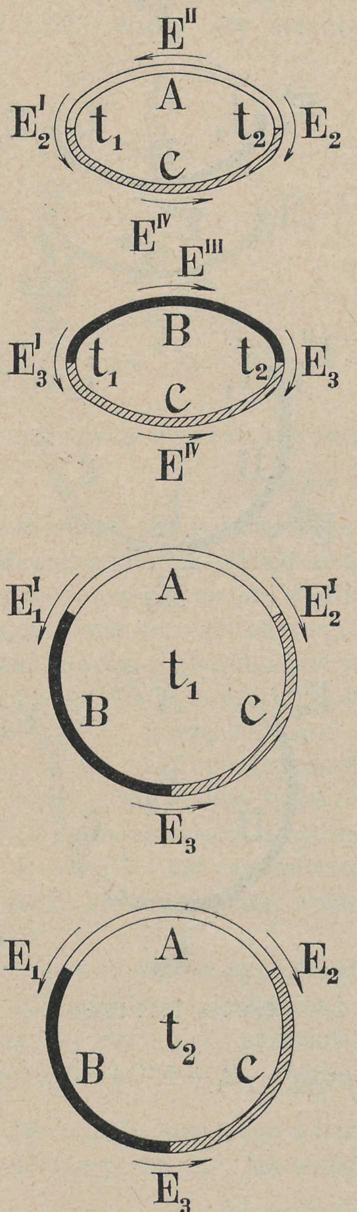
Siłę termoelektromotoryczną pary A, B przy temperaturach t' i t_2 oznaczymy przez E_{VI}. Z rysunku 161 widzimy, że:

$$E_{VI} = E_1'' - E_1 + E^{VI} + E^{VII}.$$

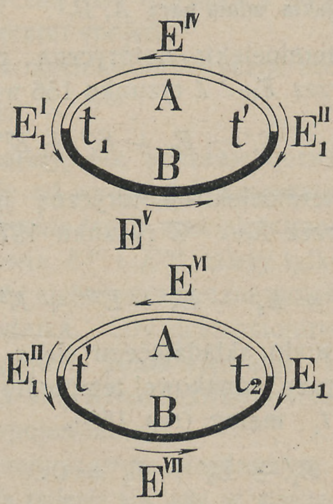
Dodając te dwa równania, otrzymamy:

$$E_V + E_{VI} = E_1' - E_1 + E^{IV} + E^{V} + E^{VI} + E^{VII}.$$

Siły elektromotoryczne Thomsona na przewodnikach między temperaturami t_1 i t_2 równe



Rys. 156, 157, 158 i 159.



Rys. 160 i 161.

są odpowiednim sumom sił elektromotorycznych na tych samych przewodnikach pomiędzy temperaturami: t_1, t' i t', t_2.

Stosując przeto oznaczenia, wskazane na rys. 153, 160 i 161, otrzymamy:

$$E'' = E^{IV} + E^{VI}, \quad \text{a} \quad E''' = E^{V} + E^{VII}.$$

Wtedy, mając na uwadze rys. 153, będzie:

$$E_V + E_{VI} = E_I.$$

Jest to właśnie siła termoelektromotoryczna pary A, B przy różnicy temperatur t_1 i t_2.

Pierwsze i trzecie prawo zostało stwierdzone doświadczalnie przez Becquerela.

Zależność wielkości siły termoelektromotorycznej od różnicy temperatur nie daje się wyrazić za pomocą jednego wzoru dla wszystkich par termoelektrycznych przy dowolnych temperaturach.

Dla par termoelektromotorycznych (Cu, Bi), (Ag, Cu), (Au, Cu) i (Pt, Fe) można przyjąć w dość szerokich granieach, że siła termoelektromotoryczna — E zmienia się proporcjonalnie do różnicy temperatur spojeń $(t_2 - t_1)$. Jeżeli więc przez k oznaczymy stały spółczynnik, to:

$$E = k \cdot (t_2 - t_1).$$

Dla par termoelektromotorycznych (Ag, Fe), (Ag, Zn), (Cu, Fe) i (Pt, Pb) będzie według Avenariusa:

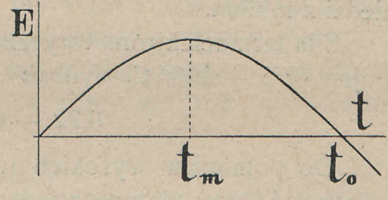
$$E = k_1 \cdot (t_2 - t_1) \pm k_2 \cdot (t_2^2 - t_1^2),$$ [1])

gdzie k_1 i k_2 są to spółczynniki stałe.

Zakładając $t_1 = 0^0$, otrzymamy:

$$E = k_1 \cdot t_2 \pm k_2 \cdot t_2^2.$$

W tym przypadku zależność siły termoelektromotorycznej od temperatury spojenia sąsiedniego, gdy pierwsze jest utrzymywane stale przy temperaturze 0^0, wyraża się parabolą.



Rys. 162.

Na rys. 162 mamy właśnie taką parabolę, nakreśloną przy założeniu, że przed k_2 stoi znak minus. Widzimy wówczas, że przy temperaturze t_m siła termoelektromotoryczna osiąga maximum, a przy t_0 równa się zeru i następnie zmienia znak; wtedy prąd termoelektryczny zaczyna płynąć w stronę odwrotną.

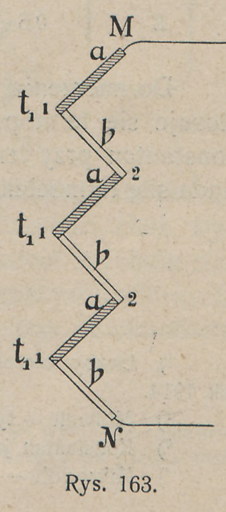
Dla pary np. Ag, Fe temperatura t_m wynosi, według Avenariusa, 223^0.

6. Termoogniwa i termobaterje. W praktyce największe znaczenie mają pary termoelektryczne w przyrządach do mierzenia temperatury.

Wtedy najodpowiedniejsze są takie pary, w których siła termoelektromotoryczna jest możliwie dokładnie proporcjonalna do różnicy temperatur spojeń.

W baterjach termoelektrycznych, które niekiedy służą za źródła prądu, chodzi przedewszystkim o to, aby mieć jak największą siłę termoelektromotoryczną, a nadto także trwałe spojenia.

Połączenie poszczególnych par w termobaterjach wykonywa się tak, jak to wskazuje rys. 163, gdzie a, a, ... są kawałki jednego metalu, a b, b.... kawałki drugiego, M i N końcówki termobaterji.



Rys. 163.

[1]) Dla jednych par znak (+), dla innych (—).

Spojenia *1*, *1*, ... ogrzewamy, a *2*, *2*, ... oziębiamy, wtedy na końcówkach *MN* otrzymujemy napięcie równe sumie sił termoelektromotorycznych poszczególnych par.

W celu wskazania, jak wielkie są siły termoelektromotoryczne, podaję kilka liczb, otrzymanych za pomocą dokładnych pomiarów. [1])

Według W. Jaegera i Diesselhorsta siła termoelektromotoryczna różnych metali przy spojeniu z platyną wynosi E, gdy jedno spojenie znajduje się przy temperaturze 0° C., a drugie przy + 100° C. Za dodatnią przyjmujemy siłę elektromotoryczną, skierowaną od danego metalu do platyny w spojeniu, którego temperatura wynosi 0°.

Wartości wielkości E w miliwoltach [2]) podane są w następującej tablicy:

Metal	Au	Ag	Cu	Pd	Zn	Sn	Al	Cd	Ni	Fe	Pb
E	+0,72	+0,71	+0,72	−0,56	+0,75	+0,42	+0,38	+0,85	−1,62	+1,45	+0,41

Na podstawie tej tablicy, korzystając z drugiego prawa, dotyczącego sił termoelektromotorycznych, łatwo obliczyć siłę termoelektromotoryczną innych par, np. miedzi z niklem.

Siła termoelektromotoryczna pary — miedź z niklem — przy temperaturach spojeń 0° i + 100° C. wynosi:

$$0{,}72 - (-1{,}62) = 2{,}34 \text{ miliwolt.}$$

Do pomiarów wysokich temperatur często stosuje się para, składająca się z platyny i stopu platyny z rodem (90% Pt i 10% Rh). Według Holborna i Valentinera, jeżeli jedno spojenie takiej pary ma temperaturę 0°, a drugie znajduje się w temperaturze t^0, to siła termoelektromotoryczna wynosi: E.

Wartości dla E w miliwoltach podane są w tablicy:

t	100°	300°	500°	700°	900°	1100°	1300°	1500°
E	0,6	2,25	4,13	6,17	8,34	10,62	13,0	15,3

Do mierzenia nizkich temperatur w granicach od —200° do + 800° zwykle stosuje się termopara: miedź, konstantan [3]) lub żelazo, konstantan. Para miedź, konstantan przy temperaturze pokojowej, na 1° C. różnicy temperatur spojeń posiada siłę termoelektromotoryczną 37 mikrowoltów. [4])

---

[1]) Liczby zaczerpnięte z niemieckiego Kalendarza dla elekrotechników Uppenborna na rok 1914.

[2]) Miliwolt — tysiączna część wolta.

[3]) Konstantan jest to stop 60% Cu z 40% Ni.

[4]) Mikrowolt — miljonowa część wolta.

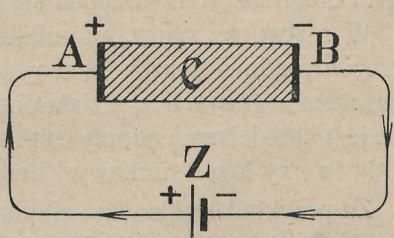
ROZDZIAŁ XVII.

Przemiany chemiczne, zachodzące w obwodzie prądu elektrycznego.

1. **Elektrolity.** Wszystkie ciała, które nie ulegają żadnym zmianom chemicznym pod wpływem przechodzącego przez nie prądu, są ciałami o tak zwanym **przewodnictwie metalicznym**; natomiast ciała, których ustrój zmienia się chemicznie pod działaniem przepływającego przez nie prądu, nazywamy **elektrolitami** albo ciałami o **przewodnictwie elektrolitycznym.** Do rzędu pierwszych ciał należą przedewszystkim metale i węgiel, elektrolitami zaś są sole, kwasy i zasady roztworzone lub roztopione. Nadto elektrolizie podlegają też w słabym stopniu rozmaite ciała stałe, jako to: glina, porcelana, szkło, o ile są silnie ogrzane, jak również gazy, np. chlorowodór.

Istotne cechy zjawiska elektrolizy są następujące.

Na rys. 164 ciało C stanowi elektrolit, dwie płytki metalowe A i B doprowadzające prąd są elektrodami, a Z jest źródłem prądu. Prąd płynie przez elektrolit od A do B; przy takim kierunku prądu płytkę, oznaczoną znakiem (+) nazywamy według Faradaya anodą, a płytkę, oznaczoną znakiem (—) katodą.[1] Kierunek prądu wskazuje kierunek ruchu elektryczności dodatniej; elektryczność ujemna porusza się w stronę przeciwną.



Rys. 164.

Gdy prąd przepływa przez ciało C, na elektrodach wydzielają się różne ciała, stanowiące wytwór elektrolizy; otóż znamienną właściwością zjawiska jest ta okoliczność, że ciała te wydzielają się zawsze na elektrodach, nigdy zaś w środku ciała C. Zależnie od okoliczności, ciała, wydzielające się na elektrodach, mogą stanowić wytwory bezpośrednie rozkładu ciała C, lub też inne ciała, wytwarzające się przy tak zwanych reakcyach wtórnych, zachodzących pomiędzy bezpośrednimi wytworami elektrolizy, elektrolitem i elektrodami.

---

[1]) Przyjęto oznaczać znakiem (+) tę końcówkę źródła prądu, skąd prąd wychodzi i również znakiem (+) tę końcówkę odbieracza, przez którą prąd wchodzi; ἄνοδος — znaczy po grecku droga wejścia, a κάθοδος — droga wyjścia.

Elektroliza odbywa się zawsze w ten sposób, że w stronę prądu przenoszą się metale i wodór, natomiast przeciw prądowi — reszty kwasowe i tlen.

Grupy cząsteczek, przenoszące się na elektrody pod wpływem prądu elektrycznego, nazywamy według Faradaya **jonami**. [1]) Powyżej określony kierunek przenoszenia się jonów obejmuje wszystkie zjawiska elektrolizy, zarówno te, które mogą zachodzić w odbieraczach prądu, jak i te, które zachodzą w źródłach. Pamiętając o tem, zwróćmy uwagę na znak elektrod, na których się wydzielają jony. Na rys. 164 widzimy, że w elektrolicie *C* prąd płynie od *A* do *B*, t. j. od (+) do (—), natomiast w źródle prądu *Z* od (—) do (+). Jeżeli w źródle prądu również będą elektrolity, to i tam będzie zachodziła elektroliza i jony będą się przenosiły zgodnie z wyżej podanym określeniem kierunku ich ruchu.

Ponieważ metale przenoszą się z prądem, więc jony metali wydzielają się na biegunie ujemnym odbieracza (na płytce *B*) i na biegunie dodatnim źródła prądu, natomiast reszty kwasów wydzielają się na biegunie dodatnim odbieracza (na płytce *A*) i na biegunie ujemnym źródła prądu.

Faraday rozważał elektrolizę w odbieraczu, więc jony, wydzielające się na biegunie ujemnym nazwał **katjonami**, a jony, wydzielające się na biegunie dodatnim, **anjonami**, stosownie do nazwy elektrod, na których te jony wydzielają się.

Oto kilka przykładów elektrolizy. Kwas solny HCl rozkłada się na H i na Cl, H płynie z prądem, Cl — przeciw prądowi, oba te gazy wydzielają się na odpowiednich elektrodach.

W roztworze kwasu siarkowego H_2SO_4 z prądem płynie H_2, a przeciw prądowi SO_4. Gdy elektrody są platynowe, H_2 wydziela się jako gaz, a SO_4 rozpada się na SO_3 i O; SO_3 z wodą daje H_2SO_4, a tlen wydziela się.

Wodorotlenek sodowy NaOH daje jony Na i OH; sód Na płynie z prądem, a OH przeciw prądowi; sód Na, wydzielając się, tworzy z wodą NaOH i H, a na drugim biegunie 4OH rozpada się na $2H_2O$ i O_2.

W roztworze siarczanu miedzi $CuSO_4$ z prądem przenosi się miedź Cu, a przeciw prądowi reszta kwasowa SO_4. Miedź wydziela się na odpowiedniej elektrodzie, a grupa SO_4 działa chemicznie na elektrodę albo na wodę. Gdy elektroda jest miedziana, tworzy się siarczan miedzi, jeżeli zaś platynowa, to SO_4 z wodą tworzy kwas siarkowy i tlen, który wydziela się na tej elektrodzie.

Za przykład elektrolizy ciał stopionych służyć może elektroliza mieszaniny gliny Al_2O_3 z kryolitem Al_2Fl_66NaFl. Przy przepuszczaniu prądu przez mieszaninę tych ciał stopionych wydziela się na katodzie czysty glin.

Z roztopionych soli drogą elektrolizy otrzymujemy także metale: potas, sód i lit.

Niektóre ciała twarde przy wysokiej temperaturze również podlegają elektrolizie. Np. tlenki magnezu wapnia i baru pod wpływem prądu elektrycznego wydzielają metal na katodzie. Dało się także spostrzedz elektrolizę w szkle i porcelanie, jednak tylko przy bardzo wysokiej temperaturze.

---

[1]) ιων znaczy po grecku: wędrujący.

2. Prawa Faradaya. Zależność masy ciał, wydzielających się na elektrodach, od ilości elektryczności, przepływającej przez elektrolit, wyrażają prawa, podane przez Faraday'a.

Prawa te są następujące: **Masa jonów, wydzielonych w ciągu pewnego czasu na elektrodach, jest proporcjonalna: do ilości elektryczności, która przepłynęła przez elektrolit i do równoważnika chemicznego tych jonów.** Mamy tu na myśli oczywiście masę wszystkich jonów, wydzielonych w tym czasie.

O ile zmiana stężenia roztworu i siła prądu nie mają wpływu na rodzaj wytworów, wydzielanych przy elektrolizie, masa wydzielonych jonów nie zależy od żadnych czynników ubocznych, np. od temperatury, siły prądu, stężenia roztworu lub budowy przyrządu, w którym odbywa się elektroliza.

Oznaczmy przez q ilość elektryczności, przez m masę wydzielonych jonów, przez a równoważnik chemiczny jonów i przez k spółczynnik stały; wtedy według prawa Faradaya będzie:

$$m = k \, . \, a \, . \, q \, .$$

Gdy wyrażamy q w kulombach, a m w gramach, to spółczynnik k, jednakowy dla wszystkich ciał, wynosi:

$$\frac{1}{96540} \, .$$

Iloczyn $k \, . \, a = A$ nazywamy **równoważnikiem elektrochemicznym.** Zwykle równoważnik elektrochemiczny wyraża liczbę gramów ciała, wydzielonego przez kulomb elektryczności.

Równanie powyższe możemy ułożyć jeszcze inaczej, gdy chodzi o wyrażenie tej ilości elektryczności, która wydziela daną masę jonów.

Z powyższego równania wynika, że:

$$q = \frac{1}{k} \, . \, \frac{1}{a} \, . \, m = 96540 \, . \, \frac{m}{a} \, .$$

W ten sposób liczba **96540** wyraża tę ilość kulombów elektryczności, która, przepływając przez elektrolit, wydziela jeden równoważnik gramowy [1]) jakiegokolwiek ciała. Liczba ta nazywa się **stałą Faradaya.**

Liczba kulombów elektryczności, która wydziela całą cząsteczkę gramową, zależy od wartościowości tej cząsteczki. Jeżeli wartościowość oznaczymy przez w, to ta ilość elektryczności wyniesie:

$$96540 \, . \, w \, .$$

Dla przykładu weźmy roztwór siarczanu miedzi $CuSO_4$. Waga atomowa miedzi wynosi 63,57. W powyższym związku atom miedzi równoważy dwa atomy

---

[1]) Równoważnik gramowy albo gram — równoważnik jest to liczba gramów ciała równa liczbie wyrażającej równoważnik chemiczny tego ciała. $\frac{m}{a}$ wyraża liczbę równoważników gramowych, zawartych w m gramach ciała.

wodoru, przeto wartościowość miedzi jest w tym razie 2, a równoważnik chemiczny wyniesie $\frac{63,57}{2} = 31,78$.

Na zasadzie prawa Faradaya, 96540 kulombów elektryczności wydzieli z roztworu siarczanu miedzi 31, 78 gr. miedzi, a dla wydzielenia całego atomu gramowego, t. j. 63,57 gr. miedzi wypadnie przepuścić: 96540 . 2 = 193080 kulombów.

Równoważnik elektrochemiczny, t. j. ilość miedzi wydzielonej przez kulomb elektryczności wyniesie przy rozważanym roztworze:

$$\frac{31,78}{96540} = 0,000329 \frac{gr.}{kulomb.}.$$

Tablica ważniejszych równoważników elektrochemicznych [1])
(w gramach na kulomb).

Nazwa jonu i równoważnik chemiczny.	Równoważnik elektrochemiczny.
a	*A*
Cynk $^1/_2$ Zn = 32,68	0,000 339
Miedź $^1/_2$ Cu_2 = 63,57	0,000 658
„ $^1/_2$ Cu = 31,78	0,000 329
Nikiel $^1/_2$ Ni = 29,34	0,000 304
„ $^1/_2$ Ni_2 = 19,56	0,000 203
Srebro Ag = 107,88	0,00 111 75
Wodór H = 1,008	0,0000 1036
Złoto $^1/_2$ Au = 65,73	0,000 681
OH = 17,008	0,000 176
$^1/_2$ SO_4 = 48,03	0,000 498
Cl = 35,46	0,000 367

Jeżeli na elektrodzie wydzielają się wytwory reakcji wtórnej, to masę tych wytworów można obliczyć na zasadzie wzorów reakcji. Naprzykład, gdy wydziela się jon OH, to z grup wodorotlenowych tworzy się woda i tlen według reakcji:

$$4OH = 2H_2O + O_2,$$

a więc z 4 . OH = 4 . 17,008 gr. powstaje 2 . O = 2 . 16 gr., czyli na każde 17,008 gr. OH przypada 8 gr. tlenu.

3. Teorja elektrolizy Arrheniusa. Przyjęte obecnie poglądy na przebieg elektrolizy opierają się na teorji jonizacji albo dysocjacji elektrolitycznej roztworów, podanej przez Arrheniusa.

W fizyce znane jest zjawisko obniżania się temperatury zamarzania np. roztworów wodnych pod wpływem ciał rozpuszczonych.

[1]) Wyciąg z tablicy, podanej na str. 375 dzieła prof. A. Witkowskiego: „Zasady fizyki", t. III. Za podstawę przyjęto O = 16.

Według prawa Raoulta obniżanie się temperatury zamarzania roztworu zależy tylko od liczby cząsteczek ciała rozpuszczonego w danej ilości rozpuszczalnika, nie zależy natomiast od jakości ciała rozpuszczonego.

Pewne jednak ciała, mianowicie elektrolity, przez które z łatwością przepływa prąd elektryczny, uchylają się od tego prawa. W roztworach, stanowiących elektrolity, obniżanie się temperatury zamarzania jest większe, niż to wynika z prawa Raoulta.

Arrhenius tłomaczy wymienioną własność elektrolitów w sposób następujący: pewna liczba cząsteczek ciała rozpuszczonego rozpada się na grupy jeszcze drobniejsze, mianowicie każda z tych cząsteczek dzieli się na dwa lub więcej jonów, np. H_2SO_4 na H,H i SO_4. Liczba cząsteczek rozłożonych (inaczej zdysocjowanych, albo zjonizowanych) zależy od stężenia roztworu. W roztworach bardzo stężonych liczba cząsteczek zdysocjowanych jest mała w stosunku do całkowitej liczby cząsteczek, natomiast w roztworach bardzo rozcieńczonych wszystkie prawie cząsteczki są zjonizowane. Liczba cząsteczek w roztworze zwiększa się skutkiem jonizacji.

Doświadczenia nad zamarzaniem np. wodnych roztworów elektrolitów stwierdzają, że w przypadku bardzo rozcieńczonych roztworów elektrolitów obniżenie się punktu zamarzania roztworu odpowiada zwiększonej liczbie cząsteczek.

Podobne wyniki daje rozważanie zależności ciśnienia pary nad roztworami elektrolitów oraz ich ciśnienia osmotycznego, od liczby cząsteczek ciała rozpuszczonego.

Poza tym na uwagę zasługuje zestawienie faktów następujących. Przez czystą zupełnie wodę prąd elektryczny prawie nie przechodzi, również znaczny opór elektryczny mają kwasy stężone, natomiast przez roztwór kwasów w wodzie prąd przechodzi z łatwością. Przez roztwór jednak np. gazu chlorowodorowego w chloroformie prąd nie przechodzi. Stąd wypływa wniosek, że przewodnikami mogą być tylko roztwory, posiadające szczególny stan cząsteczek.

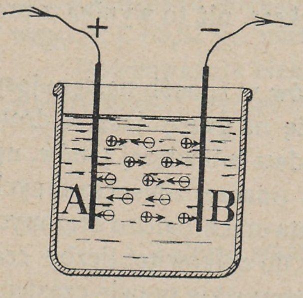
Dobrymi przewodnikami są te roztwory, które, jak to wynika z doświadczeń z zamarzaniem i t. p., mają nadmiernie wielką liczbę cząsteczek, a więc są zjonizowane. Stąd wynika bezpośrednio, że jony przenoszą elektryczność w elektrolitach i umożliwiają w nich ruch elektryczności. Ażeby wytłomaczyć możliwość istnienia takich cząsteczek, czyli jonów, wewnątrz roztworu wobec rozmaitych czynników chemicznych, które w warunkach normalnych niezwłocznie wciągnęłyby te cząsteczki do reakcji, Arrhenius przypuszcza, że znajdują się one w stanie szczególnym, mianowicie, że są one **naelektryzowane**: jedne dodatnio, drugie ujemnie; w ten sposób każda cząsteczka elektrycznie obojętna rozpada się na dwa lub kilka jonów, z których jedne są ujemne, a drugie dodatnie. Takie rozszczepienie się cząsteczek na jony naelektryzowane nazywamy dysocjacją elektrolityczną.

Czynnikiem, wywołującym dysocjację, jest rozpuszczalnik; zależnie od rodzaju rozpuszczalnika, powstają roztwory mniej lub więcej zdysocjowane. Rozpuszczalnik zaś nazywa się w tych warunkach jonizatorem. Jonizator wywołuje siły, które utrzymują jony naelektryzowane różnoznacznie w stanie rozdzielonym.

Najsilniejszym jonizatorem jest woda, następnie alkohole, szczególnie alkohol metylowy, kwas mrówkowy i amoniak skroplony.

Własności jonizacyjnych zupełnie nie mają węglowodory, mianowicie tłuszcze i związki aromatyczne.

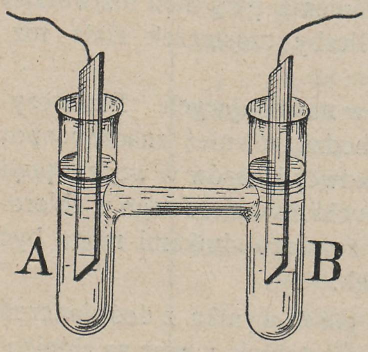
Na podstawie wyłuszczonego wyżej poglądu na roztwory elektrolitów, łatwo wytłomaczyć istotę przepływu prądu przez elektrolity. Na rys. 165 mamy naczynie, wypełnione roztworem, w którym są pogrążone dwie płytki metalowe A i B. Jeżeli płytki te połączymy ze źródlem prądu tak, aby na A był biegun dodatni, a na B ujemny, to pomiędzy płytkami powstanie pole elektryczne i siły tego pola wprowadzą w ruch jony roztworu: jony dodatnie popłyną z prądem, ujemne zaś przeciw prądowi, ponieważ kierunek natężenia pola będzie skierowany od płytki dodatniej do ujemnej.



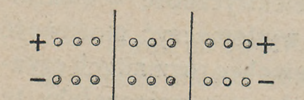
Rys. 165.

Jony naelektryzowane dodatnio są to katjony, a naelektryzowane ujemnie — anjony. [1] Jony wodoru i metali stanowić będą przeto katjony (dodatnie), natomiast reszty kwasowe — anjony (ujemne). Kwas siarkowy np. rozpada się na jony $\overset{+}{H}$, $\overset{+}{H}$ i $\overset{-}{SO_4}$, kwas solny na $\overset{+}{H}$ i $\overset{-}{Cl}$.

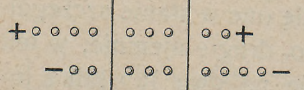
Jony poruszają się [2]) z szybkością rozmaitą, zależną od rodzaju jonów i od stężenia roztworu. Z powodu różnicy szybkości ruchu katjonów i anjonów, w pobliżu elektrod powstaje różnica stężenia roztworu. Łatwo przekonać się o tem, przeprowadzając elektrolizę w naczyniu, przedstawionem na rys. 166. Dwie probówki A i B połączone są rurką. Przy przejściu prądu roztwór w jednej probówce staje się rzadszy, w drugiej zaś gęstszy. Że tak być musi, łatwo sobie uprzytomnić za pomocą rysunku. Mamy dwa szeregi jonów: u góry katjony, u dołu anjony. Dopóki prądu niema, układ jonów jest taki, jak widzimy na rys. 167. Gdy zaś prąd przepływa, jeden szereg przesuwa się na prawo, a drugi na lewo, i jeżeli szybkość ruchu obydwu gatunków jonów będzie jednakowa, to rozkład jonów będzie symetryczny względem środka naczynia (rys. 168), jeżeli jednak anjony będą poruszały się szybciej, niż katjony, to, jak widzimy z rys. 169, powiększy się liczba jonów w roztworze z prawej strony naczynia i zmniejszy się ze strony lewej.



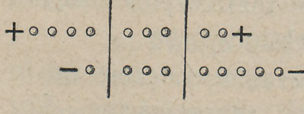
Rys. 166.



Rys. 167.



Rys. 168.



Rys. 169.

[1]) Patrz § 1 niniejszego rozdziału.

[2]) Największą szybkość posiadają jony wodoru; wynosi ona 0,00329 $\frac{cm}{sek.}$ w polu elektrycznym o natężeniu 1 $\frac{wolt}{cm}$. — O sposobie wyznaczenia tej liczby patrz: „Zasady Fizyki“, tom III, A. Witkowskiego.

Siłę prądu elektrycznego w elektrolicie można wyrazić w prosty sposób za pomocą szybkości jonów.

Oznaczmy przez N liczbę cząsteczek gramowych ciała rozpuszczonego w jednym cm^3 roztworu i załóżmy, że każda cząsteczka rozpada się na jeden katjon i jeden anjon; przez u_1 i u_2 oznaczmy szybkość katjonów i anjonów w polu elektrycznym o natężeniu 1 wolt na centymetr. [1]) Przez **E** natężenie pola elektrycznego w roztworze i przez w wartościowość jonów.

W tych warunkach każdy gramojon niesie ze sobą ładunek, wynoszący $w \, . \, f$, gdzie f jest liczbą kulombów, zawartych w jednym gramojonie jednowartościowym.

Ilość elektryczności, która przepłynie w ciągu sekundy w elektrolicie przez płaszczyznę a cm^2, prostopadłą do kierunku ruchu jonów, znajdziemy w sposób następujący. Zakładamy, że ruch jonów jest jednostajny, a szybkość proporcjonalna do natężenia pola; wtedy szybkość katjonu będzie:

$$u_1 \, . \, \mathbf{E},$$

a szybkość anjonu:

$$u_2 \, . \, \mathbf{E}.$$

Objętość, wypełnioną katjonami, które w ciągu sekundy przeszły przez powierzchnię a, można wyrazić wzorem:

$$a \, . \, u_1 \, . \, \mathbf{E},$$

tak samo dla anjonów

$$a \, . \, u_2 \, . \, \mathbf{E}.$$

W każdym centymetrze sześciennym mamy N jonów każdego znaku, każdy jon ma ładunek wf; cały więc ładunek, przeniesiony przez katjony w ciągu sekundy przez przekrój a cm^2, wyniesie:

$$N \, . \, u_1 \, . \, \mathbf{E} \, . \, a \, . \, w \, . \, f.$$

Podobnież cały ładunek przeniesiony przez anjony będzie:

$$N \, . \, u_2 \, . \, \mathbf{E} \, . \, a \, . \, w \, . \, f.$$

Prąd elektryczny w elektrolicie, jak widzimy z powyższego rozważania, jest ruchem dwuch rodzajów ładunków elektrycznych w kierunkach przeciwnych. Ruch elektryczności dodatniej w jedną stronę wywołuje takie same zjawiska elektromagnetyczne, jak ruch elektryczności ujemnej w stronę przeciwną. Siła więc prądu, którą w rozdziale I określiliśmy na podstawie własności elektromagnetycznych prądu, będzie równa sumie arytmetycznej prądów jonów dodatnich i ujemnych.

Siła prądu jest to ilość elektryczności, przepływająca przez przekrój przewodnika w jednostce czasu, całą więc siłę prądu wewnątrz elektrolitu przez powierzchnię a wyrażamy wzorem:

$$i = N \, . \, u_1 \, . \, \mathbf{E} \, . \, a \, . \, w \, . \, f + N \, . \, u_2 \, . \, \mathbf{E} \, . \, a \, . \, w \, . \, f$$

albo:

$$i = N \, . \, a \, . \, \mathbf{E} \, . \, w \, . \, f \, . \, (u_1 + u_2) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(a)}$$

---

[1]) Takie pole znajduje się np. pomiędzy płytkami (rys. 165), gdy napięcie na płytkach wynosi 10 V, a odległość 10 cm.

Tak samo wyrazić można prąd w miejscu zetknięcia elektrody np. dodatniej z roztworem, lecz wtedy na elektrodzie wydzielają się tylko jony ujemne (anjony), a liczba tych jonów będzie równa sumie dwuch liczb (patrz rys. 169), mianowicie tej liczbie jonów ujemnych, która przypłynęła do elektrody:

$$N \,.\, u_2 \,.\, \mathbf{E} \,.\, a$$

i tej liczbie jonów ujemnych, które straciły odpowiednie sobie jony dodatnie w ilości: [1])

$$N \,.\, u_1 \,.\, \mathbf{E} \,.\, a.$$

Mamy więc znowu sumę dwuch prądów, ale tym razem oba prądy są ruchem elektryczności ujemnej. Na elektrodzie zaś ujemnej mamy to samo, tylko że tam prąd stanowi ruch elektryczności dodatniej.

Na podstawie powyższego wzoru dla prądu wewnątrz elektrolitu, łatwo znaleźć wzór dla przewodnictwa właściwego elektrolitów.

Oznaczmy przez k przewodnictwo właściwe elektrolitu, przez l — długość części elektrolitu o przekroju a; długość tę liczymy wzdłuż kierunku prądu. Jeżeli natężenie pola elektrycznego w elektrolicie jest $\mathbf{E}$, to spadek potencjału na odległości l będzie:

$$e = \mathbf{E} \,.\, l.$$

Na zasadzie prawa Ohma otrzymamy:

$$i = \mathbf{E} \,.\, l \,.\, k \,.\, \frac{a}{l},$$

a stąd:

$$i = \mathbf{E} \,.\, k \,.\, a.$$

Podstawiając ten wyraz w równanie (a), otrzymamy:

$$\mathbf{E} \,.\, k \,.\, a = N \,.\, \mathbf{E} \,.\, a \,.\, w \,.\, f \,.\, (u_1 + u_2),$$

albo:

$$k = N \,.\, w \,.\, f \,.\, (u_1 + u_2). \quad \text{. . . . .} \quad \text{(b)}$$

Z tego wzoru wynika, że przewodnictwo elektrolitów zależy od szybkości katjonu i anjonu, a także od liczby jonów, zawartych w jednostce objętości, np. w centymetrze sześciennym elektrolitu.

Rozważmy nieco dokładniej roztwory. Oznaczmy przez N_1 całą liczbę cząsteczek ciała rozpuszczonego w jednostce objętości roztworu, a przez α spółczynnik, przez który pomnożyć należy N_1, aby otrzymać liczbę cząsteczek zjonizowanych w tej jednostce objętości roztworu. Wtedy możemy napisać:

$$N = N_1 \,.\, \alpha.$$

Jeżeli oznaczymy dalej przez k przewodnictwo roztworu w tym przypadku, gdy mamy tylko N cząsteczek zjonizowanych, a przez k_0 przewodnictwo roztworu tego samego ciała przy innym stężeniu, gdy mamy zjonizowane wszystkie cząsteczki N_2, to według równania (b) możemy napisać:

---

[1]) W pobliżu elektrody odbywa się dysocjacja, dążąca do utrzymania stałej liczby jonów obydwu znaków.

$$k = N_1 \, . \, \alpha \, . \, w \, . \, f \, . \, (u_1 + u_2)$$
$$k_0 = N_2 \, . \, w \, . \, f \, . \, (u_1 + u_2).$$

Biorąc stosunek tych dwuch równań, otrzymamy:

$$\alpha = \frac{k \, . \, N_2}{k_0 \, . \, N_1}.$$

Wzór ten wskazuje, że, znając przewodnictwo roztworu przy tych dwuch stężeniach, możemy obliczyć spółczynnik α.

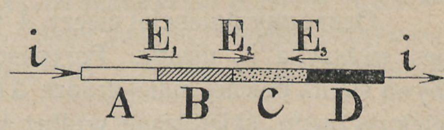
Przypuszczamy, że roztwory najbardziej rozcieńczone mają najwięcej cząsteczek zjonizowanych, wszystkie cząsteczki mogą być jednak zjonizowane tylko przy nieskończenie małej zawartości ciała rozpuszczonego. Stosunek więc $\frac{k_0}{N_2}$ określamy jako granicę, do której zbliża się ta wielkość przy stale wzrastającym rozcieńczeniu.

Obliczenia spółczynnika α, oparte na tych przypuszczeniach, dają wyniki zgodne z wynikami obliczeń, opartych na obniżeniu się temperatury zamarzania i podwyższeniu się temperatury wrzenia roztworów.

Wyniki pomiarów oporu właściwego roztworów, podane w tablicy na str. 24, można wyjaśnić na podstawie pojęcia jonizacji w sposób następujący.

Przy zwiększaniu zawartości ciała rozpuszczonego do 15% dla wszystkich roztworów opór się zmniejsza, a więc przewodnictwo wzrasta, ponieważ zwiększa się liczba cząsteczek ciała rozpuszczonego, a przez to i jonów, przenoszących ładunki elektryczne. Przy pewnym większym stężeniu niektóre roztwory wykazują minimum oporu. Opór kwasu siarkowego i azotowego wzrasta, gdy stężenie jest wyższe od 30%, to samo się dzieje z oporem kwasu solnego i siarczanu magnezu powyżej 15%, a siarczanu cynku powyżej 25%. Dokładniej minimum oporu kwasu siarkowego wypada przy 30%, kwasu azotowego przy 29,7%, kwasu solnego przy 18,3%, wodorotlenku potasu przy 28%, siarczanu cynku przy 23,5%, a siarczanu magnezu przy 17,4%. Wzrost oporu właściwego przy znacznym stężeniu tłomaczymy zmniejszeniem się liczby jonów. Ze wzrostem stężenia przybywają wprawdzie nowe cząsteczki ciała rozpuszczonego, ogólna więc ich liczba wzrasta, ale zmniejsza się znacznie spółczynnik α, t. j. znacznie mniejsza część cząsteczek jest zjonizowana.

4. Siły elektromotoryczne w obwodzie, zawierającym elektrolity. Gdy prąd płynie w obwodzie (rys. 170), składającym się z metali i elektrolitów o różnym składzie chemicznym lub różnym stężeniu, w miejscach zetknięcia różnorodnych części obwodu spostrzegamy przemiany cieplne i chemiczne, a mianowicie wywiązuje się, lub zostają pochłonięte ciepło i energja chemiczna.



Rys. 170.

Z tego wynika, że w miejscach zetknięcia różnorodnych części obwodu działają siły elektromotoryczne jedne w kierunku prądu, inne zaś przeciw prądowi.

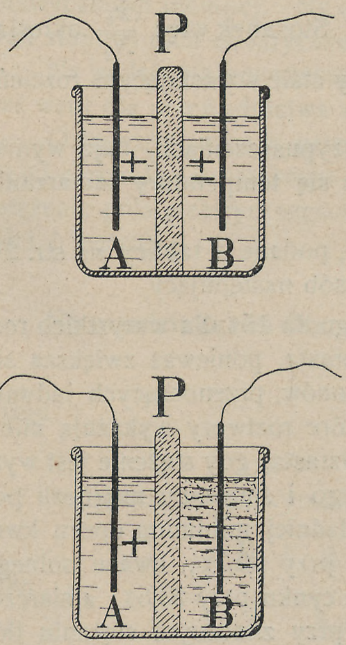
Siły elektromotoryczne, pod których wpływem wywiązuje się lub powstaje

ciepło, są to znane nam już siły elektromotoryczne Peltier'a, inne zaś, uwarunkowane przemianami chemicznemi, są to siły elektromotoryczne elektrochemiczne.

Istnieje teorja sił elektromotorycznych elektrochemicznych, opierająca się na teorji dysocjacji i na zastosowaniu praw teorji gazów doskonałych do ciał rozpuszczonych.

Zasadniczą sprawą w tej teorji jest wyjaśnienie powstawania siły elektromotorycznej pomiędzy roztworami jednakowego składu, lecz o różnym stężeniu.

Rys. 171 przedstawia naczynie, rozdzielone w środku na dwie części A i B przegrodą porowatą P. Do obu części naczynia nalewamy roztworu tego samego ciała, lecz w A słabszego, a w B bardziej stężonego. W A i B cząstki są zjonizowane, w A i B ilość i ładunek jonów dodatnich równa się ilości i ładunkowi jonów ujemnych.



Rys. 171 i 172.

W tych warunkach, jak wiadomo z teorji roztworów, wskutek wytworzenia się ciśnienia osmotycznego, większego w części naczynia B niż w A, cząsteczki ciała rozpuszczonego przechodzą z B do A. Pośród tych częsteczek są także jony ujemne i dodatnie, a ruchliwość ich nie jest jednakowa. Załóżmy np., że jony dodatnie poruszają się szybciej od ujemnych, wtedy oczywiście ilość jonów dodatnich w części naczynia A będzie wkrótce przewyższała liczbę jonów ujemnych i wskutek tego w A płyn będzie naelektryzowany dodatnio, a w B ujemnie (rys. 172). Stopień elektryzacji nie może jednak przekroczyć pewnej granicy, ponieważ z chwilą powstania takiego przesunięcia jonów pomiędzy rozdzielonemi grupami jonów różnoimiennych, powstaje duża siła przyciągania, która zmniejsza szybkość ruchu jonów dodatnich i wytwarza ostatecznie pewną równowagę ruchu, polegającą na tym, że jony dodatnie i ujemne poruszają się już w dalszym ciągu z szybkością jednakową, co stanowi zwykłą dyfuzję.

Zanim jednak zjawisko to nastąpi, wytwarza się pomiędzy cieczą w A i B różnica stanów elektrycznych, np. ciecz A jest naelektryzowana dodatnio, a B ujemnie. Stąd wniosek, że na cieczach tych istnieją potencjały różne.

Oznaczmy potencjał cieczy A przez V_1, a cieczy B przez V_2. Potencjał V_1 jest wyższy, a V_2 niższy. Przypuśćmy, że przejście od potencjału V_1 do V_2 odbywa się na pewnej małej drodze Δl. Wtedy, oznaczając przez $\mathbf{E}$ natężenie pola elektrycznego, skierowane wzdłuż tej drogi od A do B, według § 3 rozdziału IX otrzymamy:

$$V_1 - V_2 = \mathbf{E}\,\Delta l.$$

Powstawanie takiej różnicy potencjałów kojarzymy zwykle z pojęciem siły elektromotorycznej, działającej w miejscu zetknięcia cieczy. Według określenia po-

danego w § 2 rozdziału IV, siłą elektromotoryczną nazywać będziemy w wypadku rozważanym wyraz:

$$-\mathbf{E}\Delta l = -(V_1 - V_2).$$

Stosując zwykłe oznaczenie dla siły elektromotorycznej E, będziemy mieli:

$$E = -(V_1 - V_2).$$

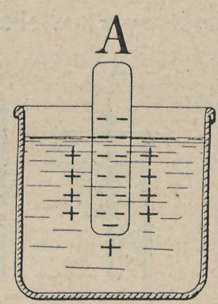
Znak minus wskazuje, że siła elektromotoryczna jest skierowana odwrotnie do napięcia na końcach drogi Δl, w stronę wzrostu potencjału.

We wzorach powyższych przyjmowaliśmy kierunek w stronę spadku potencjału za dodatni. Jeżeli to założenie zmienimy i za dodatni będziemy uważać kierunek w stronę wzrostu potencjału, to

$$E = V_1 - V_2.$$

Wielkość siły elektromotorycznej, powstającej przy zetknięciu omawianych cieczy, wzrasta przy zwiększaniu różnicy stężeń roztworów w A i B. [1])

Opierając się na powyższym wyjaśnieniu powstawania siły elektromotorycznej pomiędzy dwoma roztworami o różnym stężeniu, Nernst tłómaczy analogicznie istnienie siły elektromotorycznej pomiędzy ciałami stałemi a roztworami.



Rys. 173.

Rys. 173 przedstawia naczynie, wypełnione roztworem, w którym pogrążona jest płytka metalowa A. Płytka ta najczęściej elektryzuje się ujemnie, a roztwór dodatnio, pomiędzy cieczą a metalem powstaje różnica potencjałów. Możemy więc powiedzieć, rozumując jak poprzednio, że w miejscu zetknięcia cieczy z metalem działa siła elektromotoryczna, skierowana od metalu do roztworu. Dla wytłómaczenia tego zjawiska Nernst utworzył pojęcie: **prężności roztwórczej metalu**, analogiczne do ciśnienia osmotycznego roztworów.

Gdy owa prężność jest większa od prężności osmotycznej roztworu, to metal odrzuca pewną ilość swoich dodatnio naelektryzowanych jonów do roztworu, skutkiem czego na metalu przeważa ładunek ujemny, w cieczy zaś dodatni.

Silne przyciąganie jonów dodatnich przez metal ujemnie naelektryzowany, wstrzymuje dalsze odrzucanie jonów dodatnich i mamy wtedy równowagę pomiędzy różnicą sił prężności roztwórczej i ciśnienia osmotycznego, a siłą przyciągania elektrycznego.

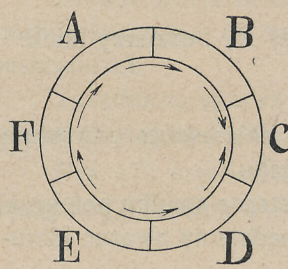
W tych wypadkach, kiedy ciśnienie osmotyczne przewyższa prężność roztwórczą metalu, układ ładunków będzie odwrotny. Jony dodatnie przejdą z roztworu do metalu i naelektryzują go dodatnio. Kierunek siły elektromotorycznej będzie tu od roztworu do metalu.

Wszystkie siły elektromotoryczne, powstające w podobny sposób przez zetknięcie ciał różnorodnych, nie zależą od wielkości stykających się powierzchni, lecz tylko od ich własności fizycznych i chemicznych.

---

[1]) Patrz szczegóły w książce „Zasady fizyki" A. Witkowskiego, t. III, str. 398—408.

5. Obwód ogniwa galwanicznego. Jeżeli utworzymy obwód zamknięty z metali i elektrolitów (rys. 174), to suma sił elektromotorycznych, działających w miejscach zetknięcia nawet przy jednakowej temperaturze wzdłuż całego obwodu może nie równać się zeru.



Rys. 174.

W takim układzie pod wpływem siły elektromotorycznej wypadkowej przebiegać będzie prąd, i jedne części układu staną się źródłami prądu elektrycznego, inne zaś odbieraczami.

Źródło prądu, w którym praca prądu otrzymuje się głównie [1]) kosztem energji chemicznej, nazywamy **ogniwem galwanicznym.**

Rys. 175 przedstawia właśnie ogniwo galwaniczne, składające się z dwuch różnych metali, pogrążonych w elektrolicie. Przewodnik łączy końcówki ogniwa. W tych warunkach prąd w obwodzie zewnętrznym przebiega od A do B, a w wewnętrznym od B do A.

Dwie siły elektromotoryczne, najważniejsze z praktycznego punktu widzenia działają tu w miejscach zetknięcia metali z elektrolitem. Rozkład potencjałów w takim obwodzie może być przedstawiony za pomocą pierścienia (rys. 176), którego wysokość wyraża wielkość potencjału w odpowiednim miejscu obwodu. Część zazębiona pierścienia jest pokazana w większej skali na rys. 177, gdzie V_1 oznacza potencjał na płytce metalowej A, V' — potencjał cieczy, w miejscu zetknięcia z płytką A, V'' — potencjał cieczy, w miejscu zetknięcia z płytką B i wreszcie V_2 potencjał na płytce B. Siła elektromotoryczna ogniwa będzie w danym wypadku równa sumie dwuch sił elektromotorycznych E_1 i E_2, działających w miejscach zetknięcia płytek A i B z cieczą, a więc:

$$E = E_1 + E_2,$$

ale:

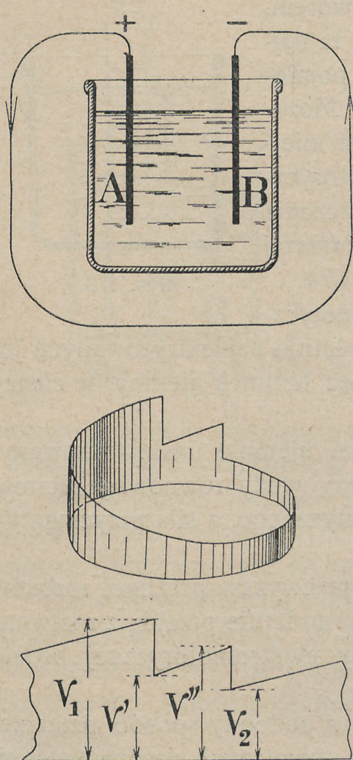
$$E_1 = V_1 - V', \text{ a } E_2 = V'' - V_2,$$

skąd:

$$E = V_1 - V' + V'' - V_2,$$

albo:

$$E = (V_1 - V_2) + (V'' - V').$$



Rys. 175, 176 i 177.

Różnica potencjałów $V_1 - V_2$ stanowi napięcie na końcówkach, a $V'' - V'$ — spadek potencjału w obwodzie wewnętrznym ogniwa z powodu oporu omicznego wewnątrz ogniwa; oznaczmy ten opór przez r.

$V'' - V'$ jest więc napięciem na końcach

[1]) Zjawiska Peltier'a wywołują wytwarzanie się pracy prądu kosztem energji cieplnej.

oporu r, jeżeli przeto oznaczymy przez i siłę prądu, to na zasadzie prawa Ohma:

$$V'' - V' = ir.$$

Założmy:

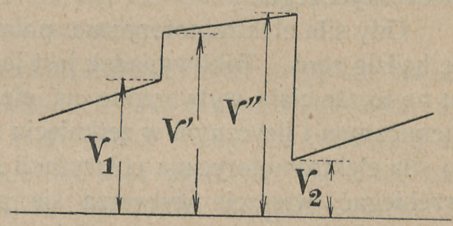
$$V_1 - V_2 = e,$$

wtedy:

$$E = e + ir.$$

Jest to ten sam wzór, który poprzednio wyprowadziliśmy ogólnie inną drogą.

W szczególnych warunkach może być jeszcze inny rozkład potencjałów w ogniwie. Jeżeli oba metale A i B, pogrążone w elektrolicie, elektryzują się jednoznacznie, ale w różnym stopniu, to wtedy rozkład potencjałów będzie taki, jak wskazano na rys. 178. Wtedy otrzymamy znowu:

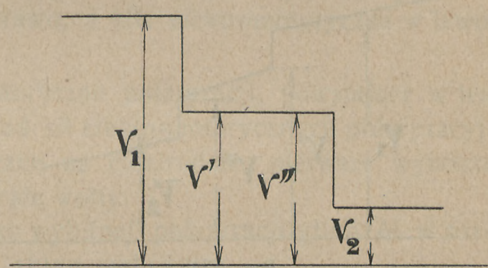


Rys. 178.

$$E_1 = V_1 - V' \text{ i } E_2 = V'' - V_2,$$

ale wartość E_1 będzie ujemna, a suma $E_1 + E_2$ będzie mniejsza od E_2; wzory jednak poprzednie zachowają swą ważność.

Gdyby obwód ogniwa był przerwany, to nie mielibyśmy spadku napięcia ani w części obwodu zewnętrznej, ani wewnętrznej, wtedy rysunek 177 przybrałby postać przedstawioną na rys. 179, przyczem:



Rys. 179.

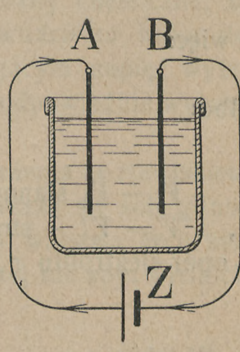
$$V' = V'' = V,$$

a więc:

$$E = E_1 + E_2 = V_1 - V + V - V_2 =$$
$$= V_1 - V_2 = e.$$

Napięcie na końcówkach ogniwa równa się w tym wypadku sile elektromotorycznej.

6. Siła elektromotoryczna polaryzacji. Gdy przez elektrolit przepuszczamy prąd elektryczny (rys. 180), z pewnego źródła prądu Z, to przemiany chemiczne, zachodzące na powierzchni elektrod A i B, mogą wywołać tam siłę elektromotoryczną o kierunku odwrotnym względem kierunku prądu; taka siła elektromotoryczna nazywa się **siłą elektromotoryczną polaryzacji.** [1])



Rys. 180.

Jeżeli np. naczynie będzie wypełnione roztworem kwasu siarkowego, w którym pogrążone są dwie płytki platynowe A i B, to wobec tego, że obie elektrody są wykonane z jednakowych metali, w pierwszej chwili żadnej siły elektro-

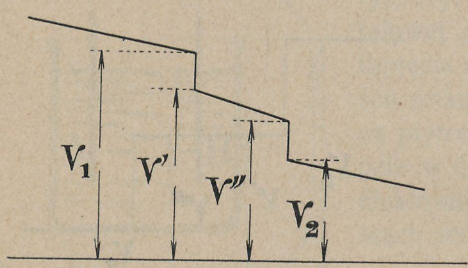
[1]) t. j. biegunowości, powstaje bowiem pewna biegunowość, której przedtym nie było.

motorycznej wypadkowej w przyrządzie elektrolitycznym nie będzie. Pod wpływem dowolnie małego napięcia prąd zacznie przepływać przez elektrolit; skoro jednak wytworzy się pewna ilość wodoru i tlenu na elektrodach w postaci pęcherzyków, prąd osłabnie i jeśli napięcie jest zbyt małe, spadnie prawie do zera. Zjawisko to tłómaczy się tem, że z chwilą wydzielenia się gazów na elektrodach, w miejscach zetknięcia elektrod z elektrolitem powstają nowe siły elektromotoryczne, tak zwane polaryzacyjne, skierowane przeciwko prądowi. Te siły elektromotoryczne, razem wzięte, stanowią siłę elektromotoryczną polaryzacji przyrządu elektrolitycznego.

Gdy siła elektromotoryczna polaryzacji zrównoważy napięcie, prąd równać się będzie zeru. Taki wypadek jest jednak praktycznie niemożliwy, a to ze względu na to, że ciała wytworzone na elektrodach podlegają powolnym przemianom chemicznym i fizycznym w zetknięciu z elektrodami i z elektrolitem, skutkiem czego siła elektromotoryczna polaryzacji słabnie i prąd, chociaż mały, znowu zaczyna przebiegać; wreszcie wytwarza się pewna równowaga dynamiczna, przy której ilość wydzielonych przez ten słaby prąd ciał równa się ilości pochłoniętej przez powyższe przemiany.

Takie zmniejszanie się siły elektromotorycznej polaryzacji nazywamy **depolaryzacją**. W wypadku wyżej podanym mieliśmy przykład **depolaryzacji samorzutnej.**

Rozkład potencjałów w przyrządzie elektrolitycznym możemy przedstawić w sposób wskazany na rys. 181, gdzie V_1 przedstawia potencjał na elektrodzie A, V' — potencjał cieczy w miejscu zetknięcia z elektrodą A, V'' — potencjał cieczy w miejscu zetknięcia z eloktrodą B i wreszcie V_2 — potencjał elektrody B.



Rys. 181.

Siłą elektromotoryczną polaryzacji E będzie suma dwuch sił elektromotorycznych: jednej E_1 przy elektrodzie A i drugiej E_2 przy elektrodzie B.

$$E_p = E_1 + E_2,$$

$$E_1 = V_1 - V', \quad \text{a} \quad E_2 = V'' - V_2,$$

a więc:

$$E_p = V_1 - V' + V'' - V_2,$$

albo:

$$E_p = (V_1 - V_2) - (V' - V'').$$

$V_1 - V_2$ stanowi napięcie na końcówkach przyrządu, które oznaczymy przez e, a $V' - V''$ — stratę napięcia w elektrolicie; jeżeli więc siła prądu będzie i, a opór elektrolitu r, to według prawa Ohma:

$$V' - V'' = i \,.\, r.$$

W takim razie:

$$E_p = e - i \,.\, r,$$

albo:

$$e = E_p + i \cdot r.$$

Są jeszcze inne okoliczności, pod wpływem których powstaje siła elektromotoryczna polaryzacji.

Załóżmy, że elektrody A i B (rys. 180) są to płytki miedziane, pogrążone w roztworze siarczanu miedzi. Pod wpływem prądu elektrycznego miedź wydziela się na elektrodzie B, a płytka A rozpuszcza się, tworząc siarczan miedzi; skład chemiczny elektrod w tym przypadku nie zmienia się, doświadczenie jednak wskazuje, że i wówczas powstają siły elektromotoryczne polaryzacji.

Otóż przyczynę powstawania tych sił elektromotorycznych przypisać należy nierównej zmianie stężenia roztworu przy elektrodach, jaka zachodzi skutkiem różnej szybkości jonów, co zaznaczyliśmy już poprzednio. Jony Cu poruszają się prawie dwa razy wolniej, niż jony SO_4, w pobliżu więc płytki A, która się rozpuszcza, stężenie roztworu wzrasta, w pobliżu zaś płytki B, gdzie osadza się miedź, stężenie roztworu zmniejsza się. Mamy więc roztwory o różnym stężeniu obok siebie w tym samym naczyniu; w tych zaś warunkach, jak widzieliśmy, powstaje pomiędzy niemi siła elektromotoryczna. Kierunek tej siły będzie w danym razie od B do A przeciwko prądowi, ponieważ ruchliwsze jony ($- SO_4$) naelektryzują ciecz z prawej strony ujemnie, a brak ich z lewej strony wywoła tam elektryzację dodatnią. Natężenie pola elektrycznego w cieczy pod wpływem tych stanów elektrycznych będzie skierowane w prawo, a siła elektromotoryczna w lewo, t. j. przeciw prądowi.

Zaznaczyć należy, że siły elektromotoryczne polaryzacji, powstające w ten sposób w roztworach, są znacznie słabsze od sił elektromotorycznych polaryzacyjnych, wywołanych przez przemiany chemiczne na elektrodach; pierwsze wynoszą zwykle niewielkie części wolta, drugie zaś całe wolty. [1])

Nadto należy też wspomnieć o bardzo wybitnej polaryzacji glinu Al w rozcieńczonych roztworach kwasu siarkowego, ałunu, sodu i t. p.

Gdy przyrząd elektrolityczny ma jedną płytkę z glinu, a drugą z węgla, żelaza, ołowiu lub platyny, obie zaś płytki są pogrążone w jednym z powyżej wspomnianych roztworów, to prąd elektryczny, płynący w kierunku od glinu do drugiej płytki, wywołuje na płytce glinowej (anodzie +) takie przemiany chemiczne, że siła elektromotoryczna polaryzacji zdaje się wynosić od dwudziestu kilku do 120 woltów. Wobec tego prąd pod napięciem, nieprzewyższającym napięć wyżej podanych, może płynąć tylko chwilowo, dopóki nie powstaną odpowiednie wytwory elektrolizy.

Prawdopodobnie jednak w tych wypadkach mamy do czynienia ze zjawiskiem nieco odrębnym, mianowicie na powierzchni płytki glinowej tworzą się sole glinowe, które posiadają bardzo duży opór. Bardzo cienka jednak warstwa tych soli powstrzymuje prąd prawie zupełnie tylko przy wskazanych wyżej nie zbyt wielkich napięciach.

---

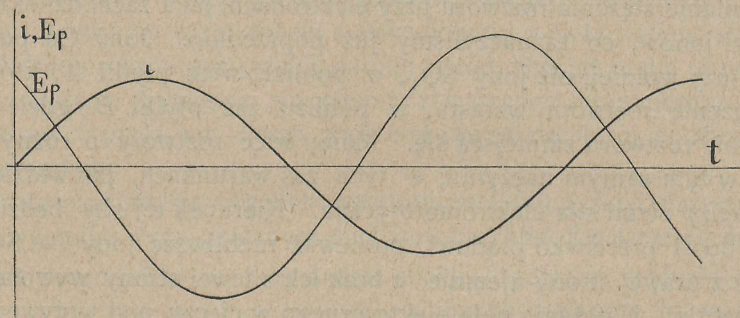
[1]) Dla kwasu siarkowego przy elektrodach platynowych $E_p =$ około 2 V. Dla siarczanu miedzi dwuch stężeń 10 gr w litrze i 1 gr w litrze $E_p =$ około 0,035 V.

W celu przedstawienia charakterystyki wszechstronnej sił elektromotorycznych polaryzacji rozważyć jeszcze należy ich zmienność w czasie, jeżeli prąd, przepływający przez elektrolit, nie jest stały.

Powstanie polaryzacji zależy od pewnych przemian chemicznych. Naprzód więc powstaje prąd, a następnie odbywają się stopniowo te przemiany, pod wpływem których wytwarza się dopiero siła elektromotoryczna polaryzacji. Z biegiem procesów chemicznych zmienia się wielkość tej siły elektromotorycznej.

Stąd wynika, że przepuszczając prąd zmienny przez elektrolit, otrzymamy w przyrządzie elektrolitycznym zmienną siłę elektromotoryczną polaryzacji.

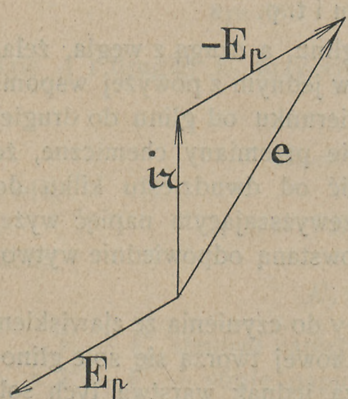
Tak np., przepuszczając przez elektrolit prąd sinusoidalnie zmienny, otrzy-



Rys. 182.

mamy siłę elektromotoryczną polaryzacji, która również będzie okresowo zmienna, chociaż postać krzywej, wyrażającej zmienność tej siły elektromotorycznej, nie będzie sinusoidalna.

Przytem siła elektromotoryczna polaryzacji w zmienności swojej będzie opóźniać się względem prądu; a ponieważ prąd o pewnym kierunku wywołuje siłę elektromotoryczną w odwrotnym kierunku, więc stąd należy przypuszczać, że układ krzywych prądu i siły elektromotorycznej polaryzacji będzie taki, jak wskazano na rys. 182, (nie zwracając uwagi na postać krzywej).



Rys. 183.

Widzimy, że sinusoida E_p wyprzedza i. Napięcie na elektrodach wanny elektrolitycznej otrzymamy ze wzoru dla prądu według prawa Ohma:

$$i_t = \frac{e_t + E_{pt}}{r},$$

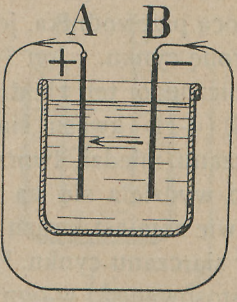
albo:

$$e_t = i_t \,.\, r - E_{pt}.$$

Dodając wektory (ir) i $(-E_p)$, znajdziemy e (rys. 183). Z rysunku widzimy, że prąd wyprzedza napięcie. Wanna elektrolityczna ma więc na fazę prądu taki sam wpływ, jak kondensator.

7. Zasady budowy chemicznych źródeł prądu. Chemiczne źródła prądu składają się zazwyczaj z dwóch ciał stałych (metale albo węgiel) i elektrolitu (rys. 184).

Zwykle jedna elektroda jest cynkowa, druga zaś miedziana, ołowiana lub węglowa. Elektrolity również nie są zbyt urozmaicone: kwas siarkowy, roztwór siarczanów cynku lub magnezu, albo też roztwór chlorku amonu lub wodorotlenku potasowego. Nadto we wszystkich praktycznie używanych ogniwach galwanicznych są jeszcze odczynniki, mające na celu usunięcie albo przynajmniej osłabienie polaryzacji, jaka zachodzi w każdym wypadku elektrolizy, a więc też i w ogniwie.



Rys. 184.

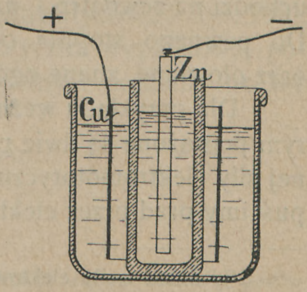
Dla dokładniejszego zrozumienia zjawiska polaryzacji ogniwa galwanicznego, rozważmy przemiany, zachodzące w ogniwie, składającym się z płytek miedzianej i cynkowej, pogrążonych w rozcieńczonym kwasie siarkowym.

Gdy połączymy końcówki ogniwa drutem (rys. 184), to wewnątrz ogniwa prąd popłynie od cynku do miedzi. Z prądem przesuwają się jony dodatnie wodoru (+H) (+H), a przeciw prądowi — jony ujemne (—SO_4) resztki kwasowej. SO_4 łączy się z cynkiem, wytwarzając sól $ZnSO_4$, a wodór osiada w postaci pęcherzyków na miedzi. Wodór ten wywołuje siłę elektromotoryczną polaryzacji, która skierowana jest wbrew prądowi, a więc przeciwko głównej sile elektromotorycznej ogniwa.

W celu uniknięcia tej właśnie polaryzacji ogniwa stosowane są rozmaite czynniki chemiczne, pochłaniające zawczasu wodór i w ten sposób usuwające polaryzację, tak np. siarczan miedzi, kwas azotowy, dwuchromian potasu, dwutlenek manganu i tlenek miedzi. Wszystkie tego rodzaju ciała nazywają się depolaryzatorami. Najlepszymi depolaryzatorami są roztwory wodne; ciała twarde oczywiście powolniej łączą się z wodorem. Ogniwa bez depolaryzatorów lub z depolaryzatorami słabo działającemi, nazywamy **niestałemi**, ogniwa zaś z dobremi depolaryzatorami — **stałemi**.

Zaznaczyć jednak należy, że niema depolaryzatorów idealnych; ściśle biorąc, każde ogniwo polaryzuje się nieco, skutkiem czego jego siła elektromotoryczna podczas przepływu prądu jest zawsze cokolwiek mniejsza od siły elektromotorycznej, która powstaje przy obwodzie otwartym.

Ażeby zrozumieć dokładniej działanie depolaryzatorów, rozważmy bliżej wpływ depolaryzujący siarczanu miedzi, stosowanego w ogniwie Daniella. Ogniwo to ma dwa naczynia, umieszczone jedno w drugim (rys. 185); naczynie wewnętrzne wykonane z gliny niepolewanej, jest porowate. Do naczynia wewnętrznego nalewa się kwasu siarkowego, w którym pogrąża się pręt cynkowy, do naczynia zaś zewnętrznego nalewa się

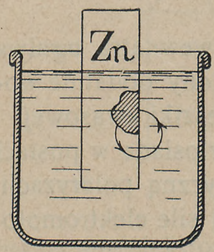


Rys. 185.

siarczanu miedzi, w którym pogrąża się blachę miedzianą, zwiniętą cylindrycznie. Kwas siarkowy rozpada się na jony (+H) (+H) i (SO_4), a siarczan miedzi — na (+Cu) (+Cu) i (—SO_4).

Po zamknięciu obwodu zewnętrznego przez połączenie miedzi z cynkiem za pomocą przewodnika, jony dodatnie przenoszą się w stronę miedzi, a jony ujemne w stronę cynku. Jon (+Cu) osadza się na miedzi i tu, nie zmieniając składu chemicznego tej elektrody, nie wywołuje oczywiście żadnej polaryzacji. Jony (+H) (+H) kwasu siarkowego łączą się z płynącym ku nim jonem (—SO_4) siarczanu miedzi, tworząc kwas siarkowy H_2SO_4, a jon (— SO_4) kwasu siarkowego wydziela się na cynku, tworząc siarczan cynku $ZnSO_4$. W tego rodzaju ogniwie zamiast kwasu siarkowego może być zastosowany z tymże skutkiem roztwór siarczanu cynku. [1]) Na szczególną uwagę zasługuje sprawa, dotycząca cynku, stosowanego w ogniwach.

Zwykły cynk handlowy jest zawsze zanieczyszczony domieszką rozmaitych innych metali. W takich warunkach sztabka cynku, pogrążona np. w roztworze kwasu siarkowego, rozpuszcza się w nim pod wpływem miejscowych prądów elektrycznych. Na rys. 186 widzimy właśnie kawałek cynku, pogrążony w kwasie i z boku kawałek obcego metalu; w tych warunkach mamy ogniwo o obwodzie zamkniętym, w którym przebiega prąd tak, jak to widzimy na rys. 186, mianowicie w cieczy płynie on od cynku do metalu obcego. Przy takim prądzie następuje, jak wiadomo, ruch jonów i tworzenie się soli cynku.



Rys. 186.

Zupełnie czysty cynk nie podlegałby takiemu działaniu kwasu i rozpuszczałby się tylko wtedy, gdyby ogniwo, do którego został użyty, było czynne, t. j. dawało prąd w obwodzie zewnętrznym. W takiż sposób zachowuje się również cynk amalgamowany. Najprostszy sposób amalgamowania polega na nacieraniu cynku pogrążonego w słabym roztworze kwasu siarkowego rtęcią za pomocą szczotki lub kawałka tkaniny; można również do roztopionego cynku dodać 4% rtęci.

Ważne znaczenie posiadają również t. zw. ogniwa odwracalne, w których reakcje, zachodzące przy działaniu ogniwa jako źródła prądu, mogą być odwrócone za pomocą przepuszczenia przez nie prądu w kierunku odwrotnym względem prądu, który przebiegał przez ogniwo podczas działania jego jako źródła prądu. Idealnie odwracalnym ogniwem może być tylko takie, w którym żaden gaz nie uchodzi na zewnątrz i nie odbywa się dyfuzja lub nieodwracalna reakcja wtórna. Do pewnego stopnia odwracalnemi są: np. ogniwa Daniella, tlenowodorowe oraz ołowiane, znane ogólnie pod nazwą akumulatora ołowianego.

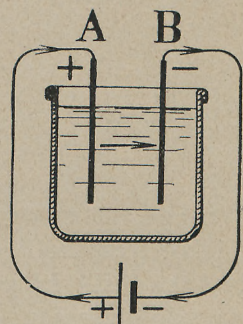
Dla przykładu weźmy naczynie z rozcieńczonym kwasem siarkowym, w którym pogrążone są dwie płytki platynowe A i B. Na razie taki układ nie ma żadnej siły elektromotorycznej wypadkowej; jeżeli jednak z postronnego źródła przepuścimy prąd przez elektrolit (rys. 187), to na płytce A wydzieli się tlen, a na B

---

[1]) Skład i siły elektromotoryczne różnych ogniw galwanicznych można znaleźć w „Zasadach fizyki" A. Witkowskiego, t. III, str. 296.

wodór; jeżeli teraz prąd przerwiemy, to pomiędzy elektrodami otrzymamy napięcie około 1,1 V, stanowiące siłę elektromotoryczną polaryzacji, powstałą skutkiem zetknięcia zmienionych chemicznie elektrod z elektrolitem.

Gdy połączymy elektrody drutem (rys. 188), otrzymamy w obwodzie zewnętrznym ogniwa prąd płynący od A do B, pod wpływem powyższej siły elektromotorycznej. W tych warunkach przyrząd działać będzie jako źródło prądu, zwane ogniwem wodoro-tlenowem. Prąd będzie tu płynął tak długo, aż cały wodór i tlen, które wydzieliły się na elektrodach i utrzymały na płytach, przejdą z powrotem do do roztworu jako jony. [1])

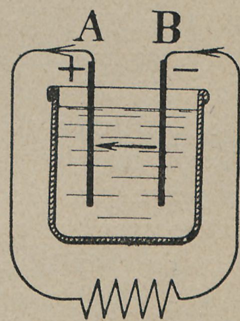


Rys. 187.

Tego rodzaju ogniwa nazywamy też niekiedy ogniwami wtórnemi, najczęściej zaś akumulatorami.

Gromadzenie ciał, wywołujących powstawanie siły elektromotorycznej w akumulatorze za pomocą przepuszczania przez niego prądu, nazywamy ładowaniem, a korzystanie z akumulatora jako ze źródła prądu — wyładowywaniem. Rys. 187 przedstawia ładowanie akumulatora, rys. zaś 188 wyładowywanie.

W praktyce najczęściej są stosowane akumulatory ołowiane, w których elektrolitem jest kwas siarkowy, pozatem są jeszcze w użyciu akumulatory żelazno-niklowe z roztworem wodorotlenku potasu.



Rys. 188.

8. Energietyka zjawisk elektrochemicznych. Rozważając zjawiska energietyczne przy elektrolizie, należy mieć na względzie dwie postaci energji: cieplną i chemiczną, a następnie pracę prądu elektrycznego. Obie postaci energji i praca prądu mogą być pochłaniane lub wytwarzane w rozważanym przyrządzie elektrolitycznym. Przemiany energietyczne zawsze podlegają prawu zachowania energji, energja więc, dostarczona przyrządowi elektrolitycznemu, równa się przyrostowi energji wytworzonej w tym przyrządzie, i naodwrót, energja, otrzymana z niego, równa się ubytkowi energji w nim zawartej.

Niech będzie e napięcie na elektrodach przyrządu elektrolitycznego (rys. 180), i siła prądu, r — opór wewnętrzny, a E siła elektromotoryczna wypadkowa, powstająca w tym przyrządzie; może mieć ona kierunek zgodny z prądem, lub też przeciwny prądowi.

Moc prądu dostarczoną przyrządowi wyrażamy wzorem:

$$e\,i.$$

[1]) W wykonaniu praktycznym ogniwa wodoro-tlenowe zaopatrują się w zbiorniki gazów nad płytkami, a same płytki pokrywają się czernią platynową, która pochłania wielką ilość gazów.

Moc prądu wytwarzająca ciepło Joule'a jest:

$$i^2 r,$$

a moc energji, pochłaniana lub otrzymywana pod włwem siły elektromotorycznej E, jest:

$$\pm E i.$$

Wtedy na zasadzie prawa zachowania energji otrzymamy:

$$e i = i^2 r \pm E i.$$

Wzór powyższy wyraża przemiany energietyczne, zachodzące w odbieraczu prądu, jakoteż i w źródle prądu. Gdy mamy odbieracz — wannę elektrolityczną — to iloczyn $e i$ jest wielkością dodatnią; we wzorze powyższym tę moc prądu dostarczamy do przyrządu. Gdy zaś chodzi o źródło prądu — ogniwo galwaniczne — to $e i$ będzie ujemne, iloczyn ten wyraża wtedy moc prądu, otrzymywaną z tego źródła.

Zastanawiając się dokładniej nad znaczeniem iloczynu Ei, dochodzimy do wniosku, że wyraża on moc energji chemicznej, znikającej lub powstającej w przyrządzie elektrolitycznym.

Jest to jednak zupełnie słuszne tylko wtedy, gdy siła elektromotoryczna E wyraża jedynie siłę elektromotoryczną polaryzacji. W rzeczywistości, oprócz siły elektromotorycznej polaryzacji, wchodzą tu w grę jeszcze siły elektromotoryczne Peltier'a, które wywołują przemiany pracy prądu na ciepło i odwrotnie.

Są takie układy ciał, przy których siły elektromotoryczne Peltier'a mają wartość bardzo małą w porównaniu do całej siły elektromotorycznej, wytwarzającej się w przyrządzie elektrolitycznym. Wtedy twierdzimy, że iloczyn $E i$ prawie dokładnie wyraża moc prądu, powstającą z energji chemicznej, lub też wytwarzającą energję chemiczną.

W tym przypadku możemy rozważania nasze o przemianach energji posunąć dalej i za lordem Kelvinem obliczyć wielkość siły elektromotorycznej E, opierając się na wiadomościach o energji reakcyj chemicznych, przy których ta siła elektromotoryczna powstaje.

Energja, wytwarzana lub pochłaniana podczas reakcji chemicznych, określa się ilością ciepła, wydzielanego lub pochłanianego, gdy gram, równoważnik jednego z ciał, bierze udział w reakcji. Oznaczmy tę ilość ciepła, wyrażoną w kilogram-kalorjach, przez C.

Ilość elektryczności, która musi przepłynąć przez roztwór, aby wydzielić jeden gram-równoważnik jonu wynosi 96540 kulombów, praca więc elektryczności w dżaulach wyrazi się wzorem:

$$E \,.\, 96540,$$

a równoważna ilość ciepła w kalorjach kilogramowych wzorem:

$$\frac{E \,.\, 96540 \,.\, 0{,}24}{1000}.$$

Na zasadzie prawa zachowania energji otrzymujemy:

$$\frac{E \,.\, 96540 \,.\, 0{,}24}{1000} = C,$$

a więc:

$$E = 0{,}0432 \,.\, C.$$

Załóżmy np., że mamy ogniwo, składające się z miedzi i cynku pogrążonych w kwasie siarkowym. Jak wiemy, wodór wydzielać się będzie na miedzi, a cynk z resztą kwasu utworzy siarczan cynku. Reakcja tworzenia się siarczanu cynku wyzwoli więcej energji, niż jej pochłonie rozkład kwasu siarkowego; różnica wyniesie 19 kaloryj kilogramowych na jeden gramowy równoważnik roztworzonego cynku. Kosztem tej wolnej energji powstanie praca prądu elektrycznego, a więc siła elektromotoryczna ogniwa będzie:

$$E = 0{,}0432 \,.\, 19 = 0{,}815\ V.$$

Jest to siła elektromotoryczna, jaka wytworzy się przy obwodzie zewnętrznym przerwanym, gdy niema polaryzacji.

Ze względu jednak na obecność sił elektromotorycznych drugorzędnych o charakterze sił elektromotorycznych Peltier'a, rzeczywista siła elektromotoryczna tego ogniwa wyniesie około 1 V.

Najdokładniej zaś daje się za pomocą powyższego wzoru określić siła elektromotoryczna ogniwa Daniell'a, w którym Zn przechodzi w $ZnSO_4$, a Cu wydziela się z $CuSO_4$; przemianę tę możemy wyrazić wzorem:

$$Zn + CuSO_4 = Cu + ZnSO_4.$$

Doświadczenia wykazują, że przy takiej przemianie bez udziału prądu wydzieli się 25,05 kilogramokaloryj ciepła, gdy w reakcji bierze udział jeden gramorównoważnik miedzi i cynku.

Na zasadzie powyżej wyprowadzonych wzorów otrzymamy:

$$E = 0{,}0432 \,.\, 25{,}05 = 1{,}08\ V.$$

Na szczególną uwagę zasługuje jeszcze sprawa przemian energietycznych przy elektrolizie i sposób obliczania sił elektromotorycznych, oparty na podstawie teorji osmotycznej.

Widzieliśmy wyżej, że zjawiska elektrolityczne można uważać jako przejście cząsteczek ciał ze stanu jednej koncentracji w inną, z jednej prężności osmotycznej w inną, lub ze stanu stałego do roztworu, również jako przejście z pod pewnej prężności roztwórczej do prężności osmotycznej w roztworze.

Przez analogję można zastosować do tych zjawisk te same prawa, jakie stosują się do gazów doskonałych. Równanie zasadnicze, określające stan gazu doskonałego, jest jak wiadomo następujące:

$$p \,.\, v = R \,.\, T,$$

gdzie p — prężność, v — objętość zajęta przez cząsteczkę gramową gazu, T — tem-

peratura bezwzględna gazu, R — stała jednakowa dla wszystkich gazów doskonałych.

Ponieważ przy $T = 273^0$ (t. j. 0^0 Celsiusa) wzór będzie:

$$p_0 \,.\, v_0 = R \,.\, 273^0,$$

przeto:

$$R = \frac{p_0 \cdot v_0}{273}.$$

Dokonane pomiary stwierdziły, że w 1 cm^3 tlenu przy temperaturze 0^0 i prężności jednej atmosfery znajduje się 0,00143011 *gr* gazu. Wobec tego 1 *gr* zajmuje objętość 699,3 cm^3, a jedna gramocząsteczka, zawierająca $2 \times 16 = 32$ *gr*, zajmuje objętość 22350 cm^3. Objętość ta, jak wspomniano wyżej, stosuje się do wszystkich gazów doskonałych. Mając tę liczbę, możemy obliczyć stałą R.

Ponieważ $p_0 \,.\, v_0$ wyraża się w jednostkach pracy, możemy ten iloczyn wyrazić np. w dżaulach (1 dżaul $= 10^7$ ergów $= \frac{1}{981000} \cdot 10^7$ *kgcm*).

$$p_0 \cdot v_0 = 1{,}0336 \,.\, 22350 \; kgcm,$$

co stanowi:

2270 dżaulów.

Stała R będzie:

$$R = \frac{p_0 \cdot v_0}{273} = \frac{2270}{273} = 8{,}31 \text{ dżaulów na } 1^0.$$

Wzór charakterystyczny dla gazów będzie w tym razie

$$p \,.\, v = 8{,}31 \,.\, T.$$

Iloczyn $p \,.\, v$ wyraża się w dżaulach i stosuje się do jednej cząsteczki gramowej gazu.

Jeżeli chcemy obliczyć pracę A, wykonaną przez gaz przy jego rozszerzaniu się od prężności p_1 do prężności p_2, przy stałej temperaturze, to pracę tę wyrazić możemy całką:

$$A = \int_{p_2}^{p_1} v\,dp.$$

Ponieważ z równania powyższego:

$$v = \frac{8{,}31 \,.\, T}{p},$$

przeto:

$$A = \int_{p_1}^{p_2} \frac{8{,}31 \,.\, T}{p} \,.\, dp = 8{,}31 \,.\, T \,.\, \text{logn} \frac{p_2}{p_1}.$$

Zastępując logarytm naturalny dziesiętnym, otrzymamy:

$$A = \frac{8{,}31}{0{,}4343} \,.\, T \,.\, \log \frac{p_2}{p_1} = 19{,}15 \,.\, T \,.\, \log \frac{p_2}{p_1}.$$

Wzór ten można zastosować do obliczenia energji, która przetwarza się w pracę prądu przy elektrolizie. Załóżmy np., że mamy ogniwo koncentracyjne: jedyna siła elektromotoryczna, jaka tu istnieje, pochodzi od zetknięcia roztworów tej samej soli o różnem stężeniu.

Oznaczmy przez E siłę elektromotoryczną, przez w — wartościowość cząsteczki jonu, a przez m — liczbę cząsteczek ciała rozpuszczonego, która przechodzi z części naczynia, gdzie istnieje większe stężenie, do tej części, gdzie stężenie jest mniejsze, w czasie, kiedy na elektrodach wydziela się jedna cząsteczka.

Ilość elektryczności, która wtedy przepłynie przez elektrolit będzie:

$$96540 \,.\, w \,.$$

Praca zaś wynosi:

$$E \,.\, 96540 \,.\, w \,.$$

Energję, jaka powstała przy wyrównywaniu się stężeń w elektrolicie, możemy wyrazić, stosując wzór wyprowadzony dla gazów:

$$A = 19{,}15 \,.\, m \,.\, T \,.\, \log \frac{p_2}{p_1} \,.$$

Na podstawie prawa zachowania energji otrzymamy:

$$E \,.\, 96540 \,.\, w = 19{,}15 \,.\, m \,.\, T \,.\, \log \frac{p_2}{p_1} \,,$$

czyli:

$$E = 0{,}0001982 \,.\, \frac{m}{w} \,.\, T \,.\, \log \frac{p_2}{p_1} \,.$$

Prężności osmotyczne są proporcjonalne do stężeń, jeżeli więc stężenia oznaczymy przez s_2 i s_1, to otrzymamy:

$$E = 0{,}0001982 \,.\, \frac{m}{w} \,.\, T \,.\, \log \frac{s_2}{s_1} \,.$$

Przykład. Ogniwo utworzone jest z siarczanu miedzi o dwuch różnych stężeniach: w jednej części naczynia (rys. 171) [1]) znajduje się np. roztwór 10 *gr* w litrze, w drugiej zaś 1 *gr* w litrze. Doświadczalnie stwierdzono, że przy wydzieleniu się jednej gramocząsteczki miedzi na elektrodzie, różnica gęstości roztworów zmniejsza się w ten sposób, jak gdyby z roztworu gęstszego przeszło 1,2 cząsteczki gramowej jonów soli do roztworu rzadszego.

Mamy więc $s_2 = 10$, $s_1 = 1$, $m = 1{,}2$; miedź jest tu dwuwartościowa, przeto $w = 2$. Temperaturę przyjmujemy zwykłą pokojową 18° C., a więc $T = 291°$.

---

[1]) W celu odprowadzenia prądu z jednej i z drugiej strony pogrążone są płytki miedziane.

Siła elektromotoryczna według powyższego wzoru będzie wtedy:

$$E = 0{,}0001982 \,.\, \frac{1{,}2}{2} \,.\, 291 \,.\, \log 10 = 0{,}0346\ V.$$

Stosując wzór sił elektromotorycznych do przypadku, gdy chodzi o siłę elektromotoryczną, jaka powstaje pomiędzy metalem a roztworem, możemy oznaczyć przez P prężność roztwórczą metalu, a przez p — prężność osmotyczną roztworu; wtedy dla wyrażenia siły elektromotorycznej otrzymamy wzór następujący:

$$E = 0{,}0001982 \,.\, \frac{1}{w} \,.\, T \,.\, \log \frac{P}{p}\,.$$

Wielkość m jest tutaj jednostką. We wzorze tym prężność roztwórcza P metalu jest nieznana, możemy więc zastosować go do obliczenia wielkości P, gdy wartości innych czynników są znane z odpowiednich pomiarów.

ROZDZIAŁ XVIII.

Przemiana pracy prądu na pracę mechaniczną i odwrotnie — pracy mechanicznej na pracę prądu elektrycznego.

1. **Siła działająca na prąd elektryczny w polu magnetycznym.** W rozdziale I, przy określaniu pojęcia siły prądu elektrycznego, posiłkowaliśmy się wzorem:

$$dH = \frac{dl \cdot i}{r^2} \cdot \sin\alpha, \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

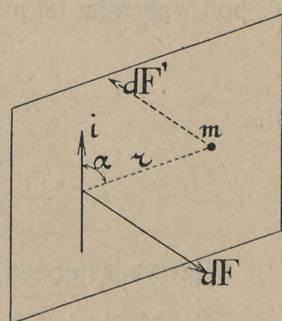
który wyraża natężenie pola magnetycznego w pewnym punkcie, znajdującym się na odległości r od środka nieskończenie małego odcinka prądu. Długość odcinka oznaczyliśmy przez dl, a siłę prądu przez i, kąt zaś pomiędzy r i dl przez α (rys. 189).

Na północną masę magnetyczną m, od prądu i działa siła: [1])

$$dF' = m \cdot dH.$$

Podstawiając ze wzoru (a) wyraz dla dH, otrzymamy:

$$dF' = \frac{dl \cdot i \cdot m}{r^2} \cdot \sin\alpha.$$



Rys. 189.

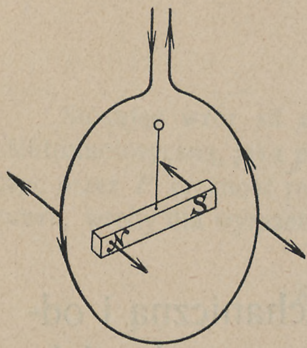
Doświadczenia stwierdzają, że magnesy, zmocowane z prądami elektrycznymi, nie okazują dążności do przesuwania się w jakąkolwiek stronę, stąd wniosek, że siły, działające od magnesów na prądy, równoważą się z siłami, działającymi od prądów na magnesy. Ta własność sił elektromagnetycznych wskazuje, że podlegają one III zasadzie mechaniki Newton'a.

Np. na rys. 190 mamy obwód kołowy, po którym przebiega prąd; w środku obwodu znajduje się magnes, którego oś leży w płaszczyźnie przewodnika kołowego Na podstawie tego, co wiemy o kierunku linij sił pola magnetycznego wokoło prądu, łatwo spostrzeżemy, że na magnes działać będzie moment obrotowy, pa-

---

[1]) Patrz rozdział I § 2.

trząc zgóry, wlewo. Jeżeli po zmocowaniu magnesu z przewodnikiem zespół ten swobodnie zawieszony ma pozostać w spoczynku, to magnes musi na prąd wywierać moment obrotowy odwrotny, t. j. w prawo. Z tego przykładu, który łatwo urzeczywistnić można doświadczalnie, wynika, że siła działania poszczególnego bieguna północnego o masie m na cząstkę prądu dl musi być skierowana tak, jak wskazuje wektor dF na rys. 189. Siła dF jest równoległa do dF', a więc prostopadła do płaszczyzny, w której znajdują się dl i r. Dla otrzymania wyników, zgodnych z doświadczeniem, należy przyjąć, że liczbowo $dF' = dF$, a więc:



Rys. 190.

$$dF = \frac{dl \, . \, im}{r^2} \, . \, \sin\alpha \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (b)$$

Wprowadźmy do tego wzoru natężenie pola magnetycznego, wywołanego przez masę magnetyczną m w tym miejscu, gdzie znajduje się prąd. Według prawa Coulomba, podanego w rozdziale I, siła działania wzajemnego pomiędzy dwoma masami magnetycznymi m i m', umieszczonymi w ośrodku o przenikliwości magnetycznej μ, na odległości r jedna od drugiej, wyraża się wzorem:

$$f = \frac{1}{\mu} \, . \, \frac{m \, . \, m'}{r^2} \, .$$

Natężenie pola, według określenia w rozdziale I, jest ilorazem siły przez masę magnetyczną, na którą ta masa działa, więc natężenie pola w odległości r od masy m, pod wpływem tej masy wyrażamy wzorem:

$$H = \frac{f}{m} \, ,$$

albo:

$$H = \frac{1}{\mu} \, . \, \frac{m}{r^2} \, ,$$

stąd:

$$\frac{m}{r^2} = \mu \, . \, H.$$

Wprowadzając ten wyraz we wzór (b), otrzymamy:

$$dF = \mu \, . \, H \, . \, dl \, . \, i \, . \, \sin\alpha.$$

Iloczyn $\mu \, . \, H$ jest indukcją magnetyczną B, [1]) więc:

$$dF = B \, . \, dl \, . \, i \, . \, \sin\alpha \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (c)$$

α oznacza kąt pomiędzy kierunkiem prądu i kierunkiem indukcji magnetycznej w tym miejscu, gdzie znajduje się prąd.

W tych przypadkach, gdy ośrodek stanowi powietrze, stosując układ bezwzględny jednostek elektromagnetycznych, w którym μ dla powietrza równa się się jedności, możemy wzór powyższy napisać inaczej:

$$dF = H \, . \, dl \, . \, i \, . \, \sin\alpha \, .$$

[1]) Patrz rozdział VI § 1 i 2.

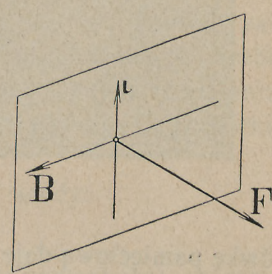
Należy jednak pamiętać, że w rzeczywistości H postawione jest tu na miejsce indukcji magnetycznej jako wielkość w tym przypadku jej równa.

Na podstawie równania (c) łatwo wyprowadzić wzór dla siły F, działającej na prosty przewodnik z prądem i, którego długość l umieszczona jest w jednostajnym polu magnetycznym o indukcji magnetycznej B, prostopadle do kierunku linij indukcji ($\alpha = 90^0$). W tym przypadku siły, działające na poszczególne cząstki prądu, będą równoległe, wypadkowa takich sił równa się ich sumie ($\sin 90^0 = 1$), przeto:

$$F = \int\limits_0 B \, . \, i \, . \, dl = B \, . \, i \, . \, l.$$

Jeżeli l wyrażamy w centymetrach a i i B w bezwzględnych jednostkach elektromagnetycznych, to otrzymamy wielkość siły w dynach.

Kierunek siły jest w związku z kierunkiem prądu i pola magnetycznego. Biorąc na uwagę, że na rys. 189 mamy masę magnetyczną północną, a linje sił magnetycznych wychodzą z masy północnej, układ trzech kierunków B, i, F przedstawi się tak, jak wskazano na rys. 191.

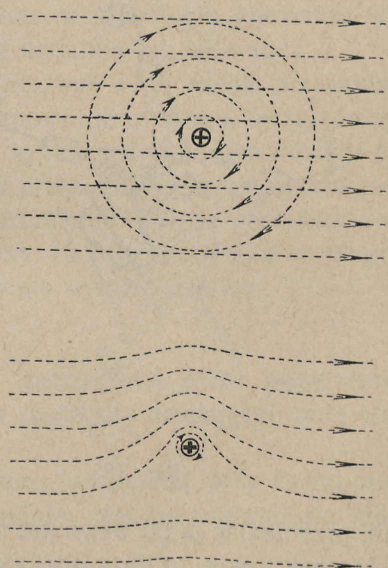


Rys. 191.

Kierunek siły działającej na prąd w polu magnetycznym, a także istotę tej siły można wyjaśnić jeszcze zupełnie inną drogą. Rozważmy prąd, płynący od nas prostopadle do płaszczyzny rysunku, w polu magnetycznym jednostajnym. Linje pola postronnego i linje pola prądu mają kształt, wskazany na rys. 192. W rzeczywistości wokoło prądu będzie istniało pole wypadkowe, którego kształt linij wskazany jest na rys. 193. Doświadczenie z opiłkami potwierdza wynik teoretycznego rozumowania; na rys. 194 widzimy odbitkę z fotografji układu opiłek wokoło prądu, umieszczonego w jednostajnym polu magnetycznym.

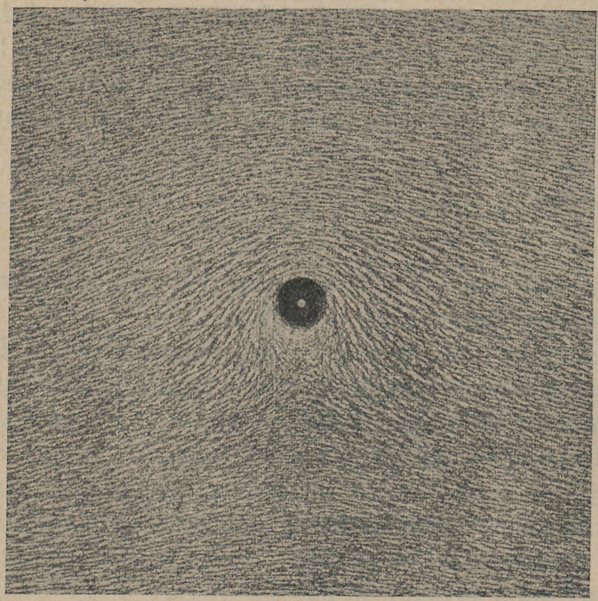
Wszystkie siły, działające w polu magnetycznym, można wyjaśnić, zakładając (według Faraday'a) istnienie napięć wzdłuż linji indukcji, dążących do skrócenia tych linji, i w poprzek linij ciśnień, rozsuwających je. Wielkość napięć podłużnych i ciśnień poprzecznych jest proporcyonalna do drugiej potęgi indukcji magnetycznej. [1])

Otóż, rozważając układ linji i wielkość indukcji w polu w przypadku wskazanym na rys. 192, łatwo spostrzedz, że nad drutem natężenie pola magnetycznego zewnętrznego


Rys. 192 i 193.

[1]) Patrz rozdział XIX § 4.

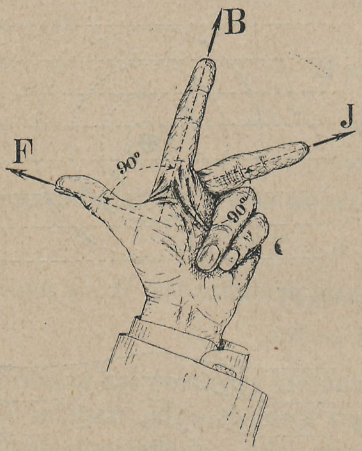
i pola prądu mają kierunki zgodne, a pod drutem niezgodne; wskutek tego wypadkowe natężenie pola, a więc i indukcja magnetyczna nad drutem jest większa, niż pod drutem, większa jest tam również gęstość linij sił magnetycznych. Skutkiem tego ciśnienie poprzeczne jest większe zgóry niż zdołu. Wypadkowa siła działa na dół.



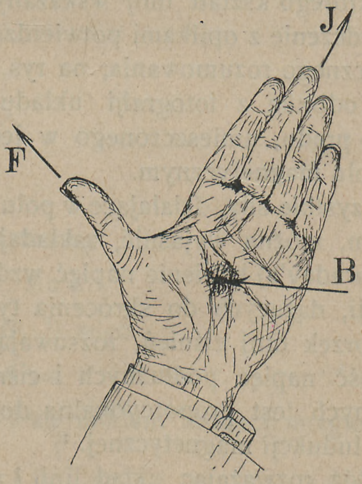
Rys. 194.

Najprostsza wskazówka pamięciowa co do kierunku siły F jest następująca: jeżeli ustawimy palec wielki i wskazujący **lewej ręki** w jednej płaszczyźnie, a palec środkowy prostopadle do nich i palec wskazujący zwrócimy w kierunku indukcji magnetycznej, a palec środkowy w kierunku prądu, to palec wielki wskaże kierunek siły (rys. 195).

Jeszcze prostszą wskazówkę pamięciową daje **dłoń lewa.** Gdy ustawimy dłoń lewej ręki z odchylonym dużym palcem w ten sposób, aby linje indukcji były skierowane prostopadle do



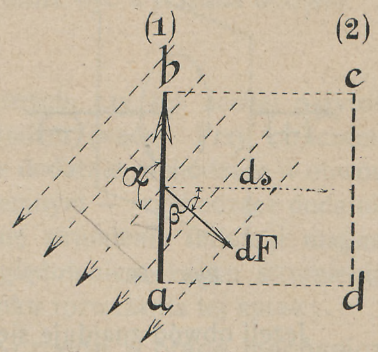
Rys. 195.



Rys. 196.

dłoni, przenikając ją od wewnątrz na zewnątrz, a palce złożone razem wskazywałyby kierunek prądu, to duży odchylony palec wskaże kierunek siły (rys. 196).

2. Praca siły, działającej na prąd elektryczny, znajdujący się w polu magnetycznym. Rozważymy ruch cząstki dl przewodnika z prądem i (rys. 197), w polu magnetycznym o indukcji magnetycznej B. Kierunek prądu jest tu pochylony pod kątem α względem natężenia pola. Przewodnik przesuwa się w ten sposób, że zachowuje swój kierunek, punkt zaś przyłożenia siły dF, działającej na przewodnik, zakreśla drogę ds, skierowaną pod kątem β do tej siły.



Rys. 197.

Pracę siły dF na drodze ds wyrażamy wzorem:

$$dA = dF \,.\, ds \,.\, \cos\beta,$$

albo, podstawiając wyraz dla dF, otrzymamy:

$$dA = dl \,.\, i \,.\, B \,.\, \sin\alpha \,.\, ds \,.\, \cos\beta.$$

Iloczyn $dl \,.\, \sin\alpha \,.\, ds \,.\cos\beta$ wyraża pole rzutu równoległoboku $abcd$, zakreślonego przez przewodnik w czasie ruchu, na płaszczyznę prostopadłą do B, iloczyn zaś $B \,.\, dl \sin\alpha \,.\, ds \,.\, \cos\beta$ stanowi strumień indukcji magnetycznej, lub inaczej liczbę linij sił magnetycznych, przenikających równoległobok $abcd$. O tym strumieniu możemy powiedzieć, że został on przecięty przez przewodnik podczas jego ruchu z położenia 1 do 2.

Oznaczmy strumień indukcji magnetycznej przez dN, wtedy:

$$dA = i \,.\, dN.$$

Wzór ten wskazuje, że **praca siły, wywieranej przez pole magnetyczne na przewodnik z prądem, wyraża się iloczynem siły prądu przez strumień indukcji magnetycznej, przecięty przez ten przewodnik w czasie jego ruchu.**[1])

Wzór ma zastosowania do ruchu przewodnika w dowolnym kierunku, więc, zależnie od znaku $\cos\beta$, może on wyrażać pracę dodatnią lub ujemną.

Mając to na uwadze, można wzór ten stosować i do ruchu przewodnika obrotowego lub też do ruchu złożonego — postępowo obrotowego, uwzględniając, że ruch obrotowy odcinka dl około jego środka w polu jednorodnym nie daje żadnej pracy siły dF; w tym razie bowiem odcinek przecina linje magnetyczne jedną i drugą połową w różnych kierunkach, czyli że strumienie te będą posiadały znaki różne, w sumie więc otrzymamy zero. Gdy mamy ruch przewodnika o długości skończonej, pracę sił elektromagnetycznych możemy wyrazić wzorem:

$$A = i \,.\, N,$$

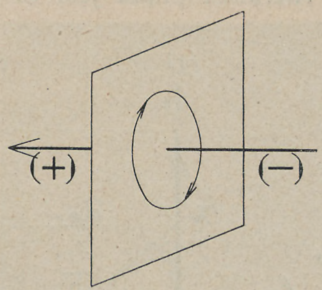
w którym N jest sumą algebraiczną strumieni, przeciętych przez poszczególne cząstki przewodnika, z uwzględnieniem tego, czy praca siły działającej na tę cząstkę jest dodatnia, czy też ujemna.

W praktyce wypada częstokroć rozważać pracę, wykonaną przy ruchu obwodów elektrycznych zamkniętych, wówczas dogodniej jest posługiwać się innym wzorem.

---

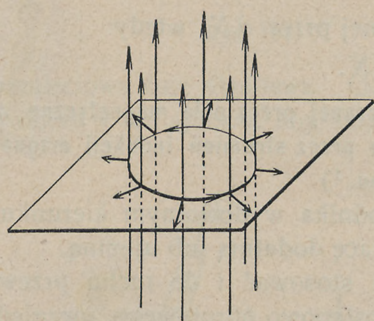
[1]) Taki sposób obliczenia pracy wskazany był po raz pierwszy przez Faraday'a.

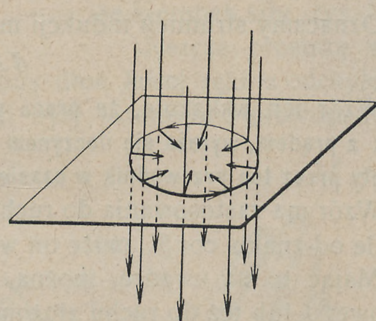
Każdy obwód elektryczny zamknięty ma dwie strony; gdy zwrócimy go do widza jedną stroną, prąd płynie zgodnie z ruchem wskazówki zegarowej, gdy zaś zwrócimy go drugą stroną, prąd płynie odwrotnie względem kierunku ruchu tejże wskazówki (rys. 198). Pierwszą stronę nazywać będziemy ujemną, a drugą dodatnią. Linje sił magnetycznych, wywołane przez prąd, płynący w tym obwodzie, przechodzą zawsze ze strony ujemnej na dodatnią. W dalszym ciągu linje magnetyczne, przechodzące ze strony ujemnej obwodu na dodatnią, nazywać będziemy linjami dodatniemi, przechodzące zaś ze strony dodatniej na ujemną — ujemnemi.



Rys. 198.

Jeżeli obwód znajduje się w polu linij magnetycznych dodatnich, to na podstawie reguły, określającej kierunek siły działania pola na prąd, łatwo spostrzedz, że wszystkie siły, działające na poszczególne części obwodu, są skierowane nazewnątrz (rys. 199), i przy ruchu części obwodu w kierunku tych sił, praca **wykonywana jest dodatnia**, przyczem linje sił **wchodzą do wnętrza obwodu**. Gdy zaś linje pola są **ujemne** (rys. 200), siły powyższe są skierowane wewnątrz obwodu i przy ruchu poszczególnych części obwodu w kierunku tych sił linje magnetyczne **wychodzą z obwodu**.


Rys. 199.


Rys. 200.

Wreszcie przy ruchu poszczególnych części tych obwodów w kierunku odwrotnym praca będzie ujemna i linje dodatnie będą wychodziły, a ujemne wchodziły do obwodu.

Chcąc wyznaczyć pracę sił elektromagnetycznych, wywieranych przez pole magnetyczne na obwód zamknięty z prądem, należy obliczyć ją jako sumę algebraiczną prac poszczególnych, wykonanych przez siły cząstkowe, działające na nieskończenie małe odcinki tego obwodu. Jak widać z powyższego rozważania, prace cząstkowe są dodatnie, o ile do obwodu wchodzą linje sił dodatnie, lub też wychodzą linje sił ujemne, w przeciwnym razie prace te będą ujemne. Wielkość tych poszczególnych prac określa się liczbą linij przecinających obwód, a ponieważ każda wchodząca lub wychodząca linja musi przeciąć obwód, możemy powiedzieć, że poszczególne prace cząstkowe określają się

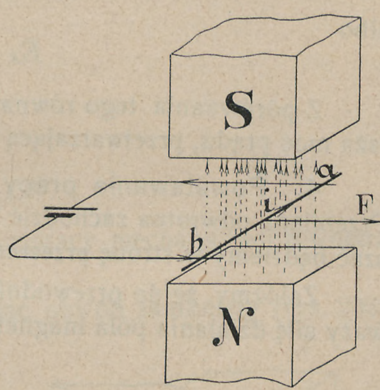
liczbą linij wchodzących lub wychodzących z obwodu przez odpowiednie odcinki obwodu.

Cała zatem praca, wykonana przez siły elektromagnetyczne, przy ruchu obwodu zamkniętego z prądem w polu magnetycznym, może być wyrażona wzorem:

$$dA = i \,.\, dN,$$

gdzie dN oznacza przyrost liczby linij magnetycznych, czy też ściślej przyrost strumienia indukcji magnetycznej, objętego obwodem prądu. Przy obliczeniu tego przyrostu ze znakiem dodatnim bierzemy linje dodatnie, wchodzące w obwód, i ujemne, wychodzące z niego, ze znakiem zaś ujemnym — wychodzące dodatnie i wchodzące ujemne. Słowem dN stanowi zmianę strumienia indukcji magnetycznej, objętego obwodem elektrycznym z uwzględnieniem znaku strumienia, stosownie do założenia, które przyjęliśmy na początku rozważania tej sprawy.

3. **Przetwarzanie się pracy prądu elektrycznego w pracę mechaniczną.** Rozważmy przykład, wskazany na rys. 201. Prąd z ogniwa płynie po obwodzie, którego część stanowi prosty kawałek drutu, ustawiony prostopadle do linij sił magnetycznych pola jednostajnego. Na ten prosty kawałek drutu działa siła F. Siła prądu niech będzie i, opór całkowity obwodu — R, siła elektromotoryczna ogniwa E_B.



Rys. 201.

Jeżeli przewodnik jest nieruchomy, to prąd w obwodzie będzie:

$$i_1 = \frac{E_B}{R}.$$

Wzór zaś energietyczny otrzymamy:

$$E_B \,.\, i_1 = i_1^2 \,.\, R.$$

Wskazuje on, że moc prądu, dostarczona przez ogniwo, wytworzyła w całości ciepło Joule'a.

Jeżeli zaś przewodnik porusza się w kierunku siły F, to prąd będzie inny, dajmy na to i_2. Do równania energietycznego przybędzie wtedy jeszcze praca siły F, wykonana przez obwód elektryczny.

Jeżeli więc założymy, że drut z prądem poruszał się w ciągu czasu dt i przeciął w tym czasie strumień dN, to według wzorów poprzednich wykonana praca mechaniczna będzie:

$$dN \,.\, i_2 \,.$$

W ciągu czasu dt obwód otrzymał z ogniwa energję:

$$E_B \,.\, i_2 \,.\, dt,$$

na ciepło Joule'a zostało zużyte:

$$i_2^2 \,.\, R \,.\, dt.$$

Na zasadzie więc zasady zachowania energji będziemy mieli:

$$E_B \,.\, i_2 \,.\, dt = i_2^2\, R\, dt + dN \,.\, i_2 \quad \text{(a)}$$

Dzieląc przez i_2 i przez dt, otrzymamy:

$$E_B = i_2 \,.\, R + \frac{dN}{dt},$$

a stąd:

$$i_2 = \frac{E_B - \frac{dN}{dt}}{R}.$$

Prąd i_2 jest zatem **mniejszy** od prądu i_1. Wyraz zaś $\frac{dN}{dt}$ oznacza siłę **przeciw**-elektromotoryczną indukcji, która powstała w drucie, poruszającym się w polu magnetycznym; oznaczmy ją przez E, a wtedy:

$$i_2 = \frac{E_B - E}{R}$$

skąd:

$$E_B = i_2 \,.\, R + E$$

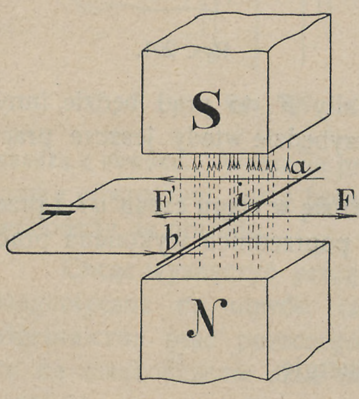
albo

$$E_B \,.\, i_2 = i_2^2 \,.\, R + E \,.\, i_2 \,.$$

Z porównania tego równania z równaniem (a) wynika, że iloczyn $E i_2$ wyraża moc prądu, przetwarzającą się na pracę mechaniczną.

4. Powstawanie pracy prądu elektrycznego z pracy mechanicznej. Przemiana odwrotna zachodzić będzie wtedy, gdy przewodnik ab (rys. 202) poruszać będziemy w stronę **przeciwną** działaniu siły F.

Założmy, że do przewodnika ab przyłożona jest siła $F' = -F$, która równoważy siłę działania pola magnetycznego na prąd, i że przewodnik ten porusza się jednostajnie w kierunku siły F'. Niech będzie: prąd i_3, opór całkowity obwodu — R, siła elektromotoryczna ogniwa E_B.



Rys. 202.

W tym przypadku energja, dostarczona obwodowi, będzie się składała z dwóch części: z pracy prądu powstającej z energii chemicznej w ogniwie i wynoszącej w czasie dt:

$$E_B \,.\, i_3 \,.\, dt,$$

a następnie z pracy mechanicznej zewnętrznej siły F', która co do wielkości swej równa się sile F; przy zastosowaniu przeto oznaczeń poprzednich praca ta będzie:

$$dN \,.\, i_3 \,.$$

Energja, wyłaniająca się z obwodu, ma tu tylko jedną postać, mianowicie ciepło Joule'a:

$$i^2 \,.\, R \,.\, dt.$$

Na zasadzie prawa zachowania energji otrzymujemy wzór:

$$E_B \cdot i_3 \cdot dt + dN \cdot i_3 = i_3^2 \cdot R \cdot dt.$$

Dzieląc obie strony równania przez $i_3 dt$, otrzymamy:

$$E_B + \frac{dN}{dt} = i_3 R,$$

skąd:

$$i_3 = \frac{E_B + \frac{dN}{dt}}{R}.$$

W tym przypadku prąd i_3 jest większy od prądu i_1, który przepływał przez przewodnik nieruchomy. Przyczyną tego jest nowa siła elektromotoryczna indukcji:

$$E' = \frac{dN}{dt},$$

która powstaje przy ruchu przewodnika w polu magnetycznym. Kierunek siły jest zgodny w tym przypadku z kierunkiem prądu.

Z powyższego równania wynika, że:

$$i_3 = \frac{E_B + E'}{R},$$

skąd:

$$E_B \cdot i_3 + E' \cdot i_3 = i_3^2 \cdot R.$$

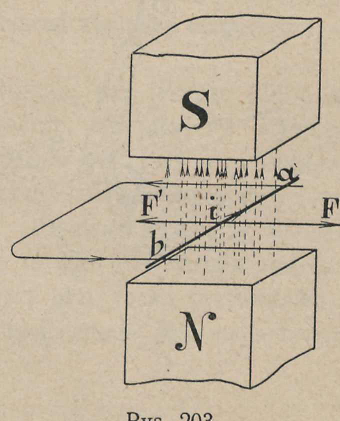
Wyraz $E' i_3$ stanowi moc prądu, otrzymaną z pracy mechanicznej zewnętrznej siły F'.

Jeżeli baterję usuniemy z obwodu, zachowując obwód zamknięty (rys. 203), a przewodnik ab w dalszym ciągu będzie w ruchu, to prąd w obwodzie nie ustanie, lecz będzie inny, np. i; wtedy:

$$i = \frac{E'}{R},$$

skąd

$$E' \cdot i = i^2 \cdot R.$$



Rys. 203.

Całe ciepło Joule'a otrzymuje się tu z pracy mechanicznej siły F'.

5. Uwagi ogólne i prawa Maxwell'a i Lenz'a. Urządzenie, wskazane na rys. 203 stanowi najprostszą postać dynamomaszyny. Rysunek zaś 201 przedstawia w najprostszej postaci silnik elektryczny, zasilany prądem z baterji B. [1])

---

[1]) Należy zaznaczyć, że siła elektromotoryczna indukcji powstaje także w obwodach przerwanych; wywołuje ona wtedy w miejscu przerwy równą sobie różnicę potencjałów.

Wszystkie wyprowadzone powyżej wzory dla prostego przypadku, mogą być zastosowane przy rozważaniu zupełnie ogólnym jakiegokolwiek dowolnego obwodu elektrycznego, poruszającego się w polu magnetycznym; należy tylko wyraz dN uważać jako przyrost strumienia indukcji magnetycznej w obwodzie. Jeżeli przyrost ten jest dodatni, to siła działania pola magnetycznego na prąd wykonywa pracę i kierunek siły elektromotorycznej indukcji jest odwrotny względem prądu, jeżeli zaś przyrost ten jest ujemny, to ruch obwodu wywołany zostaje przez siły zewnętrzne, które wykonywają pracę i wtedy siła elektromotoryczna indukcji jest zgodna z kierunkiem prądu.

Mając to na uwadze i przyjmując kierunek prądu za kierunek dodatni w obwodzie (rys. 202), otrzymamy dla siły elektromotorycznej indukcji w obwodzie zamkniętym wzór:

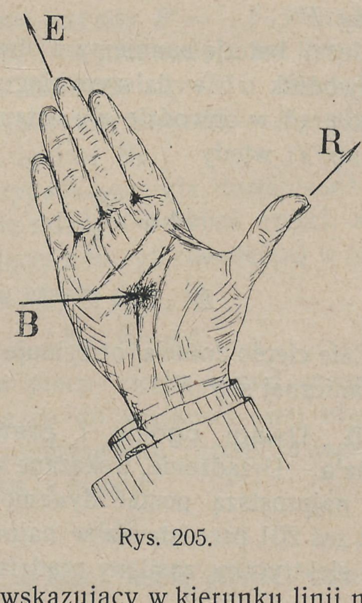
$$E = -\frac{dN}{dt}.$$

Jeżeli mamy do czynienia z obwodem, pozbawionym ogniwa galwanicznego (rys. 203) w danej chwili nieruchomym — i chcemy przewidzieć, w którą stronę będzie skierowana siła elektromotoryczna indukcji, to należy mieć na uwadze, że, stosując wzór powyższy, za dodatni trzeba przyjąć ten kierunek w obwodzie, w którym płynąłby prąd wywołujący linje magnetyczne tego samego kierunku, co linje objęte obwodem, lub też, jeżeli ich niema — co linje magnetyczne, jakie będą wchodziły do obwodu.

Kierunek siły elektromotorycznej w wypadku prostego przewodnika (rys. 203) określa się bardzo łatwo na podstawie układu trzech palców **prawej ręki** (rys. 204). Palce wielki i wskazujący ustawiamy w jednej płaszczyźnie, środkowy zaś prosto-



Rys. 204.



Rys. 205.

padle do poprzednich; wtedy, ustawiając palec wskazujący w kierunku linij magnetycznych, a palec wielki w kierunku ruchu drutu, znajdziemy kierunek siły elektromotorycznej indukcji w kierunku palca środkowego.

Jeszcze prostszą wskazówkę pamięciową daje **prawa dłoń** (rys. 205). Jeżeli ustawimy prawą dłoń z odchylonym w bok wielkim palcem w ten sposób, aby linje magnetyczne były do powierzchni dłoni prostopadłe i przeszywały ją z wewnątrz na zewnątrz, a duży palec wskazywał kierunek ruchu przewodnika, to pozostałe razem złożone palce wskażą kierunek siły elektromotorycznej w drucie.

Rozważanie sił, działających na przewodniki z prądem, znajdujące się w polu magnetycznym i siły elektromotorycznej indukcji doprowadziło do ułożenia trzech praw bardzo prostych i ogólnych. Jedno z nich określa ruch przewodników w polu magnetycznym pod wpływem powyższej siły, a dwa inne — kierunek siły elektromotorycznej indukcji. Prawa te są często bardzo pomocne przy przewidywaniu działań, jakie zachodzą pomiędzy polami magnetycznymi i prądami.

Pierwsze prawo Maxwell'a. Mając na uwadze to, co było poprzednio powiedziane o linjach magnetycznych dodatnich i ujemnych (rys. 198), łatwo dostrzedz, że siły działania pola magnetycznego na przewodnik z prądem mogą wywołać tylko takie przesunięcia obwodu, przy których praca tych sił będzie dodatnia, przy których zatem liczba linji dodatnich, objętych obwodem, zwiększy się. Zmniejszenie się liczby linij ujemnych jest równoznaczne ze zwiększeniem się liczby linji dodatnich.

Na podstawie tej własności prądów Maxwell ułożył prawo następujące: **pole magnetyczne usiłuje zawsze przesunąć obwód prądu w taki sposób, ażeby liczba objętych nim linji magnetycznych stała się możliwie wielką w znaczeniu algebraicznym, t. j. z uwzględnieniem znaków linji.**

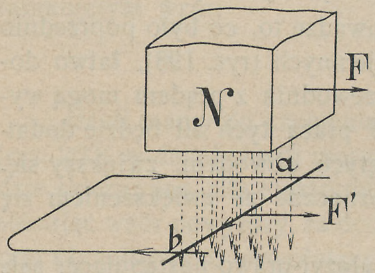
Drugie prawo Maxwell'a. Uwzględniając związek pomiędzy kierunkiem linji magnetycznych, wchodzących do obwodu, a kierunkiem siły elektromotorycznej indukcji, łatwo zauważyć, że prąd, wytworzony przez siłę elektromotoryczną indukcji (a więc zgodny z nią co do kierunku), wywołuje linje magnetyczne przeciwne tym, które wchodzą do obwodu i zgodne z temi, które wychodzą z obwodu, czyli krócej: **prąd indukcyjny usiłuje zawsze zachować strumień magnetyczny, objęty obwodem.**

Prawo Lenz'a. Prąd, wytworzony przez indukcję, ma jeszcze jednę własność charakterystyczną. Rys. 203 wskazuje wyraźnie, że siła F, wywołana przez wpływ pola magnetycznego na prąd, przeciwdziała ruchowi wywołującemu ten prąd indukcyjny. Tego rodzaju działanie powyższej siły spostrzegamy zawsze w zjawisku indukcji; jest to nastepstwo naturalne stosowania zasady zachowania energji do tych zjawisk. W krótkości wyraża się ta własność prądu indukcyjnego w sposób następujący: **prąd indukcyjny, powstający przy ruchu przewodnika, ma zawsze względem linij sił magnetycznych taki kierunek, że działanie pola magnetycznego na prąd hamuje ten ruch.**

Wszystkie wyłuszczone wyżej rozumowania można zastosować z tym samym wynikiem do tego przypadku, gdy zamiast obwodu elektrycznego poruszają się w polu magnetycznym linje magnetyczne, a obwód jest nieruchomy. Różnica zachodzi tu tylko taka, że siły, pod których wpływem powstaje praca mecha-

niczna lub też jest pochłaniana, przyczepione są teraz do poruszającej się materji, która wywołuje ruch linij magnetycznych, a więc do żelaza namagnesowanego, np. na rys. 203 do magnesów N, S, lub też do drutów z prądem, wywołujących pole. Praca takich sił przetwarza się na zasadzie tych samych praw w pracę prądu elektrycznego i odwrotnie. Należy tylko mieć zawsze na względzie, że kierunki ruchu, omawiane w poprzednich rozważaniach, stosują się do kierunku ruchu przewodników względem linji pola magnetycznego, kierunek zaś ruchu linji pola względem przewodników jest oczywiście zawsze odwrotny.

6. Przenoszenie pracy mechanicznej za pomocą prądu indukcyjnego. Biegun północny magnesu N (rys. 206) przesuwa się w kierunku F nad obwodem zamkniętym, którego część stanowi drut ab. Narazie obwód jest nieruchomy. Linje magnetyczne przecinają drut ab, który względem tych linij pozornie porusza się w lewo, więc powstaje w nim siła elektromotoryczna indukcji i prąd o takim kierunku, jak wskazuje rysunek. Pole magnetyczne działa na ten prąd w ten sposób, że stara się go przesunąć w kierunku siły F' (zgodnie ze wskazówkami przytoczonemi wyżej według lewej ręki).



Rys. 206.

Załóżmy, że obwód ten nie jest zamocowany, więc będzie się on poruszał w kierunku siły F', t. j. magnes pociągnie za sobą w swoim ruchu obwód elektryczny. Wynika to wprost z prawa Lenza.

Siłę elektromotoryczną, powstającą w drucie ab, możemy wyrazić w sposób następujący: Wiemy, że nie zwracając uwagi na znak:

$$E = \frac{dN}{dt},$$

gdzie dN stanowi liczbę linij przeciętych przez drut w czasie dt. Załóżmy, że pole jest jednostajne, że indukcja magnetyczna równa się B, drut zaś jest skierowany prostopadle do linij pola i porusza się w kierunku prostopadłym do drutu i do pola z szybkością v względem linji magnetycznych. Długość drutu w polu niech będzie l. Wtedy strumień indukcji, przecięty w jednostce czasu, a więc i siła elektromotoryczna wyrazi się wzorem:

$$E = B \, . \, l \, . \, v \, .$$

Jeżeli opór obwodu jest R, to siła prądu w obwodzie będzie:

$$J = \frac{E}{R} \, .$$

albo:

$$E = J \, . \, R \, ,$$

lub mnożąc przez J, otrzymamy:

$$E \, . \, J = J^2 \, . \, R \, ,$$

albo:

$$Blv \, . \, J = J^2 \, . \, R \, . \qquad \text{(a)}$$

Oznaczmy szybkość ruchu magnesu, a z nim i linij sił pola przez v_1, a szybkość ruchu obwodu przez v_2. Gdy w obwodzie powstaje prąd rozważanego kierunku, to $v_2 < v_1$ i $v = v_1 - v_2$.

Wprowadzając te nowe szybkości we wzór (a), otrzymamy:

$$Blv_1J - Blv_2J = J^2R.$$

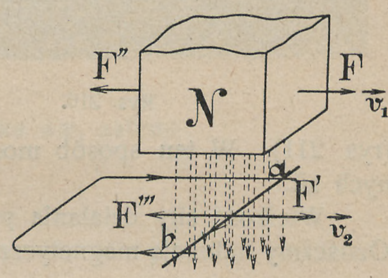
Iloczyn BlJ wyraża siłę działania pola magnetycznego na prąd, z taką samą lecz odwrotną siłą działa prąd na magnes. Oznaczmy BlJ przez F, wtedy:

$$Fv_1 - Fv_2 = J^2R,$$

albo:

$$Fv_1 = Fv_2 + J^2R.$$

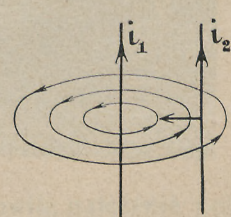
Wzór ten wyraża zjawisko następujące (rys. 207). Jeżeli poruszać będziemy magnes ruchem jednostajnym za pomocą siły F równej i odwrotnej do siły działania prądu na ten magnes — F'', to obwód z prądem poruszać się będzie również jednostajnie pod wpływem siły działania magnesu na prąd; siła ta $F' = F$; ruch będzie tu jednostajny, bo siła F' pokonywa inną siłę $F''' = F'$, pochodzącą np. od oporu tarcia drutu o podstawę, po której przesuwa się ten drut.



Rys. 207.

Ruch magnesu odbywa się z prędkością v_1, a drutu z prędkością v_2, zatem Fv_1 stanowi moc mechaniczną pracy, dostarczonej poruszającemu się magnesowi, a Fv_2—moc pracy mechanicznej, otrzymanej podczas ruchu drutu. Z powyższego równania widzimy, że moc mechaniczna dostarczona będzie większą od mocy mechanicznej, otrzymanej na drucie, o moc zużytą na ogrzewanie drutu (ciepło Joule'a).

7. Działanie mechaniczne prądów na prądy. Jako wypadek szczególny rozważanych tu zjawisk zasługuje jeszcze na uwagę działanie mechaniczne prądów na prądy. Rozważmy dwa prądy i_1 i i_2 (rys. 208), płynące w jednę stronę. Prąd i_1 wywołuje pole magnetyczne, które działa na prąd i_2 w ten sposób, że stara się zbliżyć prąd i_2 do prądu i_1, tak samo pole wywoływane przez prąd i_2 działa na prąd i_1 w ten sposób, że stara się przysunąć prąd i_1 do prądu i_2. Na rys. 208 wskazane jest działanie prądu i_1 na prąd i_2. Kierunek sił łatwo sprawdzić, stosując prawidło pamięciowe trzech palców.



Rys. 208.

Krótko mówiąc, z powyższego rozważania wynika, że prądy, płynące w jedną stronę, wzajemnie się przyciągają. W podobny sposób (rys. 209) łatwo stwierdzić, że prądy, płynące w różne strony, odpychają się.

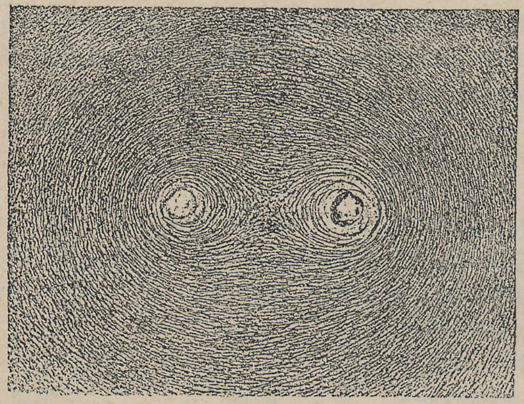


Rys. 209.

W rozważaniach powyższych uwzględnialiśmy

zawsze tylko jedno pole magnetyczne, gdyż pole prądu nie wywiera żadnego działania na prąd, który je wytwarza.

Zresztą do tych samych wyników dojść można inną drogą. Przez dodawanie natężeń pól składowych, lub też wprost doświadczalnie za pomocą opiłek żelaznych, łatwo się przekonać, że w przypadku prądów, płynących w jedną stronę, linje sił magnetycznych wokoło prądów mają postać wskazaną na rys. 210, a przy prądach, płynących w różne strony, na rys. 211. [1]) Siły, powstające w polu magnetycznym, dadzą się przewidzieć, jeżeli założymy, że wzdłuż linji działają siły, dążące do ich skrócenia, a wpoprzek linji—ciśnienia, rozsuwające linje magnetyczne. Mając te uwagi na względzie i porównawszy rys. 210 z 211, widzimy, że dążenie linji magnetycznych do skrócenia się zbliża prądy (rys. 210), a ciśnienia boczne między linjami rozsuwają prądy (rys. 211). W ten sposób możemy nieco dokładniej poznać siedlisko rozważanych sił.



Rys. 210.

Wielkość siły działania prądu i_1 na i_2 można wyrazić za pomocą wzoru. Oznaczmy indukcją magnetyczną, wywołaną przez prąd i_1 w tym miejscu, gdzie znajduje się prąd i_2 przez B, a długość drutu z prądem i_1 przez l ($l \perp B$), siła niech będzie F, wówczas

$$F = Bl \,.\, i_2 .$$

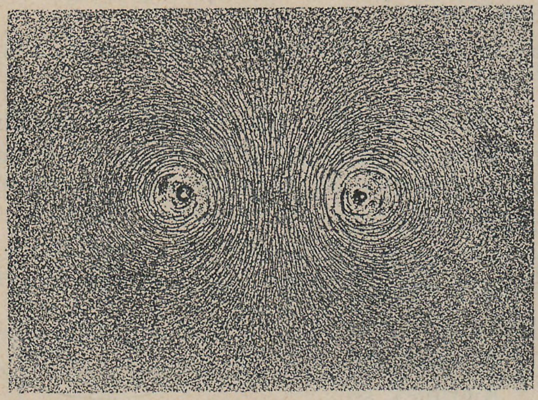
Jeżeli pewien stały spółczynnik oznaczymy przez k, to

$$B = k \,.\, i_1$$

i $$F = kl \,.\, i_1 \,.\, i_2 ,$$

albo, zakładając $kl = K$,

$$F = K \,.\, i_1 \,.\, i_2 .$$



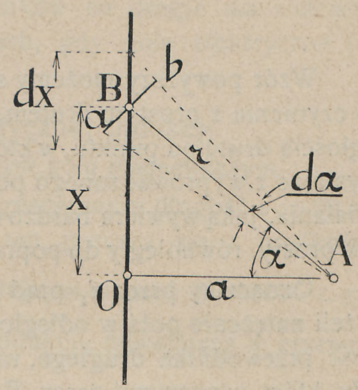
Rys 211.

Spółczynnik K zależy oczywiście od odległości, kształtu i położenia obwodów elektrycznych współdziałających, a także od własności magnetycznych ośrodka, w którym znajdują się prądy.

Na podstawie tych wiadomości zasadniczych możemy przewidzieć kierunek i wielkość siły współdziałania prądów w najrozmaitszych przypadkach.

[1]) Są to odbitki z fotografji.

Jako przykład rozważymy działanie prądu, płynącego po bardzo długim przewodniku prostym, na inny prąd, płynący również wzdłuż prostego przewodnika. Przedewszystkim wyznaczymy natężenie pola magnetycznego (rys. 212) na odległości a od bardzo długiego przewodnika, po którym płynie prąd i. Na przewodniku w punkcie B obierzmy nieskończenie mały odcinek prądu, długość którego niechaj będzie dx, odległość BA oznaczmy przez r, a kąt pomiędzy r i dx przez $(90^0—\alpha)$, wtedy, według prawa Laplace'a, Biot'a i Savart'a [1]) natężenie pola magnetycznego w punkcie A, pochodzące od cząstki prądu dx będzie:



Rys. 212.

$$dH = \frac{idx}{r^2}\sin(90^0 - \alpha) = \frac{idx}{r^2}.\cos\alpha. \quad . \quad . \quad (a)$$

dx łatwo zastąpić łukiem zakreślonym z punktu A promieniem r. Łuk ten ab wyraża się za pomocą kąta $d\alpha$ wzorem:

$$ab = r \,.\, d\alpha.$$

Z rysunku widzimy, że ab jest rzutem odcinka dx, zatem:

$$ab = dx \,.\, \cos\alpha,$$

albo:

$$r d\alpha = dx \,.\, \cos\alpha,$$

skąd:

$$dx = \frac{r d\alpha}{\cos\alpha}.$$

Podstawiając otrzymaną wartość dx we wzór (a), otrzymamy:

$$dH = \frac{i \,.\, d\alpha}{r}.$$

Lecz w trójkącie ABO:

$$r = \frac{a}{\cos\alpha},$$

więc:

$$dH = \frac{i \,.\, d\alpha}{a} \,.\, \cos\alpha.$$

Załóżmy, że drut jest nieskończenie długi, wtedy całkowite natężenie pola w punkcie A będzie:

$$H = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \frac{i \,.\, \cos\alpha}{a} \,.\, d\alpha,$$

[1]) Patrz rozdział I.

skąd:

$$H = \frac{i}{a}\left[\sin\alpha\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = \frac{2i}{a}.$$

Wzór powyższy możemy stosować do przewodników skończonych, o ile mamy do czynienia z prostym drutem, o długości znacznie większej w porównaniu z odległością drutu od punktu, w którym obliczamy natężenie pola magnetycznego. Korzystając z wyprowadzonego powyżej wzoru, łatwo znajdziemy wyrażenie dla siły działania, jaką wywiera bardzo długi prosty przewodnik z prądem na inny przewodnik prosty, równoległy do poprzedniego i znajdujący się w pobliżu na odległości a.

Oznaczmy przez i_1 prąd w pierwszym przewodniku, a przez i_2 w drugim. Jeżeli natężenie pola w odległości a od pierwszego przewodnika będzie H, a długość przewodnika drugiego, na którą działa rozważana siła, będzie l, to wielkość siły, którą oznaczymy przez F, według poprzednich wzorów będzie:

$$F = \mu \,.\, H \,.\, l \,.\, i_2.$$

Wiemy również, że:

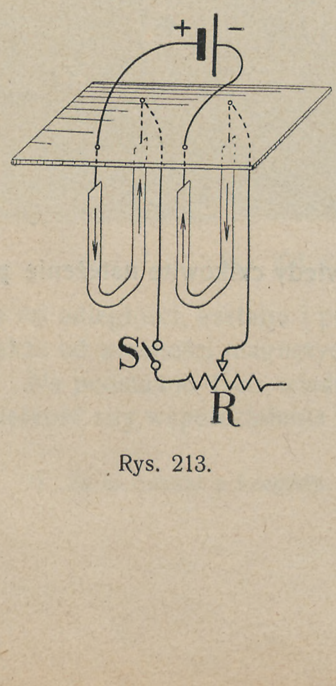
$$H = \frac{2i_1}{a},$$

więc:

$$F = \mu \frac{2i_1 \,.\, i_2}{a} \,.\, l.$$

Wzór ten wskazuje, że siła wzajemnego działania prądów zależy od przenikliwości magnetycznej ośrodka. W powietrzu siła ta jest znacznie mniejsza, niż w żelazie.

Dla utworzenia sobie całokształtu pojęć o siłach, działających pomiędzy przewodnikami z prądem, należy wspomnieć jeszcze o siłach elektrycznych, wynikających wskutek działania pola elektrycznego pomiędzy przewodnikami. W celu wyjaśnienia tej sprawy zwróćmy się do doświadczenia, przeprowadzonego przez p. Nikołajewa (rys. 213). Przez dwa paski cynfolji wygięte w kształcie U i wiszące swobodnie płynie prąd do opornika R. Za pomocą wyłącznika S możemy prąd przerywać. Gdy obwód jest przerwany, działają tylko siły elektrostatyczne, paski są połączone z różnemi biegunami źródła prądu, przeto linje sił pola elektrostatycznego idą od jednego paska do drugiego i paski przyciągają się. Jeżeli prąd zamkniemy, to oprócz pola elektrostatycznego, powstaje jeszcze pole magnetyczne, i prądy idące, jak widać na rysunku, w różne strony, odepchną się;



Rys. 213.

oczywiście łatwo jest uregulować siłę prądu w ten sposób, aby obie siły równoważyły się. [1])

Działanie elektrostatyczne jednych przewodników na drugie ma znaczenie praktyczne tylko przy bardzo wysokich napięciach, gdy pole elektryczne jest dość silne.

8. Przykłady obliczenia siły elektromotorycznej indukcji.

1. Ruch przewodnika prostego w jednostajnym polu magnetycznym.

Załóżmy, że drut ab (rys. 203) ma w polu magnetycznym długość $l = 20$ *cm.* i skierowany jest prostopadle do linji sił. Drut ten porusza się z prędkością $v = 20\frac{m.}{s.}$; indukcja magnetyczna w polu jednostajnym wynosi $B = 5000$ c. g. s. Należy obliczyć w woltach siłę elektromotoryczną indukcji, powstającą w przewodniku. Mamy wzór następujący:

$$E = \frac{dN}{dt}.$$

dN stanowi strumień indukcji magnetycznej przecięty przez przewodnik w czasie dt.

Z warunków zadania widzimy odrazu, że strumień magnetyczny, przecinany przez przewodnik w jednostkę czasu, jest wielkością stałą w czasie; wobec tego wzór powyższy może być napisany dla wielkości skończonych w postaci:

$$E = \frac{N}{t}.$$

Oznaczmy przez s drogę, którą przebył w czasie t każdy punkt przewodnika; w takim razie liczba linji przeciętych w czasie t będzie:

$$N = B \,.\, l \,.\, s,$$

lecz:

$$s = v \,.\, t,$$

zatem:

$$N = B \,.\, l \,.\, v \,.\, t$$

i

$$E = \frac{N}{t} = B l v.$$

Podstawiając wartości liczbowe, wszystkie w jednostkach bezwzględnych, otrzymamy:

$$E = 5000 \,.\, 20 \,.\, 2000 = 200000000 = 2 \,.\, 10^8;$$

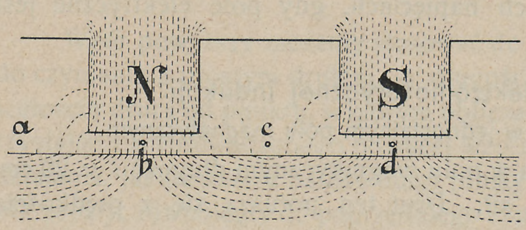
a ponieważ jeden wolt $= 10^8$ jednostek bezwzględnych elektromagnetycznych, przeto:

$$E = 2 \text{ wolty}.$$

---

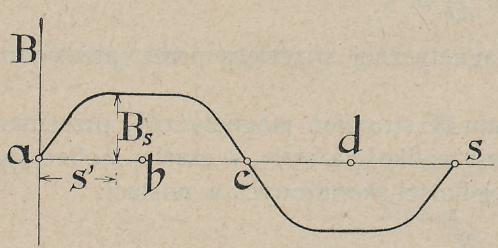
[1]) Pierwszy pomysł takiego doświadczenia powziął Maxwell, który na tej drodze określał stosunek jednostek elektrycznych.

2. Ruch przewodnika w polu magnetycznym niejednostajnym. Pod biegunami elektromagnesów (rys. 214) porusza się drut prosty, skierowany prostopadle do płaszczyzny rysunku; prędkość ruchu jest stała i wynosi v, długość drutu znajdująca się w polu magnetycznym — l. Indukcja magnetyczna w kierunku prostopadłym do rysunku jest stała, natomiast przy posuwaniu się wzdłuż linji $abcd$ zmienia swą wielkość i kierunek.



Rys. 214.

Oznaczmy przez B rzut indukcji magnetycznej na kierunek prostopadły do drogi ruchu drutu. Załóżmy, że zależność B od odległości względem punktu a wyraża się pewną linją krzywą, wskazaną na rys. 215; tutaj punkty wzdłuż drogi drutu oznaczone są temi samemi literami, jak na rys. 214. Mając na względzie, że w rozważanym przykładzie linje indukcji magnetycznej są zawsze prostopadłe do drutu i oznaczając przez B_s rzut indukcji magnetycznej na kierunek prostopadły do drogi ruchu drutu, wielkość siły elektromotorycznej otrzymamy ze wzoru:



Rys. 215.

$$E_t = B_s \cdot l \cdot v.$$

B_s oznacza indukcję magnetyczną w punkcie, znajdującym się w odległości s od punktu a, a E_t — siłę elektromotoryczną w chwili, gdy drut przechodzi przez ten punkt. B_s jest zmienne, więc i E_t jest również zmienne. Ponieważ jednak lv jest stałe, możemy powiedzieć, że krzywa na rys. 215 w pewnej skali wyraża zmienność siły elektromotorycznej w zależności od drogi s. W ruchu jednostajnym droga s jest proporcjonalna do czasu, w pewnej więc skali ta sama krzywa wyraża też zależność siły elektromotorycznej od czasu.

W praktyce zazwyczaj ma ważne znaczenie średnia siła elektromotoryczna za pół okresu. Oznaczmy przez T okres zmienności siły elektromotorycznej. Czas, w ciągu którego drut przejdzie od a do c, wynosi połowę okresu, t. j. $\frac{T}{2}$, średnią więc siłę elektromotoryczną za ten czas znajdziemy według wzoru:

$$E_s = \frac{2}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} E_t \cdot dt,$$

$$E_t = B_s \cdot l \cdot v,$$

albo:

$$E_t = B_s \cdot l \cdot \frac{ds}{dt}.$$

Wprowadzając wartość dla E_t pod całkę i zmieniając odpowiednio granice całki, otrzymamy:

$$E_s = \frac{2}{T} \int_0^{\overline{ac}} B_s \,.\, l \,.\, ds.$$

$B_s \,.\, l \,.\, ds$ stanowi strumień dN, przecięty przez przewodnik na drodze ds więc:

$$E_s = \frac{2}{T} \int_0^N dN = \frac{N}{\frac{T}{2}},$$

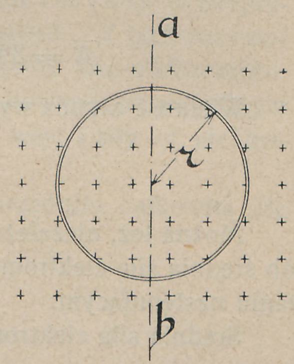
gdzie N wyraża strumień magnetyczny, przecięty przez drut na drodze ac, zarazem jest to strumień magnetyczny, wychodzący z jednego bieguna magnesu.

Załóżmy, że z jednego bieguna wychodzi strumień magnetyczny $1{,}5 \,.\, 10^6$ c. g. s. czyli, jak zwykle przyjęto mówić, półtora miljona linji magnetycznych; czas, w ciągu którego przewodnik przechodzi od a do c, niechaj wynosi 0,01 sekundy. Wtedy

$$E_s = \frac{1{,}5 \,.\, 10^6}{0{,}01} = 1{,}5 \,.\, 10^8 \text{ c. g. s.} = 1{,}5 \text{ wolta}.$$

3. **Ruch obrotowy obwodu kołowego w polu magnetycznym.** Obliczyć siłę elektromotoryczną indukcji, powstającą w przewodniku kołowym (rys. 216), obracającym się z prędkością stałą kątową $n = 3000$ obrotów na minutę około osi ab, prostopadłej do linji sił magnetycznych. Indukcja magnetyczna $B = 5000$ c. g. s., a promień koła $r = 50$ *cm*.

Rys. 216.

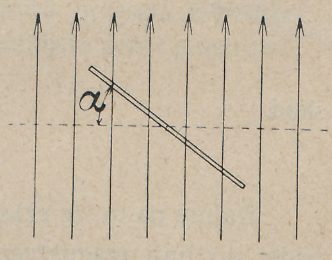


Stosując ogólny wyraz elektromotorycznej siły indukcji w danej chwili t,

$$E_t = -\frac{dN}{dt}$$

do tego wypadku, łatwo zauważymy, że E będzie wielkością zmienną okresowo; łatwo nawet znaleźć zależność jej od czasu. Załóżmy, że koło odchyliło się od swego położenia o kąt α (rys. 217, widok z góry); jeżeli oznaczymy pole koła przez S, to oczywiście liczba linji magnetycznych, objętych w tym położeniu przez koło, będzie:

Rys. 217.



$$N = B \,.\, S \,.\, \cos\alpha.$$

Jeżeli zaś koło wykonywa jeden pełny obrót w czasie T, a w położeniu takim, jak wskazano na rysunku, t. j. pod kątem α do swego położenia początkowego, znajduje się w chwili t, to:

$$\alpha = \frac{2\pi}{T} \,.\, t,$$

$$N = B \,.\, S \,.\, \cos \frac{2\pi t}{T},$$

$$E = BS \,.\, \frac{2\pi}{T} \,.\, \sin \frac{2\pi t}{T}.$$

Oznaczmy BS przez $\overline{N}$, t. j. wielkość wyrażającą maksymalną liczbę linji, objętych przez obwód; oznaczmy nadto $\frac{2}{T}$ przez z. Wtedy:

$$E = \overline{N} z \pi \,.\, \sin \frac{2\pi t}{T}.$$

W tych więc warunkach powstaje w przewodniku kołowym siła elektromotoryczna, sinusoidalnie zmienna, której maximum będzie:

$$\overline{E} = \overline{N} z \pi.$$

Wprowadzając w te wzory wartości liczbowe, otrzymamy:

$$\overline{N} = B \,.\, S = 5000 \,.\, \pi \,.\, 50^2 = 39250000$$

$$z = \frac{2}{T} = \frac{2}{\frac{60}{3000}} = 100.$$

$$\overline{E} = 39250000 \,.\, 100 \,.\, 3{,}14 \,.\, 10^{-8} = 123{,}245\ V.$$

Wielkość czynna wypadnie:

$$\frac{\overline{E}}{\sqrt{2}} = 87{,}4\ V.$$

Można też, niezależnie od powyższych wzorów, obliczyć w bardzo prosty sposób średnią siłę elektromotoryczną, np. za ćwierć obrotu, opierając się na rozumowaniu następującym:

Średnia siła elektromotoryczna za pewien czas t wyraża się wzorem:

$$E_s = \frac{1}{t} \int_0^t E_t \,.\, dt = -\frac{1}{t} \int_0^t \frac{dN}{dt} \,.\, dt,$$

skąd:

$$E_s = -\frac{1}{t} (N_t - N_0).$$

Dajmy na to, że czas zaczynamy liczyć od chwili, gdy pole koła jest prostopadłe do linij magnetycznych; w owej chwili $N_t = \overline{N}$, po upływie zaś ćwierci obrotu pole koła będzie oczywiście równoległe do linij magnetycznych, więc $N_t = 0$, czas zaś, odpowiadający jednej ćwierci obrotu, wynosić będzie:

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{60}{3000} = \frac{1}{200} \text{ sekundy.}$$

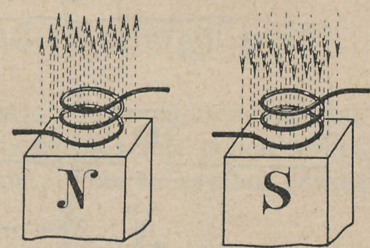
W ten sposób:

$$E_s = -\frac{1}{\frac{1}{200}} . (0 - 39250000),$$

czyli:

$$E_s = 78{,}5\ V.$$

4. Ruch postępowy zwojnicy nad biegunami magnesów. Załóżmy, że nad biegunami magnesu istnieje jednostajne pole magnetyczne, którego linje magnetyczne są skierowane do góry nad biegunem północnym i na dół nad biegunem południowym. W tym polu magnetycznym umieścimy zwojnicę z drutu, o n zwojach (rys. 218). Zwojnicę tę przesuwajmy z położenia I-go w II-gie. W czasie jej ruchu wytworzy się w niej siła elektromotoryczna, której zmienność w czasie moglibyśmy znaleźć, znając prędkość ruchu zwojnicy w każdej chwili, rozkład linij w polu i średnicę zwojów. Znacznie prościej można znaleźć średnią siłę elektromotoryczną np. za czas, w ciągu którego zwojnica przechodzi z położenia I-go do II go. W zwojnicy, utworzonej z kilku zwojów, cała siła elektromotoryczna składa się z szeregu sił elektromotorycznych, powstających w poszczególnych zwojach. Wszystkie siły składowe działają w jedną stronę, ponieważ zwoje te znajdują się jeden obok drugiego, są więc w jednakowych warunkach. Z tych rozumowań wynika, że, gdy zwojnica posiada n zwojów, to całkowita siła elektromotoryczna będzie n razy większa od siły elektromotorycznej powstającej w jednym zwoju, o ile oczywiście wymiary poszczególnych zwojów, a więc i siły ich elektromotoryczne będą jednakowe.



Rys. 218.

Opierając się na wzorze, podanym w przykładzie poprzednim, całkowitą siłę elektromotoryczną średnią otrzymamy ze wzoru:

$$E_s = -\frac{N_t - N_0}{t} . n.$$

Załóżmy, że t oznacza czas, w ciągu którego zwojnica przeszła z położenia I-go w II-gie. B — indukcja magnetyczna, a S — pole objęte przez jeden zwój drutu, wtedy:

$$N_t = B . S,$$

$$N_0 = -B . S$$

$$E_s = -\frac{2\,B . S}{t} . n.$$

Załóżmy, że zwojnica ma 4 zwoje, jeżeli zatem $B = 4000$, $S = 100\ cm^2$, a $t = 0{,}01$ sek., to:

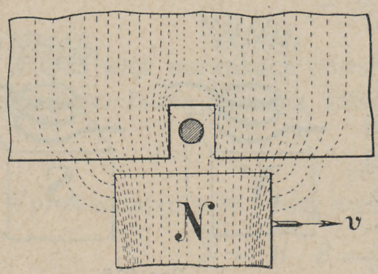
$$E_s = \frac{2 \cdot 4000 \cdot 100}{0,01} \cdot 4 = 32 \cdot 10^7 \text{ c. g. s.}$$

albo:

$$E_s = 3,2\ V.$$

Za pomocą wzoru dla średniej siły elektromotorycznej, możemy w najwięcej złożonych przypadkach powziąć z łatwością pewne wyobrażenie o wielkości sił elektromotorycznych, powstających w zwojach drutu.

5. Siła elektromotoryczna indukcji w drucie, umieszczonym wewnątrz żelaza. Przewodnik znajduje się w rowku, wyciętym w kawałku żelaza (rys. 219), u dołu przesuwamy magnes z prędkością v. Obliczyć siłę elektromotoryczną, powstającą w drucie, jeżeli indukcja magnetyczna w żelazie wynosi B_s, a długość drutu w polu magnetycznym — l.



Rys. 219.

Linje sił magnetycznych obierają zawsze drogę najmniejszego oporu magnetycznego, indukcja więc magnetyczna w rowku wypełnionym powietrzem będzie znacznie mniejsza od indukcji w żelazie. Oznaczmy indukcję magnetyczną w rowku przez B_p.

Gdy biegun magnesu porusza się z prędkością v, to z nim razem poruszają się i linje indukcji. Lecz strumień magnetyczny nie może poruszać się z jednakową prędkością w żelazie, posiadającym indukcję B_s i w powietrzu, gdzie indukcja jest B_p. Należy przypuścić, że prędkość ruchu strumienia v' w powietrzu (w rowku) będzie tyle razy większa od prędkości ruchu strumienia w żelazie, ile razy B_s jest większe od B_p, a więc:

$$v' = v \cdot \frac{B_s}{B_p}.$$

Mając to na uwadze, możemy obliczyć siłę elektromotoryczną w drucie według wzoru:

$$E = B_p \cdot l \cdot v'$$

albo:

$$E = B_p \cdot l \cdot v \frac{B_s}{B_p},$$

a więc:

$$E = B_s \cdot l \cdot v.$$

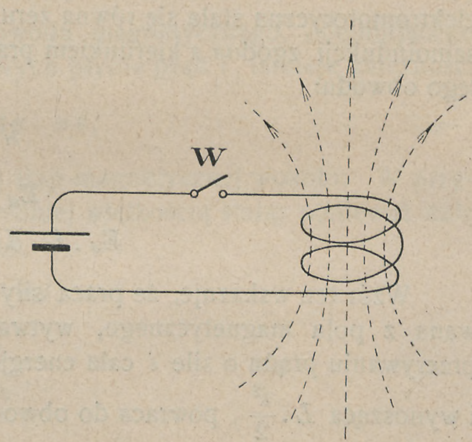
Wzór ten wskazuje, że siłę elektromotoryczną indukcji można obliczać, nie zwracając uwagi na sposób umieszczenia drutu.

Doświadczenia potwierdzają słuszność takiego stosowania wzorów.

ROZDZIAŁ XIX.

Powstawanie energji pola magnetycznego skutkiem pracy prądu i wytwarzanie pracy prądu z energji pola.

1. Powstawanie i znikanie prądu elektrycznego. Gdy prąd powstaje w obwodzie (rys. 220) w chwili zamknięcia wyłącznika w, jednocześnie w przestrzeni, otaczającej przewodnik, wytwarza się pole magnetyczne. Pole to zawiera pewien zasób energji, wytworzonej przez pracę prądu, płynącego przeciwko sile elektromotorycznej samoindukcji, która przy popowstawaniu prądu skierowana jest wbrew prądowi.



Rys. 220.

Oznaczmy siłę elektromotoryczną baterji przez E, siłę elektromotoryczną samoindukcji w chwili t przez E_{st}, siłę prądu przez i_t, spółczynnik samoindukcji obwodu przez L, opór całkowity obwodu wokoło przez r.

Na zasadzie prawa Ohma:

$$i_t = \frac{E - E_{st}}{r},$$

$$E = i_t \cdot r + E_{st}.$$

Mnożąc obie strony równania przez $i_t \,.\, dt$, otrzymamy równanie, wyrażające przetwarzanie się energji w obwodzie w ciągu czasu dt:

$$E \,.\, i_t \,.\, dt = i_t^2 \,.\, r \,.\, dt + E_{st} \,.\, i \,.\, dt.$$

Znaczenie poszczególnych części tego wzoru jest następujące:

$$E \,.\, i_t \,.\, dt$$

wyraża energję, dostarczoną przez baterję,

$$i_t^2 \,.\, r \,.\, dt$$

ciepło Joule'a,

$$E_{st} \,.\, i_t \,.\, dt$$

oznacza pracę prądu, przetwarzającą się w energję pola magnetycznego.

Z rozdziału VIII wiemy, że:

$$E_{st} = -L \cdot \frac{d i_t}{d t},$$

Odpowiadająca tej sile elektromotorycznej praca prądu w ciągu czasu t będzie:

$$\int_0^t E_{st} \cdot i_t \cdot dt = \int_0^t L \cdot \frac{d i_t}{dt} \cdot i_t \cdot dt = \int_0^i L \cdot i_t \cdot d i_t = \left[L \cdot \frac{i_t^2}{2} \right]_0^i \text{ [1]}.$$

Załóżmy, że w chwili o $i_t = 0$, a w chwili t $i_t = i$; praca omawiana będzie wtedy:

$$L \cdot \frac{i^2}{2}.$$

W ten sposób wyraża się energia pola magnetycznego, wywołanego przez prąd i w obwodzie, mającym spółczynnik samoindukcji L.

Rozważmy jeszcze przypadek znikania prądu; załóżmy mianowicie, że obwód (rys. 220) pozostaje zamknięty, lecz źródło prądu przestało działać, czyli jego siła elektromotoryczna stała się równa zeru. Wtedy powstanie siła elektromotoryczna samoindukcji zgodna z kierunkiem prądu i, według prawa Ohma, otrzymamy dla tego obwodu:

$$i_t = \frac{E_{st}}{r},$$

$$E_{st} = i_t \cdot r,$$

$$E_{st} \cdot i_t \cdot dt = i_t^2 \cdot r \cdot dt.$$

Wzór ten wskazuje, że praca siły elektromotorycznej samoindukcji otrzymywana z pola magnetycznego, wytwarza ciepło Joule'a. Tym sposobem przy przerywaniu prądu o sile i cała energja pola magnetycznego, wywołana przez prąd i wynosząca $L \cdot \frac{i^2}{2}$, powraca do obwodu elektrycznego.

W innych przypadkach, gdy siła prądu tylko się zmienia, część całej energji pola przechodzi do obwodu przy zmniejszaniu się prądu i wraca z powrotem do pola, gdy prąd wzrasta.

2. Wyraz energji, zawartej w polu magnetycznym przez natężenie pola, lub indukcję magnetyczną. Jest jednak inny jeszcze sposób wyrażenia energji pola magnetycznego, mający w elektrotechnice duże znaczenie. Rozważmy pierścień, wykonany z materjału o przenikliwości magnetycznej μ, na którym nawinięto n zwojów drutu izolowanego (rys. 32). Po drucie przebiega prąd siły i_t w chwili t. Długość linji średniej w pierścieniu niech będzie l, a przekrój poprzeczny s. Dla otrzymania wzorów możliwie najogólniejszych załóżmy, że μ jest wielkością zmienną i że pierścień jest żelazny. Obwód nie ma wtedy stałego określonego spółczynnika samoindukcji i wyznaczenie wzoru pracy, niezbędnej na

[1] Na znak uwagi nie zwracamy, ponieważ uwzględniliśmy go już poprzednio.

wytworzenie pola magnetycznego, rozpoczniemy od początku, wychodząc z założenia, że praca ta, bądź co bądź, musi równać się pracy prądu elektrycznego, płynącego przeciw sile elektromotorycznej samoindukcji. Oznaczmy tę pracę przez A. Wtedy:

$$A = \int_0^t E_{st} \cdot i_t \cdot dt.$$

Jeżeli zaś liczbę linji, objętych przez cały obwód w chwili t oznaczymy przez $N_t \cdot n$, gdzie N_t jest to strumień linji w jednym zwoju, to:

$$E_{st} = n \cdot \frac{dN_t}{dt},$$

$$A = \int_0^t i_t \cdot n \cdot dN_t.$$

Jeżeli żelazo posiadać będzie indukcję B_t, a natężenie pola zwojnicy równa się H, to:

$$N_t = B_t \cdot s \quad \text{i} \quad dN_t = s \cdot dB_t,$$

a z rozdziału VII § 4 wiemy, że dla obwodu magnetycznego, obejmującego zwojnicę, składającą się z n zwojów, po których płynie prąd i, istnieje zależność:

$$\int H \cdot dl = 4\pi \cdot ni,$$

o ile całka jest wzięta wzdłuż całej średniej linji magnetycznej wokoło. W przypadku rozważanym H jest na całej linji średniej wielkością stałą; ponieważ całą długość tej linji oznaczyliśmy przez l, przeto:

$$H \cdot l = 4\pi \cdot ni,$$

stąd:

$$i = \frac{Hl}{4\pi n},$$

zatym:

$$A = \int_0^t \frac{H_t \cdot l}{4\pi n} \cdot n \cdot s \cdot dB_t$$

albo:

$$A = \frac{l \cdot s}{4\pi} \int_0^B H_t \cdot dB_t,$$

gdzie $l \cdot s = v$ oznacza objętość żelaza. Mamy więc:

$$A = v \cdot \frac{1}{4\pi} \int_0^B H_t \cdot dB_t,$$

praca zaś, potrzebna do namagnesowania jednostki objętości będzie:

$$A_1 = \frac{1}{4\pi} \int_0^B H_t \cdot dB_t.$$

W tym przypadku, gdy μ jest wielkością stałą, otrzymamy:

$$H_t = \frac{B_t}{\mu}$$

i

$$A_1 = \frac{1}{4\pi} \int_0^B \frac{B_t}{\mu} \, . \, d B_t = \frac{1}{8 \pi \mu} \, . \, \Big[B^2 \Big]_0^B$$

czyli:

$$A_1 = \frac{B^2}{8 \pi \, . \, \mu} \, .$$

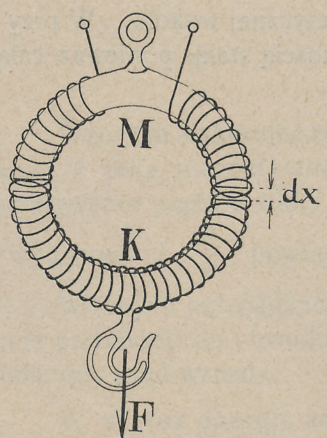
Jest to wyraz energji, zawartej w jednostce objętości pola, które posiada indukcję magnetyczną B, a przenikliwość magnetyczna ośrodka $= \mu$.

Wprowadzając, zamiast indukcji magnetycznej B, natężenie pola $H = \frac{B}{\mu}$, otrzymamy:

$$A_1 = \frac{H^2 \, . \, \mu}{8 \pi} \, .$$

Z tego wzoru wynika, że przy tym samym natężeniu pola magnesującego energja pola w żelazie jest znacznie większa, niż w powietrzu.

3. Siła przyciągania elektromagnesów. Na podstawie wzorów powyższych można z łatwością określić siłę przyciągającą magnesów lub elektromagnesów. Przedstawmy sobie, że pierścień żelazny (rys. 221) owinięty wokoło drutem, magnesuje się za pomocą prądu elektrycznego. W płaszczyźnie poziomej pierścień jest rozcięty na dwie połowy. Górna połowa M stanowi część nieruchomą elektromagnesu, dolną zaś K podtrzymują siły przyciągania magnetycznego. Załóżmy, że za pomocą siły zewnętrznej odciągnęliśmy dolną część o tyle, iż utworzyły się z dwóch stron pierścienia szczeliny o nieskończenie małej grubości dx, a jednocześnie, przez odpowiednie powiększenie siły prądu, indukcja magnetyczna w całym obwodzie pozostała niezmienna. Skutkiem takiego odciągnięcia kotwicy, siła F wykonała pracę:



Rys. 221.

$$F \, . \, dx,$$

a w polu magnetycznym przybyła energja, zawarta w dwóch szczelinach pomiędzy żelaznymi półpierścieniami. Na podstawie wzorów poprzednich wiemy, że energja, zawarta w 1 cm^3 wynosi w jednostkach bezwzględnych elektromagnetycznych:

$$\frac{B^2}{8 \pi} \, . \, ^{1)}$$

[1]) $\mu = 1$, gdyż wzór dotyczy energji istniejącej w szczelinie, wypełnionej powietrzem.

Jeśli przekrój poprzeczny pierścienia oznaczymy przez s, to objętość obu szczelin będzie:

$$2s \,.\, dx,$$

lub oznaczając $2s$ przez S:

$$S \,.\, dx.$$

Jeśli indukcja magnetyczna w powietrzu jest wszędzie jednakowa, to energja, zawarta w obu szczelinach będzie:

$$\frac{B^2}{8\pi} \,.\, S \,.\, dx.$$

Na zasadzie prawa zachowania energji, praca mechaniczna siły F równa się przyrostowi energji w polu magnetycznym, a więc:

$$F\,dx = \frac{B^2}{8\pi} \,.\, S \,.\, dx,$$

skąd:

$$F = \frac{B^2}{8\pi} \,.\, S.$$

Jest to wzór Maxwella, wyrażający naprężenie wzdłuż strumienia magnetycznego o indukcji (gęstości linji) B i przekroju poprzecznym S.

B i S wyrażamy zazwyczaj w jednostkach bezwzględnych, wówczas F otrzymujemy w dynach.

Doświadczenie wskazuje, że dla obliczeń praktycznych możemy stosować ten wzór z dokładnością dostateczną do najrozmaitszych rodzajów elektromagnesów i magnesów stałych, z zastrzeżeniem jednak, by szczelina powietrzna była dość wązka w porównaniu z wymiarami szczeliny, prostopadłemi do kierunku linji sił. W przeciwnym razie, zdanie sobie dokładne sprawy z układu linji magnetycznych, a więc i wielkości indukcji B nastręcza znaczne trudności i wartość praktyczna powyższego wzoru jest niewielka, a nieoględne stosowanie doprowadza do wyników niezgodnych z doświadczeniem. W wyjątkowych tylko przypadkach przy szerokiej szczelinie powietrznej między kotwicą a rdzeniem elektromagnesu można dość dokładnie zdać sobie sprawę z układu linji sił magnetycznych.

P r z y k ł a d. Pomiędzy dwoma biegunami elektromagnesu a kotwicą mamy pole magnetyczne, w którym indukcja wynosi 10000 c. g. s. Wielkość powierzchni każdego bieguna wynosi 10 cm^2. Obliczyć ilość energji, zawartej w centymetrze sześciennym tego pola i siłę przyciągania kotwicy.

Na zasadzie powyższych wzorów energja, zawarta w jednostce objętości pola, będzie:

$$\frac{B^2}{8\pi} = \frac{10000^2}{8\pi} = 3980000 \frac{ergów}{cm^3} = 0{,}0406 \frac{kgm}{cm^3},$$

a siła przyciągania wyniesie:

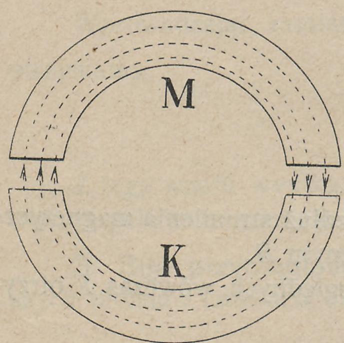
$$\frac{B^2 \,.\, S}{8\pi} = \frac{10000^2 \,.\, 20}{8\pi} = 79600000 \text{ dyn} = 81{,}2\ kg.$$

W praktyce indukcja magnetyczna w wyjątkowych tylko okolicznościach dosięga dwudziestu kilku tysięcy. Załóżmy, że $B = 20000$; wtedy każdy centymetr kwadratowy bieguna przyciągałby z siłą:

$$\frac{20000^2}{8\pi} = 15900000 \text{ dyn} = 16{,}25\ kg.$$

4. Siły działające w strumieniu magnetycznym. W poprzednich rozdziałach wielokrotnie posługiwaliśmy się wyobrażeniem Faraday'a o napięciach i ciśnieniach w strumieniu indukcji magnetycznej. Na podstawie wyników rozumowania otrzymanych w paragrafach poprzedzających, możemy je uzasadnić ściśle.

Siły, utrzymujące kotwicę K (rys. 221) w zetknięciu z podkową M elektromagnesu, można uważać jako skutek dążenia strumienia indukcji magnetycznej do skrócenia się. Widzimy to wyraźnie na rys. 222, gdzie wskazane są linje indukcji, przenikające kotwicę i podkowę poprzedniego elektromagnesu. Stąd wypływa wniosek, że w każdym strumieniu indukcji działają napięcia, dążące do skrócenia linji. Wielkość tych napięć, działających wzdłuż linji, wyrażamy według paragrafu poprzedniego wzorem:



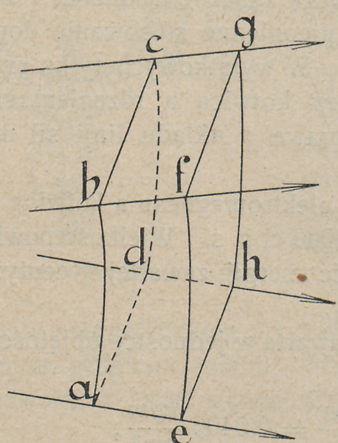
Rys. 222.

$$f = \frac{B^2}{8\pi \cdot \mu}.$$

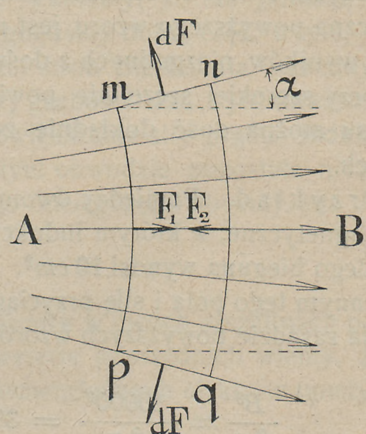
Mając B w jednostkach c. g. s., znajdziemy f w dynach na cm^2.

Oprócz tych napięć, działają jeszcze ciśnienia w poprzek linji. Obecność tych ciśnień możemy udowodnić w sposób następujący.

Wyobraźmy sobie bryłę $abcdefgh$ (rys. 223), wyciętą ze strumienia in-



Rys. 223.



Rys. 224.

dukcji magnetycznej w ten sposób, że krawędzie ae, dh, cg i bf są zgodne z kierunkiem linji, a powierzchnie $abcd$ i $efgh$ są prostopadłe do tego kierunku.

Załóżmy, że bf jest równoległe do cg, a ae do dh. Na rys. 224 mamy przekrój tej bryły za pomocą płaszczyzny $mnpq$, równoległej do ściany $abfe$.

Siły, skracające linje indukcji magnetycznej, wyrażają się dwiema siłami F_1 i F_2, które stanowią siły wypadkowe odpowiednich sił cząstkowych, działających na ściany $abcd$ i $efgh$ bryły. Zakładamy, że na każdej z tych powierzchni indukcja jest we wszystkich punktach jednakowa. Oznaczmy przez B_1 i B_2 indukcje magnetyczne na powyższych ścianach, a przez S_1 i S_2 rzuty tych ścian na płaszczyzny prostopadłe do linji średniej AB. Przy tych oznaczeniach, opierając się na wzorach paragrafu poprzedniego, będzie:

$$F_1 = \frac{B_1^2 . S_1}{8\pi . \mu}; \qquad F_2 = \frac{B_2^2 . S_2}{8\pi . \mu}.$$

Uwzględniając ciągłość strumienia indukcji magnetycznej, otrzymamy: [1])

$$B_1 . S_1 = B_2 . S_2,$$

więc:

$$B_2 = \frac{B_1 . S_1}{S_2}.$$

Podstawiając tę wartość we wzór dla siły F_2, otrzymamy:

$$F_2 = \frac{B_1^2 . S_1^2}{8\pi . \mu . S_2}.$$

Z tych wyrazów dla F_1 i F_2 wynika, że:

$$F_1 - F_2 = \frac{B_1^2 . S_1}{8\pi . \mu}\left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right).$$

Wzór ten wskazuje, że siła F_1 jest większa od siły F_2, ponieważ $S_1 < S_2$, jak to widać z rysunku. Przy ustalonym jednak układzie linji pola magnetycznego przyjąć należy, że siły wewnętrzne w strumieniu magnetycznym są w równowadze. Uzmysłowić to sobie można, porównywając rozważany przykład ze skrzynką szczelną, wypełnioną parą. Ciśnienia pary na ścianki takiej skrzynki są zawsze zrównoważone, tak że skrzynka pod wpływem tych sił poruszać się nie może. Przez analogję twierdzimy, że i bryła, wycięta ze strumienia indukcji magnetycznej powinna wytwarzać zespół sił, znajdujących się w równowadze. Przyjmując, że mogą tu istnieć tylko siły prostopadłe do ścian bryły, łatwo zauważymy, że siły, działające na ściany $abfe$ i $dcgh$, nie dadzą składowych, które mogłyby zrównoważyć się z różnicą sił $F_1 - F_2$. Składową, równoważącą tę różnicę, otrzymamy od sił, działających na ściany $bcgf$ i $adhe$, jeżeli założymy, że na te ściany działają ciśnienia, skierowane na zewnątrz. Oznaczmy te ciśnienia przez f. Następnie, przez a oznaczmy wymiar bc bryły, przez dl — wymiar $bf = mn$, przyjmując, że jest on nieskończenie mały, a przez α kąt pomiędzy kierunkiem mn i AB. Wtedy siłę, działającą na każdą z dwuch ścian $bcgf$ i $adhe$ wyrazimy za pomocą wzoru:

$$dF = f . a . dl.$$

[1]) Na podstawie twierdzeń geometrycznych łatwo spostrzedz, że rzuty ścian $abcd$ i $fghe$ mają się do siebie, jak pola tych ścian.

Siły F_1, F_2 i dwie siły dF są w równowadze, więc algebraiczna suma ich rzutów na kierunek AB równa się zeru:

$$F_1 - F_2 - 2\,dF \,.\, \sin\alpha = 0.$$

Podstawiając odpowiednie wartości, otrzymamy:

$$\frac{B_1^2 \,.\, S_1}{8\pi \,.\, \mu}\left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right) - 2 f a\, dl \,.\, \sin\alpha = 0.$$

Z rysunku widzimy, że:

$$S_2 - S_1 = 2\,a\,dl \,.\, \sin\alpha.$$

Po podstawieniu tego wyrazu w powyższe równanie, otrzymamy:

$$\frac{B_1^2 \,.\, S_1}{8\pi \,.\, \mu} \,.\, \frac{2\,a\,dl \,.\, \sin\alpha}{S_2} - 2 f a\, dl \,.\, \sin\alpha = 0.$$

stąd:

$$f = \frac{B_1^2 \,.\, S_1}{8\pi \,.\, \mu \,.\, S_2} = \frac{B_1^2 \,.\, S_1}{8\pi \,.\, \mu\, (S_1 + 2\,a\,dl \,.\, \sin\alpha)}.$$

Przyjmując pod uwagę, że $2\,a\,dl \,.\, \sin\alpha$ jest wielkością nieskończenie małą, która znika wobec wielkości S_1, będziemy mieli:

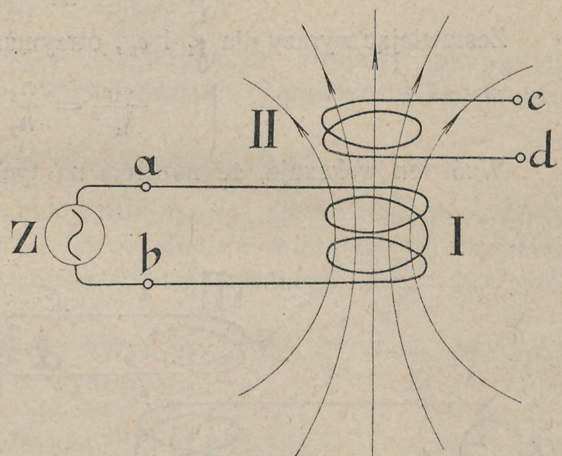
$$f = \frac{B^2}{8\pi \,.\, \mu}.$$

Wzór ten wyraża ciśnienia, istniejące w strumieniu magnetycznym, skierowane wpoprzek linji. Strumień magnetyczny rozpręża się w tym kierunku. Uwzględniając własności strumienia magnetycznego, polegające na kurczeniu się wzdłuż linji i na rozprężaniu się wpoprzek linji, można z łatwością wyznaczyć kierunek ruchu przewodników z prądem i różnych magnesujących się ciał, umieszczonych w polu magnetycznym, o ile zdołamy dokładnie przewidzieć układ linji indukcji pola.

ROZDZIAŁ XX.

Przeniesienie pracy prądu elektrycznego z jednego obwodu na drugi.

1. Cechy zasadnicze zjawiska. Mamy dwa obwody elektryczne (rys. 225), z których jeden posiada źródło prądu Z. Obwód ze źródłem prądu będziemy nazywali obwodem pierwotnym, a obwód drugi — wtórnym. Jeżeli w obwodzie pierwotnym przebiega prąd stały, to pole magnetyczne, wywołane przez ten prąd, jest niezmienne, i żadnego wpływu jednego obwodu na drugi nie spostrzegamy. Inaczej się sprawa przedstawia, gdy prąd zmienia się w obwodzie pierwotnym.



Rys. 225.

Rozważmy narazie przypadek, wskazany na rys. 225, gdzie obwód wtórny jest otwarty. Część linji sił magnetycznych, wywołanych przez prąd w obwodzie pierwszym, obejmą zwoje wtórne. Załóżmy, że każdy zwój obejmuje jednakową liczbę linji N_t i że liczba zwojów wynosi n_2, wtedy wobec zmienności prądu zmieniać się będzie również strumień magnetyczny, [1]) a więc w obwodzie wtórnym powstanie siła elektromotoryczna (patrz rozdz. XVIII):

$$E_{2t} = -\frac{dN_t}{dt} \cdot n_2 .$$

Ponieważ obwód jest przerwany, napięcie e_{2t} na zaciskach cd będzie równać się sile elektromotorycznej:

$$e_{2t} = E_{2t} = -\frac{dN_t}{dt} \cdot n_2 .$$

[1]) Możemy zapatrywać się na to zjawisko jako na ruch linji magnetycznych względem przewodników.

Napięcie na zaciskach zwojnicy pierwotnej — e_1 znajdziemy, uwzględniając opór w zwojnicy pierwotnej r_1 i siłę elektromotoryczną samoindukcji — E_{st}, która tam powstaje; prąd niech będzie i_{0t}. Z prawa Ohma wynika, że w tym razie:

$$e_{1t} = i_{0t} \,.\, r_1 - E_{st}\,.$$

Załóżmy, że każdy zwój zwojnicy pierwotnej obejmuje N_t' linji magnetycznych; gdy więc zwojnica będzie miała n_1 zwojów, otrzymamy:

$$E_{st} = -\frac{dN_t'}{dt} \,.\, n_1\,,$$

zatem:

$$e_{1t} = i_{0t} \,.\, r_1 + \frac{dN_t'}{dt} \,.\, n_1\,.$$

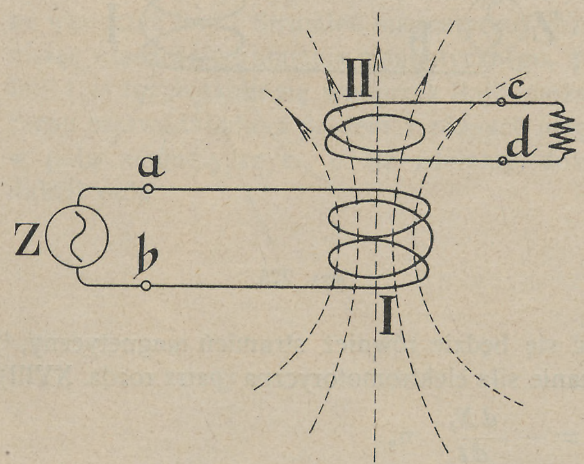
Gdy zwojnice znajdują się bardzo blizko siebie, np. gdy jedna wstawiona jest w drugą, to można przyjąć, że $N' = N$, pozatem $i_{0t} \,.\, r$, często bywa bardzo małe w porównaniu do e_{1t}, wtedy w przybliżeniu wypada, że:

$$e_{1t} = \frac{dN_t}{dt} \,.\, n_1\,.$$

Zestawiając wyrazy dla e_1 i e_2, otrzymamy:

$$\frac{e_{1t}}{e_{2t}} = \frac{n_1}{n_2}\,.$$

Wzór ten wskazuje, że napięcia na tych zwojnicach są proporcjonalne do liczby zwojów zwojnic. Stosunek liczby zwojów tych zwojnic nazywamy spółczynnikiem transformacji.



Rys. 226.

Rozważmy teraz, co zajdzie w obwodach, gdy obwód wtórny zamkniemy (rys. 226).

W obwodzie tym powstaje prąd i_{2t}, którego kierunek według prawa Maxwell'a będzie taki, że prąd dąży do zniesienia zmiany strumienia magnetycznego, jeżeli więc np. strumień wzrasta pod wpływem wzrastającego prądu pierwotnego, to magnetomotoryczna siła prądu wtórnego będzie osłabiać strumień magnetyczny. Skutkiem tego siła elektromotoryczna samoindukcji w obwodzie pierwotnym będzie słabsza i pierwotny prąd będzie silniejszy od tego, który przebiegałby w tym obwodzie przy otwartej wtórnej zwojnicy.

W ten sposób przez pole magnetyczne pewna ilość energji przeniesie się z obwodu pierwotnego do wtórnego. Oznaczmy nowy prąd w pierwotnym obwo-

dzie przez i_{1t} i nową siłę elektromotoryczną przez E'_{st}. Wtedy według prawa Ohma:

$$e_{1t} = i_{1t} \, . \, r - E'_{st} \, .$$

Jeżeli pomnożymy obie części równania przez i_{1t} i uwzględnimy, że siła elektromotoryczna samoindukcji przy wzrastaniu prądu jest odwrotna względem kierunku prądu, to otrzymamy:

$$e_{1t} \, . \, i_{1t} = i_1{}^2{}_t \, . \, r + E'_{st} \, . \, i_{1t} \, .$$

Moc $E'_{st} \, . \, i_{st}$ możemy przekształcić. Zakładamy, że strumień magnetyczny N_t obejmują jednocześnie zwoje pierwotnej i wtórnej zwojnicy. Strumień ten istnieje pod wpływem dwuch sił magnetomotorycznych pierwotnej i wtórnej zwojnicy, jeżeli więc oznaczymy przez **R** opór magnetyczny obwodu strumienia N_t, to możemy napisać wzór:

$$N_t = \frac{1{,}25 \, (n_1 \, . \, i_{1t} - n_2 \, . \, i_{2t})}{\mathbf{R}} \, .$$

Załóżmy:

$$n_1 \, . \, i_{1t} - n_2 \, . \, i_{2t} = n_1 \cdot i'_{1t} \, .$$

Prąd i'_{1t} możemy nazwać prądem magnesującym zwojnicy pierwotnej, a $i_{1t}'' = i_{1t} - i'_{1t}$, prądem roboczym. Wtedy równanie energietyczne będzie miało postać:

$$e_{1t} \, . \, i_{1t} = i_1{}^2{}_t \, . \, r + E'_{st} \, . \, i'_{1t} + E'_{st} \, . \, i''_{st} \, .$$

Wzór ten wskazuje wyraźnie, że moc prądu $e_{1t} \, . \, i_{1t}$, dostarczona do zwojnicy pierwotnej, w ilości $i_1{}^2{}_t \, . \, r$ przechodzi w ciepło Joule'a w drutach tej zwojnicy, w ilości $E'_{st} \, . \, i'_{st}$ [1]) zamienia się w energję pola magnetycznego, a $E_{st}' \, . \, i_{1t}''$ przechodzi do obwodu wtórnego.

Na podstawie poprzednich wzorów wyraz mocy $E_{st}' \, . \, i''_{1t}$ łatwo jest przekształcić. Ze wzoru dla amperozwojów wynika, że:

$$n_2 \, . \, i_{2t} = n_1 \, . \, i_{1t} - n_1 \, . \, i'_{1t} \, ,$$

albo:

$$i_{2t} = \frac{n_1}{n_2} \left(i_{1t} - i_{1t}' \right) = \frac{n_1}{n_2} \, . \, i''_{1t} \, ,$$

a więc:

$$i''_{1t} = \frac{n_2}{n_1} \, . \, i_{2t} \, .$$

Siłę elektromotoryczną E'_{st} można wyrazić przez takąż siłę, powstającą w zwojnicy wtórnej E_{2t}, mając na względzie, że obie siły elektromotoryczne wywołuje ten sam strumień magnetyczny, lecz w zwojnicach o różnej liczbie zwojów:

$$E'_{st} = \frac{E_{2t}}{n_2} \, . \, n_1 \, .$$

[1]) Patrz rozdział XIX.

Z tych wzorów wynika, że:

$$E_{st}' \cdot i_{1t}'' = \frac{E_{2t}}{n_2} \cdot n_1 \cdot \frac{n_2}{n_1} \cdot i_{2t} = E_{2t} \cdot i_{2t}.$$

Iloczyn $E_{2t} \cdot i_2$ wyraża moc prądu w zwojnicy wtórnej.

Zasługuje tu jeszcze na szczególną uwagę wzór:

$$i_{1t}'' = \frac{n_2}{n_1} \cdot i_{2t}.$$

Gdy obie zwojnice nawiniemy na żelazie i obwód magnetyczny zamkniemy, to z powodu małego oporu magnetycznego, i'_{2t} wypada bardzo małe i w przybliżeniu możemy wtedy przyjąć, że:

$$i_{1t} = i''_{1t},$$

wówczas:

$$\frac{i_{1t}}{i_{2t}} = \frac{n_2}{n_1}.$$

Wzór ten wskazuje, że prądy, powstające w zwojnicach, są odwrotnie proporcjonalne do liczby zwojów zwojnic.

2. Spółczynnik indukcji wzajemnej. Przy rozważaniu działania indukcyjnego dwuch obwodów na siebie, posługujemy się nieraz pojęciem spółczynnika indukcji wzajemnej, który jest analogiczny do spółczynnika samoindukcji i wyraża się w tych samych jednostkach.

Załóżmy np., że obwód drugi (rys. 226) obejmuje N linji magnetycznych, wytworzonych przez obwód pierwszy. Liczba $N = N_1 + N_2 + \ldots + N_n$, jeżeli obwód wtórny ma n zwojów a N_1, N_2 i t. d. są liczbami linji magnetycznych, objętych przez każdy zwój. Liczba linji N jest proporcjonalna do i_1; oznaczmy spółczynnik proporcjonalności przez M, wtedy:

$$N = M \cdot i_1.$$

Gdy N zmienia się, to w obwodzie drugim powstaje siła elektromotoryczna:

$$E_2 = -\frac{dN}{dt}$$

czyli:

$$E_2 = -\frac{d(M \cdot i_1)}{dt}.$$

O ile obwód magnetyczny, w którym przebiega strumień N, posiada opór przeważnie w powietrzu, to M jest stałe i:

$$E_2 = -M \cdot \frac{di_1}{dt}.$$

Spółczynnik M nazywamy **spółczynnnikiem indukcji wzajemnej.**

Liczebnie równa się on ilości linji, wywołanych przez jednostkę siły prądu w zwojnicy pierwszej, a objętych przez obwód zwojnicy drugiej. Można łatwo

stwierdzić przez rozumowanie, że spółczynnik indukcji wzajemnej zwojnicy pierwszej względem drugiej i naodwrót, spółczynnik indukcji wzajemnej zwojnicy drugiej względem pierwszej, są jednakowe.

Oznaczmy jeden spółczynnik przez M_1, a drugi przez M_2 i załóżmy, że w pierwszym przypadku rozważamy siłę elektromotoryczną, powstającą w drugiej zwojnicy pod wpływem pierwszej, a w drugim przypadku — w pierwszej zwojnicy pod wpływem drugiej; następnie załóżmy, że w jednej zwojnicy płynie stały prąd i_1, a w drugiej stały prąd i_2. Liczba linji sił, wywołanych przez zwojnicę pierwszą i objętych przez wszystkie zwoje drugiej, wyrażamy wzorem:

$$M_1 \cdot i_1 .$$

Gdybyśmy zwojnicę drugą usunęli na nieskończenie wielką odległość od zwojnicy pierwszej, to wszystkie te linje wyszłyby z obwodu tej zwojnicy, i według rozdziału XVIII-go praca wykonana przy tym przesuwaniu wyniosłaby:

$$M_1 \cdot i_1 \cdot i_2 .$$

Moglibyśmy wykonać tę samą pracę, odsuwając pierwszą zwojnicę od drugiej. Wtedy wyraz tej pracy byłby inny.

Liczbę linji sił, wywołanych przez zwojnicę drugą, a objętych przez zwoje pierwszej wyrażamy wzorami:

$$M_2 \cdot i_2 .$$

Praca więc, wykonana przy odsuwaniu pierwszej zwojnicy do nieskończoności, wyniesie:

$$M_2 \cdot i_2 \cdot i_1 .$$

Ponieważ te dwa wzory wyrażają jedno i to samo, zatem:

$$M_1 \cdot i_1 \cdot i_2 = M_2 \cdot i_2 \cdot i_1 ,$$

stąd:

$$M_1 = M_2 .$$

Spółczynnik więc indukcji wzajemnej dwuch obwodów określa jednocześnie wpływ obwodu pierwszego na drugi i drugiego na pierwszy.

Rozważmy jeszcze dokładniej jeden przypadek szczególny.

Załóżmy, że oba obwody są tak ustawione, by wszystkie linje, objęte przez pierwszą zwojnicę, objęła również zwojnica druga i naodwrót. [1]) Oznaczmy następnie przez N_1 strumień magnetyczny, wywołany przez prąd pierwszej zwojnicy, gdy siła tego prądu równa się jednostce, a przez N_2 strumień magnetyczny, wywołany przez prąd drugiej zwojnicy, gdy siła jego też równa się jednostce. Liczba zwojów pierwszej zwojnicy niech będzie n_1, a drugiej n_2.

Wtedy strumień magnetyczny, wywołany przez jednostkę prądu pierwszej zwojnicy, i objęty przez obwód drugiej zwojnicy, która ma n_2 zwojów, będzie:

$$N_1 \cdot n_2 .$$

---

[1]) Praktycznie można to osiągnąć tylko w przybliżeniu.

Iloczyn ten jest spółczynnikiem wzajemnej indukcji zwojnicy pierwszej względem drugiej.

Liczba linji magnetycznych, wywołanych przez jednostkę prądu w zwojnicy drugiej, a objęta przez obwód zwojnicy pierwszej, będzie:

$$N_2 \,.\, n_1 .$$

Jest to spółczynnik wzajemnej indukcji zwojnicy drugiej względem pierwszej.

Oba te spółczynniki są sobie równe, gdyż liczby linji N_1 i N_2 są wprost proporcjonalne do liczby zwojów odpowiedniej zwojnicy; każdy z dwuch powyższych spółczynników równa się więc pewnej stałej, pomnożonej przez iloczyn liczb zwojów obu zwojnic. Oznaczmy tę stałą przez K; wtedy:

$$N_1 \,.\, n_2 = K \,.\, n_1 \,.\, n_2 ,$$

$$N_2 \,.\, n_1 = K \,.\, n_2 \,.\, n_1 .$$

Wielkość K zależy tu od oporu magnetycznego, który w obu przypadkach jest ten sam.

Oznaczmy spółczynnik indukcji wzajemnej przez M; wtedy:

$$M = N_1 \,.\, n_2 = N_2 \,.\, n_1 .$$

Spółczynniki samoindukcji z łatwością można też wyrazić, pamiętając, że liczebnie jest to ilość linji, objętych przez dany obwód, gdy po tym obwodzie przepływa prąd, którego siła równa się jednostce.

Dla pierwszej zwojnicy spółczynnik samoindukcji będzie:

$$L_1 = N_1 \,.\, n_1 ,$$

dla drugiej zaś zwojnicy:

$$L_2 = N_2 \,.\, n_2 .$$

Z powyższych równań wynika, że:

$$M^2 = N_1 \,.\, N_2 \,.\, n_1 \,.\, n_2 ,$$

$$L_1 \,.\, L_2 = N_1 \,.\, n_1 \,.\, N_2\, n_2 ,$$

skąd:

$$M^2 = L_1 \,.\, L_2 ,$$

$$M = \sqrt{L_1 \,.\, L_2} .$$

Gdy zwojnice są tak ustawione, że nie wszystkie linje sił, wywołane przez jedną zwojnicę, przechodzą przez drugą, liczba linji w wyrazach dla spółczynnika indukcji wzajemnej jest mniejszą od liczby linji w wyrazach dla samoindukcji i wtedy:

$$M < \sqrt{L_1 \,.\, L_2} .$$

W ten sposób $\sqrt{L_1 \,.\, L_2}$ wyraża największą wartość teoretyczną spółczynnika wzajemnej indukcji dwuch zwojnic. Wartość ta w praktyce nigdy nie może być osiągnięta, ponieważ, ustawiając zwojnice nawet jaknajbliżej obok siebie, nie zdołamy osiągnąć tego, aby wszystkie linje sił, wywołane w jednej zwojnicy, przeszły do wnętrza drugiej.

Gdy spółczynnik indukcji wzajemnej zbliża się do największej swej wartości $\sqrt{L_1 . L_2}$, mówimy, że takie obwody są sprzągnięte dokładnie lub sztywno.

Wogóle, wielkość spółczynnika indukcji wzajemnej dwuch zwojnic zależy tylko od cech gieometrycznych budowy zwojnic, od ich położenia względem siebie i od własności magnetycznych ciał, otaczających oba obwody.

3. **Przeniesienie pracy prądu z jednego obwodu na drugi przy prądach zmiennych sinusoidalnie.** Rozważmy układ dwuch zwojnic (rys. 225). Jeżeli obwód zwojnicy wtórnej nie jest zamknięty, to w tych warunkach niema ona żadnego wpływu na zwojnicę pierwotną i, według rozdz. XIII § 5, wartość czynna prądu w zwojnicy pierwotnej wyrazi się wzorem:

$$i_0 = \frac{e_1}{\sqrt{r_1^2 + (z \pi L_1)^2}}.$$

Prąd spóźnia się w fazie względem napięcia o kąt φ, którego tangens wyraża się wzorem:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{z \pi L_1}{r_1}.$$

W zwojnicy wtórnej powstaje tylko siła elektromotoryczna indukcji. Wielkość tej siły elektromotorycznej E_2 możemy wyrazić w bardzo prosty sposób za pomocą spółczynika indukcji wzajemnej. Z tego, co wiemy o tym spółczynniku, wypada, że:

$$E_{2t} = -M . \frac{d i_{0t}}{dt}.$$

Jeżeli zmienność prądu wyrazi się wzorem:

$$i_{0t} = \bar{i}_0 . \sin \frac{2 \pi t}{T},$$

to siła elektromotoryczna zwojnicy wtórnej będzie:

$$E_{2t} = -M . \frac{2 \pi}{T} . \bar{i}_0 . \cos \frac{2 \pi t}{T} \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

Stąd dla wartości czynnych otrzymamy wzór:

$$E_2 = M . \frac{2 \pi}{T} . i_0 = i_0 . z \pi M.$$

Oznaczmy przez e_2 napięcie na końcówkach zwojnicy wtórnej. Prądu w tej zwojnicy niema, więc:

$$e_2 = E_2 = i_0 . z \pi M.$$

Dla zwojnicy pierwotnej:

$$e_1 = i_0 . \sqrt{r_1^2 + (z \pi L_1)^2}.$$

Jeżeli r_1 jest bardzo małe w porównaniu z $z \pi L_1$, to:

$$e_1 = i_0 . z \pi L_1 .$$

Ze wzorów dla e_2 i e_1 otrzymujemy:

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{L_1}{M} .$$

Jeżeli zwojnice znajdują się bardzo blizko jedna drugiej i mają liczbę zwojów jednakową, to w przybliżeniu:

$$L_1 = M,$$

a więc:

$$e_1 = e_2 .$$

Jeżeli zaś zwojnicę wtórną odsuniemy od pierwotnej, to:

$$L_1 > M,$$

a stąd:

$$e_1 > e_2 .$$

Że tak być musi, łatwo zrozumieć, mając na uwadze, że przy odsuwaniu zwojnicy wtórnej coraz mniejszą część strumienia magnetycznego, wywołanego przez zwojnicę pierwszą, obejmuje zwojnica druga.

Rozważmy jeszcze przypadek, w którym zwojnica wtórna znajduje się bardzo blizko względem pierwotnej, a liczby zwojów są nierówne: w pierwszej liczba ta wynosi n_1, a w drugiej — n_2. Przez N_1 oznaczymy strumień magnetyczny, wywołany przez jeden zwój zwojnicy pierwotnej, gdy w niej przebiega prąd, równy jednostce i objęty przez jeden zwój którejkolwiek zwojnicy.

Zgodnie z określeniem spółczynników samoindukcji i indukcji wzajemnej, znajdziemy:

$$L_1 = N_1 . n_1 . n_1 ,$$

$$M = N_1 . n_1 . n_2 ,$$

stąd:

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{N_1 . n_1 . n_1}{N_1 . n_1 . n_2} = \frac{n_1}{n_2} .$$

Wzór ten wskazuje, że wartości czynne napięć na zwojnicach mają się do siebie, jak liczby zwojów odpowiednich zwojnic.

W praktyce jest rzeczą ważną zdać sobie sprawę z układu wektorów napięcia, prądu i strumienia magnetycznego.

Jeżeli prąd wyrazimy wzorem:

$$i_{0t} = \bar{i} . \sin \frac{2 \pi t}{T} ,$$

to mając na uwadze wywody rozdziału XIII § 5:

$$e_t = \bar{e} . \sin \left(\frac{2 \pi t}{T} + \varphi \right) .$$

Ze wzoru (1) w paragrafie niniejszym, uwzględniając, że $e_2 = E_2$, otrzymamy:

$$e_{2t} = -z\pi M \,.\, \bar{i}_0 \,.\, \cos\frac{2\pi t}{T}.$$

Ponieważ:

$$-\cos\frac{2\pi t}{T} = \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{2}\right),$$

przeto:

$$e_{2t} = z\pi M \,.\, \bar{i}_0 \,.\, \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{2}\right),$$

albo:

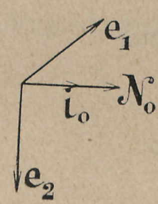
$$e_{2t} = \bar{e}_2 \,.\, \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{2}\right).$$

Strumień magnetyczny jest co do fazy zgodny z prądem, który go wywołuje, [1]) więc:

$$N_{0t} = \bar{N}_0 \,.\, \sin\frac{2\pi t}{T}.$$

Na zasadzie równań powyższych otrzymamy układ wektorów, pokazany na rysunku 227.

Przejdźmy teraz do przypadku, wskazanego na rys. 226. Zwojnica wtórna tworzy obwód zamknięty, a zatem przebiega w niej również prąd zmienny.



Rys. 227.

Załóżmy narazie, że zwojnice są bardzo blizko przysunięte do siebie; wtedy można przyjąć w przybliżeniu, że wszystkie zwoje jednej i drugiej zwojnicy obejmują ten sam strumień magnetyczny N_t w chwili t. Strumień ten wywołują obie zwojnice, których amperozwoje oznaczymy przez $n_1 \,.\, i_{1t}$ i $n_2 \,.\, i_{2t}$. Jeżeli opór magnetyczny obwodu, w którym przebiega strumień magnetyczny, wynosi $\mathbf{R}$, to: [2])

$$N_t = \frac{1{,}25 \,.\, (n_1 \,.\, i_{1t} + n_2 \,.\, i_{2t})}{\mathbf{R}}.$$

Sumę $n_1 \,.\, i_{1t} + n_2 \,.\, i_{2t}$ oznaczymy przez $n_1 \,.\, i'_{1t}$, a prąd i'_{1t} będziemy nazywali prądem magnesującym. Wtedy:

$$N_t = \frac{1{,}25 \,.\, n_1 \,.\, i'_{1t}}{\mathbf{R}}.$$

Gdy opór $\mathbf{R}$ jest wielkością stałą, co w wielu przypadkach można przyjąć, to, oznaczając $\frac{1{,}25 \,.\, n_1}{\mathbf{R}}$ przez K, otrzymamy:

$$N_t = K \,.\, i_{1t}.$$

---

[1]) Przyjmujemy, że niema histerezy; patrz rozdz. XXV § 3.

[2]) Patrz rozdział VII.

Jeżeli więc:

$$N_t = \overline{N} \,.\, \sin \frac{2 \pi t}{T}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

to:

$$i'_{1t} = K \,.\, \overline{N} \,.\, \sin \frac{2 \pi t}{T}.$$

Załóżmy następnie, że obwód wtórny nie tworzy linji magnetycznych, nie skojarzonych ze zwojnicą pierwotną. Oznaczmy przez E_{2t} siłę elektromotoryczną w zwojnicy wtórnej, a przez r_2 opór całego obwodu wtórnego.

Prąd wtórny wyznaczymy ze wzoru:

$$i_{2t} = \frac{E_{2t}}{r_2},$$

$$E_{2t} = -\frac{d N_t}{d t} \,.\, n_2 = -\overline{N} \,.\, \frac{2 \pi}{T} \,.\, n_2 \,.\, \cos \frac{2 \pi t}{T},$$

więc:

$$i_{2t} = -\frac{\overline{N}}{r_2} \,.\, \frac{2 \pi}{T} \,.\, n_2 \,.\, \cos \frac{2 \pi t}{T},$$

$$-\cos \frac{2 \pi t}{T} = \sin \left(\frac{2 \pi t}{T} - \frac{\pi}{2} \right),$$

przeto:

$$i_{2t} = \frac{\overline{N}}{r_2} \,.\, \frac{2 \pi}{T} \,.\, n_2 \,.\, \sin \left(\frac{2 \pi t}{T} - \frac{\pi}{2} \right),$$

albo:

$$i_{2t} = \overline{i}_2 \,.\, \sin \left(\frac{2 \pi t}{T} - \frac{\pi}{2} \right). \quad \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Prąd w zwojnicy pierwotnej znajdziemy w sposób następujący: Według poprzednich założeń:

$$n_1 \,.\, i_{1t} + n_2 \,.\, i_{2t} = n_1 \,.\, i'_{1t},$$

przeto:

$$n_1 \,.\, i_{1t} = n_1 \,.\, i'_{1t} - n_2 \,.\, i_{2t},$$

albo:

$$i_{1t} = i'_{1t} - \frac{n_2}{n_1} \,.\, i_{2t}.$$

Podstawiając wartości dla i'_{1t} i i_{2t} z równań poprzednich, otrzymamy:

$$i_{1t} = K \,.\, \overline{N} \,.\, \sin \frac{2 \pi t}{T} - \frac{n_2^2}{n_1} \,.\, \frac{\overline{N}}{r_2} \,.\, \frac{2 \pi}{T} \,.\, \sin \left(\frac{2 \pi t}{T} - \frac{\pi}{2} \right),$$

albo krócej:

$$i_{1t} = \overline{i'}_1 \,.\, \sin \frac{2 \pi t}{T} - \frac{n_2}{n_1} \,.\, \overline{i}_2 \,.\, \sin \left(\frac{2 \pi t}{T} - \frac{\pi}{2} \right). \quad \ldots \ldots \quad (4)$$

Wzór ten wskazuje, że prąd i_{1t} jest różnicą gieometryczną prądów: i'_{1t} i $\frac{n_2}{n_2} \,.\, i_{2t}$.

Napięcie na zwojnicy pierwotnej znajdziemy według prawa Ohma, uwzględniając siłę elektromotoryczną indukcji E_1, wywołaną przez strumień magnetyczny w tej zwojnicy:

$$e_{1t} = i_{1t} \cdot r_1 - E_{1t} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

$$E_{1t} = -\frac{dN_t}{dt} \cdot n_1 = -\overline{N} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot n_1 \cdot \cos\frac{2\pi t}{T},$$

albo:

$$E_{1t} = \overline{N} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot n_1 \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{2}\right).$$

Oznaczając $\overline{N} \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot n_1$ przez $\overline{E}_1$, będziemy mieli:

$$E_{1t} = \overline{E}_1 \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{2}\right).$$

Podstawiając to wyrażenie w równanie (5), otrzymamy:

$$e_{1t} = i_{1t} \cdot r_1 - \overline{E}_1 \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{2}\right).$$

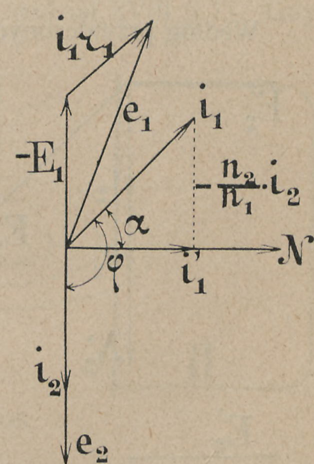
Napięcie wtórne znajdziemy również według prawa Ohma:

$$e_{2t} = i_{2t} \cdot r'_2,$$

gdzie r'_2 oznacza opór części zewnętrznej obwodu wtórnego. Uwzględniając równanie (3), otrzymamy:

$$e_{2t} = \overline{i}_2 \cdot r'_2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{2}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

Na podstawie równań (2), (3), (4), (5) i (6) wykreślone są wektory na rys. 228.



Rys. 228.

W przypadku, kiedy zwojnica wtórna umieszczona jest niezbyt blizko zwojnicy pierwotnej, wypada uwzględnić strumienie magnetyczne, objęte tylko przez zwojnicę pierwotną lub też tylko przez wtórną.

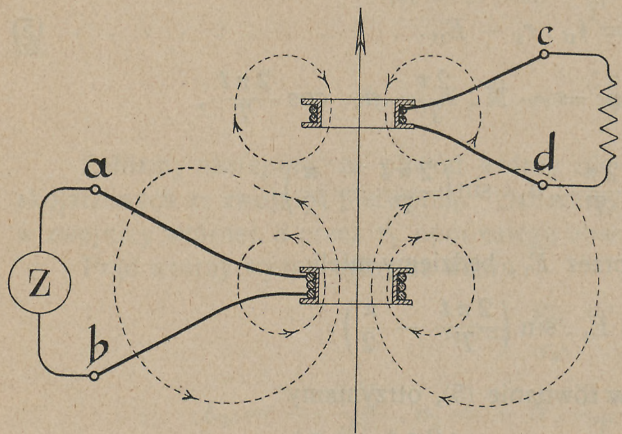
Na rys. 229 wskazany jest układ strumieni magnetycznych wokoło takich zwojnic. Oprócz strumienia N, objętego przez obie zwojnice, mamy tu jeszcze dwa strumienie: N_1, objęty tylko przez zwojnicę pierwotną i N_2, objęty przez zwojnicę wtórną. [1]) Strumienie te, wywołane przez odpowiednie prądy, są w fazie z tymi prądami. Najłatwiej zorjentować się w układzie prądów i napięć w tym razie, posiłkując się wykresem wektorowym. Zaczniemy od obwodu wtórnego.

[1]) N_1 i N_2 oznaczają całe strumienie ze wszystkich stron zwojnic.

Załóżmy, że końcówki zwojnicy wtórnej są połączone oporem bezindukcyjnym r'_2; przy prądzie i_2, napięcie wtórne będzie:

$$e_2 = i_2 \, . \, r'_2 ,$$

w fazie z prądem.



Rys. 229.

Oznaczmy przez r'' opór zwojnicy wtórnej, a przez E_2 i E'_2 siły elektromotoryczne, wywołane strumieniami magnetycznemi N i N_2; wtedy według prawa Ohma napięcie na końcówkach cd możemy wyrazić wzorem:

$$e_{2t} = i_{2t} \, . \, r''_2 - E_{2t} - E'_{2t} \, .$$

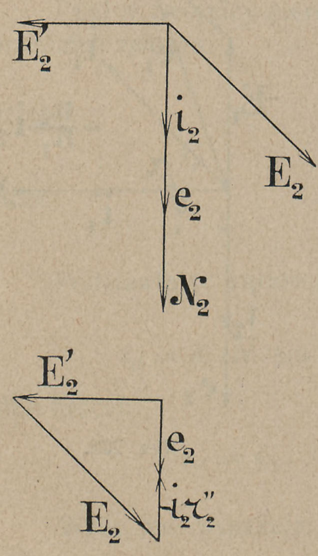
Zwojnica wtórna jest źródłem prądu, przeto kierunek dodatni napięcia w tym razie jest odwrotny względem tego, jaki przyjmujemy za dodatni w odbieraczu. Mając to na uwadze, piszemy wzór powyższy ze znakami odwrotnemi:

$$e_{2t} = - i_{2t} \, . \, r''_2 + E_{2t} + E'_{2t} \, . \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (7)$$

Gdy oznaczymy siły elektromotoryczne, wywołane strumieniami magnetycznemi N i N_1 w pierwotnej zwojnicy przez E_1 i E'_1, to w podobnyż sposób otrzymamy wyraz napięcia na końcówkach zwojnicy pierwotnej:

$$e_{1t} = i_{1t} \, . \, r_1 - E_{1t} - E'_{1t} \, . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

Według przytoczonych równań można wszystkie omawiane wielkości przedstawić wykreślnie za pomocą wektorów pochylonych jeden względem drugiego pod odpowiedniemi kątami.



Rys. 230 i 231.

Na rys. 230 wskazane są wektory: i_2, e_2, N_2, E'_2 i E_2. [1]) Trójkąt na rys. 231 wykreślony jest na podstawie równania (7).

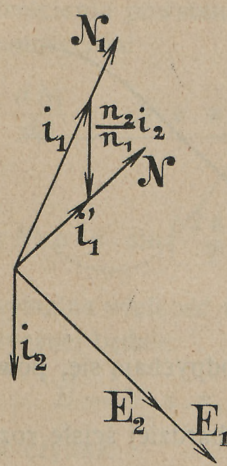
Na rys. 232 wskazany jest kierunek wektorów i_1, i_2, i'_1, N, N_1, E_2 i E_1. Trójkąt prądów jest zbudowany na zasadzie równania (4).

Według kierunku wektora N_1 znajdujemy położenie wektora E'_1 i na zasadzie równania (8) wykreślamy wielobok na rys. 233.

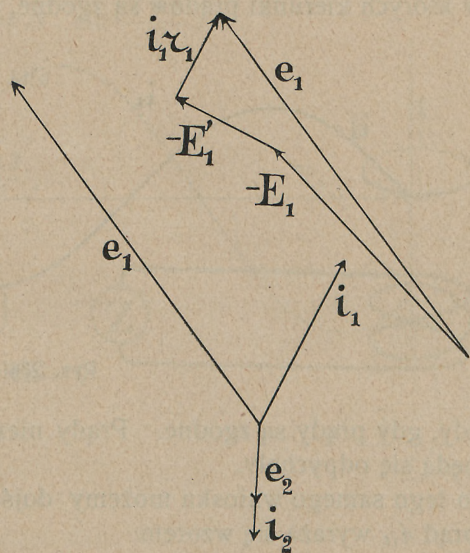
---

[1]) Na podstawie wzorów dla elektromotorycznej siły indukcji wypada, że siła ta spóźnia się w fazie o ćwierć okresu względem strumienia magnetycznego, który ją wywołuje.

Układ najważniejszych wektorów e_1, i_1, i_2, e_2 wskazany jest na rys. 234. Prądy tworzą tu kąt blizki do 180°.

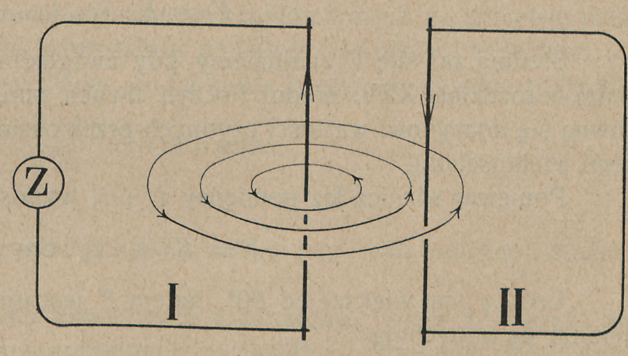


Rys. 232.



Rys. 233 i 234.

4. **Działanie mechaniczne prądów pierwotnych na wtórne.** Rozważmy dwa obwody, z których tylko I-szy ma źródło prądu Z (rys. 235). Gdy w pierwszym obwodzie prąd wzrasta, to w obwodzie drugim powstaje prąd indukcyjny, który wytworzy linje sił przeciwdziałające tym, jakie doń wchodzą. W tych warunkach mamy dwa prądy idące, jak widać na rysunku, w różne strony, a takie prądy, jak wiemy, wzajemnie się odpychają (patrz rozdział XVIII § 7). Gdyby siła prądu w pierwszym obwodzie zmniejszała się, to prąd, wzbudzony w drugim obwodzie, miałby kierunek odwrotny i byłby przyciągany przez prąd obwodu pierwszego.

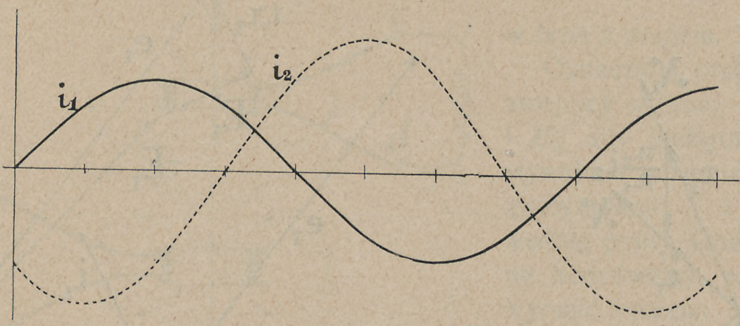


Rys. 235.

W praktyce większe znaczenie posiadają dwie zwojnice (rys. 229), w których przebiegają prądy zmienne sinusoidalnie.

Z rozważań poprzedniego paragrafu, a w szczególności z wykresów na rys. 230 do 234 łatwo spostrzedz, że rożnica faz prądów i_1 i i_2 zależy przedewszystkiem od odległości zwojnic i od własności samoindukcyjnych zwojnicy wtórnej. Zawsze jednak prąd i_2 spóźnia się względem prądu i_1 więcej niż o ćwierć okresu, sinusoidy tych prądów będą się więc przedstawiały tak, jak to wskazano

na rys. 236. Zastanawiając się nad tym układem prądów, spostrzegamy, że cząstki czasu, w których mają one kierunki różne, są znacznie dłuższe od tych cząstek czasu, w których kierunki prądów są zgodne, pozatem wielkość prądów jest mniej-



Rys. 236.

sza wtedy, gdy prądy są zgodne. Prądy niezgodne odpychają się, powyższe więc prądy będą się odpychały.

Do tego samego wniosku możemy dojść przez bardziej ścisłe rozumowanie. Jeżeli prąd i_{1t} wyraża się wzorem:

$$i_{1t} = \bar{i} \,.\, \sin \frac{2\pi t}{T},$$

to wzór dla prądu i_{2t} wypadnie:

$$i_{2t} = \bar{i} \,.\, \sin \left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi\right),$$

a siła współdziałania prądów i_1 i i_2, jak wiemy z rozdziału XVIII § 7, wyrazi się w chwili t wzorem:

$$F_t = K \,.\, i_{1t} \,.\, i_{2t} \,.$$

Średnią zaś siłę F znajdziemy, gdy uwzględnimy wynik wywodów, podanych dalej w rozdziale XXV: średni iloczyn dwuch sinusoidalnie zmiennych wielkości równa się iloczynowi wartości czynnych przez cosinus kąta różnicy faz pomiędzy temi wielkościami.

Ponieważ różnica faz pomiędzy i_1 i i_2 wynosi φ, przeto:

$$F = K \,.\, i_1 \,.\, i_2 \,.\, \cos \varphi .$$

Lecz φ jest większe od 90^0, zatem F jest ujemne; oznacza to, że prądy wzajemnie się odpychają.

Jeśliby obwód wtórny posiadał samoindukcję dodatkową, to i_2 spóźniałoby się względem e_2, i kąt φ byłby jeszcze większy, siła więc odpychająca F wzrosłaby jeszcze bardziej.

5. Pierścień w polu magnetycznym zmiennym. Na szczególną uwagę zasługuje powstawanie prądów indukcyjnych w pierścieniu, umieszczonym w polu magnetycznym zmiennym (rys. 237), wywołanym przez prąd zwojnicy, którą zasila źródło Z.

Załóżmy, że strumień, objęty pierścieniem, wynosi N_t i zmienia się sinusoidalnie:

$$N_t = \overline{N} \,.\, \sin \frac{2\pi t}{T}\,.$$

W pierścieniu powstanie wtedy siła elektromotoryczna:

$$E_t = -\frac{dN_t}{dt} = -\overline{N} \,.\, z \,.\, \pi \,.\, \cos \frac{2\pi t}{T}\,,$$

albo:

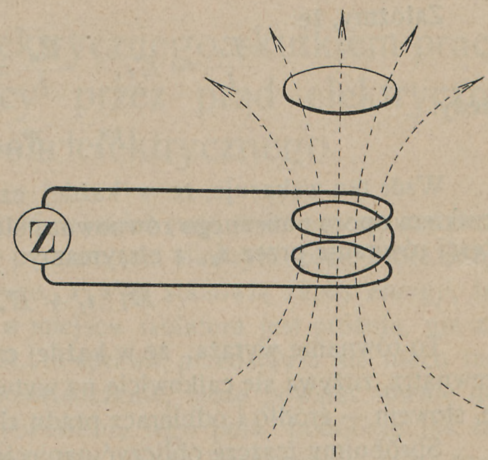
$$E_t = \overline{N} \,.\, z \,.\, \pi \,.\, \sin \left(\frac{2\pi t}{T} - \frac{\pi}{2} \right).$$

Maksymalna wielkość tej siły elektromotorycznej będzie:

$$\overline{E} = \overline{N} \,.\, z \,.\, \pi\,,$$

a wartość czynna:

$$E = \frac{1}{\sqrt{2}} \,.\, \overline{N} \,.\, z \,.\, \pi \,. = 2{,}22 \,.\, z \,.\, \overline{N}\,.$$



Rys. 237.

Przykład liczbowy. Niech będzie $\overline{N} = 2 \,.\, 10^6$ c. g. s., $z = 100$ zmian na sekundę.

$$E = \frac{1}{\sqrt{2}} \,.\, 2 \,.\, 10^6 \,.\, 100 \,.\, 3{,}14 = 4{,}45 \,.\, 10^8 \text{ c. g. s.} =$$
$$= 4{,}45 \text{ wolta.}$$

Tej wielkości siła elektromotoryczna, ze względu wprost na symetrję układu, będzie bezwątpienia rozłożona jednostajnie po całym obwodzie pierścienia; jeżeli więc np. pierścień ma średnicę 20 *cm*, to na każdy centymetr obwodu przypadnie:

$$\frac{4{,}45}{\pi\, 20} = 0{,}071 \text{ wolta.}$$

Prąd w tym pierścieniu obliczylibyśmy, znając jego opór omiczny i spółczynnik samoindukcji.

Przechodząc do wielkości chwilowych i oznaczając przez i_t — prąd, przez E_{st} — siłę elektromotoryczną samoindukcji w chwili t i wreszcie opór omiczny całego obwodu pierścienia przez r, otrzymamy według prawa Ohma równanie:

$$i_t = \frac{E_t + E_{st}}{r}\,,$$

albo:

$$E_t + E_{st} = i_t \,.\, r\,.$$

Siły elektromotoryczne i opór są rozłożone jednostajnie wzdłuż całego ob-

wodu. Oznaczmy przez l długość obwodu pierścienia i podzielmy przez tę długość powyższe równanie, otrzymamy wówczas:

$$\frac{E_t}{l} + \frac{E_{st}}{l} = i_t \cdot \frac{r}{l}.$$

Załóżmy, że:

$$\frac{E_t}{l} = E'_t, \quad \frac{E_{st}}{l} = E'_{st}, \quad \frac{r}{l} = r',$$

wtedy:

$$E'_t + E'_{st} = i_t \cdot r'. \qquad \text{(a)}$$

Wzór ten wskazuje, że w każdej cząstce pierścienia siły elektromotoryczne skutkiem oporu omicznego równoważą się ze spadkiem napięcia. Pomnóżmy obie części równania przez i_t, a otrzymamy:

$$E'_t \cdot i_t + E'_{st} \, i_t = i_t^2 \, r'.$$

To równanie wyraża, że w każdej cząstce obwodu ilość energji, dostarczona zzewnątrz, zużywa się całkowicie na wytworzenie ciepła Joule'a w tej samej cząstce, słowem — źródło i odbieracz prądu zlewają się wspólnie.

Spróbujmy jeszcze obliczyć napięcie pomiędzy dwoma dowolnemi punktami a i b na pierścieniu. Oznaczmy odległość pomiędzy temi punktami, wzdłuż obwodu pierścienia, przez d, a napięcie pomiędzy niemi przez e, wtedy według prawa Ohma:

$$i_t = \frac{e + E'_t \cdot d + E'_{st} \cdot d}{r' \cdot d},$$

lub:

$$e = i_t \cdot r' \cdot d - E'_t \cdot d - E'_{st} \cdot d.$$

Powróćmy do równania (a) i pomnóżmy je przez d, otrzymamy wówczas:

$$E'_t \cdot d + E'_{st} \cdot d = i_t \cdot r' \cdot d.$$

Jeżeli zależność tę uwzględnimy, to otrzymamy:

$$e = 0.$$

To znaczy, że napięcia pomiędzy dwoma dowolnemi punktami na pierścieniu niema. Pierścień ten, pod względem rozkładu potencjałów na nim, zachowuje się jak przewodnik naelektryzowany w zjawiskach elektrostatycznych. A jednak w pierścieniu tym jest ruch elektryczności. Odbywa się on oczywiście pod wpływem sił elektromotorycznych, które nie mogą wywołać różnicy potencjałów, ponieważ w miejscu powstania zużywają się na pokonanie oporu omicznego przewodnika.

Pierścień powyższy jest odpychany przez zwojnicę w górę, jak to wynika z rozważań paragrafu poprzedniego. Główną przyczyną, wywołującą w tym razie różnicę faz większą od 90^0 pomiędzy prądami wtórnym i pierwotnym, jest samoindukcja obwodu wtórnego.

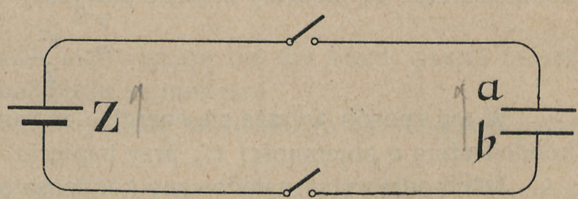
ROZDZIAŁ XXI.

Powstawanie energji pola elektrycznego skutkiem pracy prądu i wykonywanie pracy przez prąd elektryczny kosztem energji pola elektrycznego.

W rozdziale IX podane zostały warunki, w jakich prąd może przepływać przez izolatory. W izolatorach powstają wtedy przesunięcia elektryczności, które odbywają się skutkiem pracy prądu elektrycznego, a więc stanowią zapas energji, tak zwaną energję pola elektrycznego. Gdy w miejscu izolatora jest próżnia, nie zawierająca żadnych ładunków elektrycznych, to sprawa przedstawia się nieco inaczej. Pole elektryczne, jak to wskazuje doświadczenie, może powstać równie dobrze w próżni, jak i w izolatorze. Dla wytworzenia tego pola, podobnie jak dla wytworzenia pola magnetycznego, potrzebna jest pewna ilość energji, która przenosi się do eteru i znajduje się tam w postaci energji pola elektrycznego. Jednak gdy izolatora niema, ilość energji w polu elektrycznym przy tym samym natężeniu jest mniejsza.

Pole elektryczne istnieje we wszystkich wypadkach przepływu prądu elektrycznego, ponieważ przewodniki prowadzące prąd zawsze są naładowane elektrycznością. Zaznaczyć jednak należy, że tylko w szczególnych przypadkach mamy przewodniki o dużej powierzchni, bardzo blizko względem siebie umieszczone, ze znaczną na nich różnicą potencjałów. Pole elektryczne ma wtedy dość duże natężenie, a więc i zapas energji w nim zawarty ma znaczenie praktyczne. W tych przypadkach mówimy, że przewodniki tworzą kondensator.

Rozważmy np. obwód, przedstawiony na rys. 238, gdzie *z* oznacza źródło prądu, *a i b* — przewodniki w postaci płytek, tworzące kondensator. Po zamknięciu wyłączników, w obwodzie będzie płynął prąd dotąd, dopóki napięcie pomiędzy płytkami kondensatora *ab* nie stanie się równem sile elektromotorycznej źródła prądu. Na-



Rys. 238.

pięcie na płytkach kondensatora nazywamy siłą elektromotoryczną kondensatora. Kierunek jej jest przeciwny prądowi ładującemu, a więc i sile elektromotorycznej źródła prądu. Oznaczmy przez E siłę elektromotoryczną źródła prądu, przez E_{ct} — siłę elektromotoryczną kondensatora, przez i_t — prąd w obwodzie, a przez r — opór omiczny obwodu. Według prawa Ohma otrzymamy wzór:

$$i_t = \frac{E - E_{ct}}{r},$$

skąd: $$E = i_t \,.\, r + E_{ct}.$$

Mnożąc obie strony przez $i_t \,.\, dt$, otrzymamy:

$$E \,.\, i_t \,.\, dt = i_t^2 \,.\, r \,.\, dt + E_{ct} \,.\, i_t \,.\, dt,$$

gdzie $E \,.\, i_t \,.\, dt$ oznacza pracę dostarczoną przez źródło prądu, a $i_t^2 \,.\, r \,.\, dt$ — pracę, przetwarzającą się w obwodzie w ciepło Joule'a, $E_{ct} \,.\, i_t \,.\, dt$ — pracę, przetwarzającą się w energję pola elektrycznego kondensatora.

Oznaczmy pojemność kondensatora przez C, a ilość elektryczności, która zebrała się na każdej okładce kondensatora od chwili zamknięcia wyłączników do chwili t — przez q_t. Na zasadzie wzorów, podanych w rozdziale IX, otrzymamy:

$$C = \frac{q}{E_{ct}},$$

skąd: $$q_t = C \,.\, E_{ct},$$

a $$d\,q_t = C \,.\, d\,E_{ct}.$$

Z rozdziału II wiemy, że:

$$i_t = \frac{d\,q_t}{d\,t},$$

a więc: $$i_t = C \,.\, \frac{d\,E_{ct}}{d\,t}.$$

Uwzględniając wyrażoną w ten sposób siłę prądu, można energję dostarczoną kondensatorowi w ciągu czasu t wyrazić za pomocą całki:

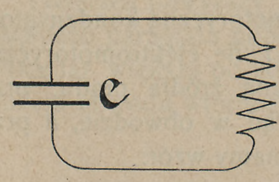
$$\int_0^t E_{ct} \,.\, i_t \,.\, dt = C \,.\, \int_0^t E_{ct} \,.\, d\,E_{ct} = C \,.\, \frac{E_{ct}^2}{2}.$$

Ponieważ siła elektromotoryczna kondensatora równa się zawsze napięciu na kondensatorze e, możemy napisać powyższy wzór jeszcze inaczej, mianowicie:

$$C \,.\, \frac{e^2}{2}.$$

W ten sposób wyraża się energja, zawarta w polu elektrycznym dowolnego kondensatora o pojemności C, przy napięciu e na okładkach.

Jeżeli odłączymy naładowany kondensator od źródła prądu i utworzymy obwód wskazany na rys. 239, to kondensator się wyładuje. W obwodzie przebiegnie chwilowy prąd i cała energja zawarta w polu elektrycznym wytworzy pracę prądu, ta zaś ciepło Joule'a.



Rys. 239.

W kondensatorze wyładowanym pola elektrycznego niema, a więc niema też żadnego zapasu energji.

Kondensator jest zatem właściwym zbiornikiem energji elektrycznej, której siedlisko tkwi w izolatorze pomiędzy okładkami kondensatora.

Stosowane zwykle w praktyce izolatory nie są doskonałe; jakoż odbywają się w nich w mniejszym lub większym stopniu jeszcze inne przemiany energji.

Ponieważ izolator przepuszcza trochę prądu elektrycznego w ten sam sposób, jak przewodnik, powstaje w nim pewna ilość ciepła Joule'a, oczywiście kosztem pracy prądu.

Nadto powstawanie polaryzacji dielektrycznej w cząsteczkach izolatora (p. rozdz. IX) odbywa się zawsze w ten sposób, że z powodu tak zwanej histerezy dielektrycznej izolatora pewna ilość energji dostarczonej kondensatorowi przetwarza się na ciepło.

Dla dokładniejszego uprzytomnienia sobie energji pola elektrycznego wyprowadzimy dla tej energji jeszcze wzór inny.

W rozdziale IX (str. 86) dla pojemności kondensatora płaskiego znaleźliśmy wzór:

$$C = \frac{S \cdot \mathbf{k}}{4\pi \cdot d}.$$

Jeżeli więc kondensator płaski naładujemy do napięcia e, to energja w nim zawarta będzie:

$$C \cdot \frac{e^2}{2} = \frac{e^2 \cdot S \cdot \mathbf{k}}{8\pi \cdot d}.$$

Objętość izolatora w tym kondensatorze wynosi $S \cdot d$; ilość więc energji w jednym centymetrze sześciennym pola będzie:

$$\frac{e^2 \cdot S \cdot \mathbf{k}}{8\pi \cdot d \cdot S \cdot d} = \left(\frac{e}{d}\right)^2 \cdot \frac{\mathbf{k}}{8\pi}.$$

Napięcie na płytkach, czyli różnica potencjałów podzielona przez odległość płytek wyraża spadek potencjału na 1 *cm* odległości pomiędzy płytkami, jest to więc natężenie pola elektrycznego **E**.[1]) Mając to na uwadze, wyrażamy energję pola elektrycznego zawartą w jednym centymetrze sześciennym wzorem:

$$\frac{\mathbf{E}^2 \cdot \mathbf{k}}{8\pi}.$$

Ponieważ **k** jest dla wszystkich ciał większe niż dla eteru, przeto energja pola w próżni będzie przy danym natężeniu najmniejsza.

Podług tego wzoru łatwo wyznaczyć siłę wzajemnego przyciągania płytek kondensatora.

Oznaczmy tę siłę przez $-F$ i załóżmy, że za pomocą siły równej i odwrotnej płytki te rozsunięte zostały na odległość $d + dx$.

Praca wykonana przez siłę F będzie:

$$F \cdot dx.$$

Kosztem tej pracy przybędzie pewna ilość energji zawarta w tem polu, które wytworzyło się w objętości $S \cdot dx$; ilość ta wyniesie:

$$\frac{\mathbf{E}^2 \cdot \mathbf{k}}{8\pi} \cdot S \cdot dx.$$

---

[1]) Patrz rozdział IX.

Na zasadzie prawa zachowania energji otrzymamy:

$$F \cdot dx = \frac{\mathbf{E}^2 \cdot \mathbf{k}}{8\pi} \cdot S \cdot dx,$$

a więc:

$$F = \frac{\mathbf{E}^2 \cdot S}{8\pi} \cdot \mathbf{k},$$

czyli:

$$F = \frac{e^2 \cdot S}{8\pi \cdot d^2} \cdot \mathbf{k}.$$

Zestawiając otrzymane powyżej wzory z wyprowadzonemi poprzednio w rozdziale XIX dla sił magnetycznych, łatwo spostrzeżemy, że są to wyrażenia zupełnie analogiczne. Możemy więc i tutaj posiłkować się wyobrażeniem Faraday'a o siłach skracających linje i ciśnieniach, rozpychających je na boki. Znając układ linji sił elektrycznych pomiędzy rozważanemi ciałami, możemy na podstawie tych wyobrażeń przewidzieć, jakie ruchy mogą odbywać się w danym układzie.

P r z y k ł a d. Mamy kondensator, w którym powierzchnia każdej płytki wynosi 20 cm^2, napięcie pomiędzy płytami $e = 1000\ V$, a odległość pomiędzy niemi $d = 1\ mm$. Stała dialektryczna izolatora $\mathbf{k} = 2$. Obliczyć energję, zawartą w polu kondensatora i siłę, z jaką przyciągają się płytki.

Dla obliczenia energji określamy naprzód pojemność kondensatora:

$$C = \frac{S \cdot \mathbf{k}}{4\pi \cdot d} = \frac{20 \cdot 2}{4\pi \cdot 0{,}1} = 31{,}85\ cm,$$

albo:

$$\frac{31{,}85}{9 \cdot 10^{11}} \text{ faradów} = 3{,}54 \cdot 10^{-11} \text{ faradów.}$$ [1])

Energja zawarta w kondensatorze będzie:

$$C \cdot \frac{e^2}{2} = 3{,}54 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{1000^2}{2} = 1{,}77 \cdot 10^{-5} \text{ dżaulów.}$$

Siłę zaś szukaną otrzymamy ze wzoru:

$$F = \frac{e^2 \cdot S}{8\pi \cdot d^2} \cdot \mathbf{k}.$$

W tym wzorze musimy wyrazić napięcie w jednostkach bezwzględnych elektrostatycznych. Wiadomo zaś, że 1 bezwzględna jednostka elektrostatyczna wynosi 300 woltów. [1]) Wtedy:

$$F = \left(\frac{1000}{300}\right)^2 \cdot \frac{20}{8\pi \cdot (0{,}1)^2} \cdot 2 = 1770 \text{ dyn} = 1{,}805 \text{ Gr.}$$

---

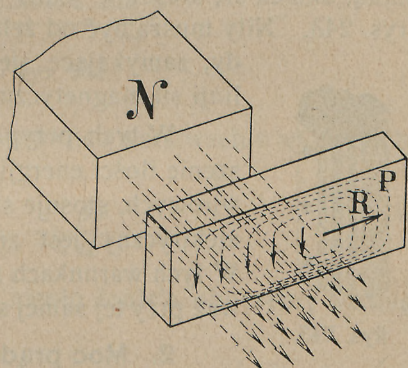
[1]) Patrz rozdział XXVII.

ROZDZIAŁ XXII.

Prądy wirowe (Foucaulta).

1. Powstawanie prądów wirowych. W praktyce technicznej bardzo ważne znaczenie posiadają prądy indukcyjne, powstające w częściach metalowych przyrządów i maszyn przy przecinaniu linji sił magnetycznych. Prądy te nie wybiegają na zewnątrz przyrządu lub maszyny, a zamykając się na drodze najkrótszej, tworzą rodzaj wirów elektrycznych i stąd nazywają się prądami wirowemi albo prądami Foucaulta, ponieważ badacz ten pierwszy je spostrzegł.

Najważniejsze są następujące dwa przypadki powstawania prądów wirowych: W polu magnetycznym mamy płytkę metalową P (rys. 240), poruszającą się w kierunku strzałki R. W tej części płytki, która znajduje się w polu magnetycznym powstanie siła elektromotoryczna skierowana na dół, jak to właśnie wskazuje rysunek. Siła ta wywoła prąd elektryczny wirowy, wskazany na rysunku.

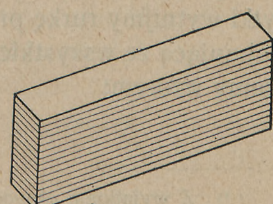


Rys. 240.

Gdyby cała płytka znajdowała się w polu magnetycznym, którego natężenie byłoby wszędzie jednakowe, to siła elektromotoryczna powstałaby w całej masie metalu wszędzie w jednakowym kierunku i o jednakowej wielkości, przeto w masie tego metalu nie istniałby ani jeden obwód zamknięty, w którym wypadkowa siła elektromotoryczna nie równałaby się zeru. Oczywiście w takich warunkach prądy wirowe nie mogłyby powstać.

Wogóle z powyższego rozważania wynika, że prądy wirowe powstają w poruszających się kawałkach metalu wtedy, gdy metal wchodzi w pole magnetyczne, lub z niego wychodzi, albo też gdy natężenie pola nie jest wszędzie jednakowe, t. j. gdy pole magnetyczne jest niejednostajne.

Zjawisko odbywa się w ten sam sposób, gdy kawałek metalu jest nieruchomy, a poruszają się linje sił magnetycznych.

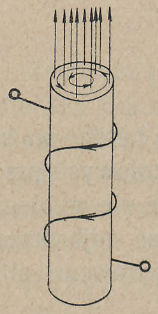

Rys. 241.

Prądy wirowe ogrzewają przewodnik, w którym przebiegają. Ciepło to w rozważanym wyżej przy-

padku powstaje z pracy mechanicznej, zużytkowanej na poruszanie płytki metalowej w polu magnetycznym.

Chcąc zmniejszyć moc prądów wirowych, należy podzielić płytkę na szereg cienkich warstw (rys 241), izolowanych jedna od drugiej. Powierzchnie rozdziału muszą być prostopadłe do kierunku sił elektromotorycznych.

Prądy wirowe powstają również w rdzeniu żelaznym zwojnicy (rys. 242), gdy w tejże przepływa prąd zmienny. Pole magnetyczne jest wtedy oczywiście również zmienne i liczba linji objętych obwodem dowolnym zamkniętym wewnątrz żelaza [1]) zmienia się, powstaje więc w nich siła elektromotoryczna indukcji oraz prąd.

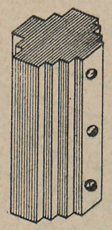


Rys. 242.

Prądy wirowe powstałe w rdzeniach, wykonanych z żelaza masywnego, mogą ogrzać je do bardzo wysokiej temperatury. Energja cieplna powstaje tu kosztem pracy prądu w zwojnicy. Obwody elektryczne w żelazie są to obwody wtórne, do których energja przenosi się z obwodu zwojnicy w sposób, wskazany w rozdziale XX.

Dla osłabienia prądów wirowych rdzenie żelazne przyrządów, w których zwojnice zasilane są przez prąd zmienny, wykonywa się z cienkich blach żelaznych, grubości od 0,3 do 0,7 *mm*.

Blachy te pokryte warstwą lakieru, lub też oklejone cienką bibułką, układa się szczelnie jedna obok drugiej i znitowuje w sposób wskazany na rys. 243. Nity muszą być od żelaza izolowane lub też tak rozłożone, aby obwody, zamykające się przez nie, miały płaszczyzny równoległe do linji sił magnetycznych.



Rys. 243.

W tych przypadkach, gdy chodzi o jak największe zmniejszenie ilości energji, przetwarzającej się w ciepło wskutek prądów wirowych, stosuje się blachę żelazną nakrzemioną, [2]) której opór elektryczny jest znacznie większy od oporu zwykłej blachy. W tych warunkach moc prądów wirowych będzie mniejsza, ponieważ przy tej samej sile elektromotorycznej przepłynie prąd słabszy.

2. Moc prądów wirowych. Moc energji, przetwarzającej się w ciepło w cienkich blachach, można wyrazić za pomocą wzoru, który daje się wyprowadzić teoretycznie.

Rozważmy przypadek następujący. Mamy kawałek blachy (rys. 244) o długości l, szerokości a i grubości d, bardzo małej w porównaniu do szerokości a. Załóżmy, że w tej blaszce przechodzi strumień magnetyczny, którego linie są równoległe do krawędzi płytki l, a indukcja magnetyczna równa się B. Wewnątrz płytki wytnijmy rurkę prostokątną o ściankach nieskończenie małej grubości dx, obejmującą ze wszystkich stron pewną wiązkę linji sił. Wiązkę tę w chwili t wyrażamy wzorem:

$$B_t \,.\, a \,.\, 2x.$$

---

[1]) Z wyjątkiem obwodów, których płaszczyzny są równoległe do linji magnetycznych.

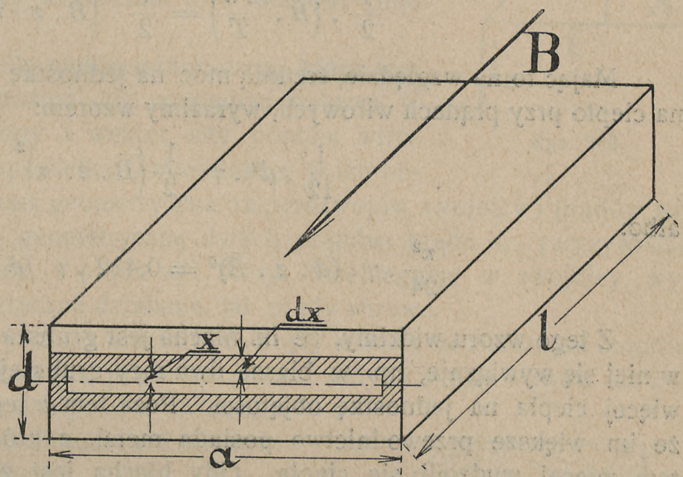
[2]) Po niemiecku: legiertes Blech.

Siła elektromotoryczna indukcji w ściankach rozważanej rurki wyniesie:

$$E_t = a \,.\, 2x \,.\, \frac{d\,B_t}{dt}\,.$$

Możemy również wyrazić wzorem przewodnictwo ścianek rurki w kierunku powyższej siły elektromotorycznej. Długość przewodnika równa się $2\,a$, o ile pominiemy części boczne, które są małe w porównaniu do $2\,a$, gdy płytka jest cienka. Przekrój poprzeczny dla prądu wirowego będzie $l\,.\,dx$; przewodnictwo właściwe metalu, z którego zrobiona jest płytka, oznaczymy przez γ i całe przewodnictwo ścianek rurki wokoło przez $d\,k$. Wtedy:

$$dk = \frac{l\,.\,dx}{2\,a}\,.\,\gamma\,.$$



Rys. 244.

Moc, zamieniającą się na ciepło Joule'a, wyrażamy wzorem:

$$e^2\,.\,k\,.$$

W danym więc razie moc prądów wirowych w dwuch warstwach o wymiarach: l, a, dx będzie:

$$E_t^2\,.\,dk = a^2\,.\,4\,x^2\,.\left(\frac{d\,B_t}{dt}\right)^2.\,\frac{l\,.\,dx}{2\,a}\,.\,\gamma\,.$$

Moc zaś zamieniającą się w całej płytce na ciepło Joule'a obliczymy według równania:

$$2\,a\,.\,l\,.\,\gamma\,.\left(\frac{d\,B_t}{dt}\right)^2\int_0^{\frac{d}{2}} x^2\,.\,dx = \frac{1}{12}\,.\,a\,.\,l\,.\,d^3\,.\,\gamma\,.\left(\frac{d\,B_t}{dt}\right)^2.$$

Objętość płytki jest $a\,.\,d\,.\,l$, zatem moc, przypadająca na jednostkę objętości, będzie:

$$\frac{1}{12}\,.\,d^2\,.\,\gamma\,.\left(\frac{d\,B_t}{dt}\right)^2.$$

Jeżeli $B_t = \overline{B}\,.\,\sin\frac{2\pi t}{T}$, to:

$$\frac{d\,B_t}{dt} = \overline{B}\,.\,\frac{2\pi}{T}\,.\,\cos\frac{2\pi t}{T}\,.$$

Maksymalna wartość $\frac{d B_t}{d t}$, jak widać z powyższego wzoru, wynosi:

$$\overline{B} \cdot \frac{2\pi}{T}.$$

Wobec tego średnia wartość $\left(\frac{d B_t}{d t}\right)^2$ będzie: [1])

$$\frac{1}{2} \cdot \left(\overline{B} \cdot \frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\overline{B} \cdot z \cdot \pi\right)^2.$$

Mając to na względzie, średnią moc na jednostkę objętości, zamieniającą się na ciepło przy prądach wirowych, wyrazimy wzorem:

$$\frac{1}{12} \cdot d^2 \cdot \gamma \cdot \frac{1}{2}\left(\overline{B} \cdot z \cdot \pi\right)^2,$$

albo:

$$\frac{\pi^2}{24} \cdot \gamma \cdot (d \cdot z \cdot \overline{B})^2 = 0{,}412 \cdot \gamma \cdot (d \cdot z \cdot \overline{B})^2.$$

Z tego wzoru widzimy, że im blacha jest grubsza, tym większa ilość ciepła w niej się wywiązuje, np. w blasze dwa razy grubszej wywiązuje się cztery razy więcej ciepła na jednostkę objętości. Poza tem z tego samego wzoru widzimy, że im większe przewodnictwo posiada metal, z którego zrobiona jest blacha, tem więcej wydzieli się ciepła. Gdy blacha jest żelazna, to γ wynosi około 10^5 mo na *cm* długości przy cm^2 przekroju. Chcąc otrzymać moc w watach, należy wyrażać siłę elektromotoryczną prądów wirowych w woltach, a w tym celu należy wyraz $\frac{d B_t}{d t}$ pomnożyć przez 10^{-8}, wtedy w ostatecznym wzorze wejdzie spółczynnik 10^{-16}.

Jeżeli uwzględnimy podane powyżej spółczynniki, to wzór, wyrażający moc energji, w watach na cm^3, która wytwarza ciepło w blasze żelaznej, będzie następujący:

$$0{,}412 \cdot 10^5 \, (d \cdot z \cdot \overline{B})^2 \cdot 10^{-16} \text{ [2])}$$

lub:

$$0{,}4 \cdot 10^{-11} \cdot (d \cdot z \cdot \overline{B})^2.$$

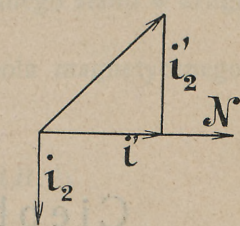
Doświadczenie potwierdza słuszność powyższego wzoru co do zależności tej mocy od d, z i $\overline{B}$, lecz spółczynnik liczbowy z doświadczeń nieraz wypada większy, jak to wskazują liczby, zaczerpnięte z praktyki i podane w rozdziale XXIV. Na ten spółczynnik wpływa rozkład indukcji magnetycznej, która nie jest w całym przekroju wszędzie jednakowa. Kształt krzywej, wyrażającej zmienność strumienia magnetycznego, również nie jest dokładnie sinusoidalny, co wprowadza czynnik nie uwzględniony w powyższym wzorze. Wreszcie chemiczne i fizyczne własności żelaza są bardzo zmienne i mają wpływ znaczny na spółczynnik γ.

---

[1]) Patrz rozdział I-szy o średniej z kwadratów wielkości zmiennych sinusoidalnie.

[2]) *d* wyrażone jest tu w *cm*.

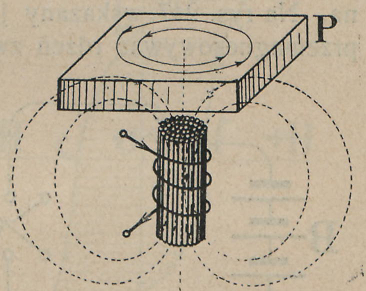
3. Wpływ prądów wirowych na pole magnetyczne zwojnicy z prądem zmiennym. Zjawisko prądów wirowych jest szczególnym przypadkiem powstawania prądów wtórnych pod wpływem zmiennych prądów w obwodzie pierwotnym. Opierając się na wywodach podanych w rozoziale XX, zastanówmy się nad zjawiskami, zachodzącemi w układzie przedstawionym na rys. 242 i stanowiącym zwojnicę nawiniętą na rdzeniu żelaznym. Jeżeli wektor N (rys. 245) wyraża strumień magnetyczny w rdzeniu, to i' stanowi prąd magnesujący.



Rys. 245.

Wektor, wyrażający siłę elektromotoryczną, która wywołuje prądy wirowe, spóźnia się względem wektora N o 90^0, z nim będzie zgodny i wektor siły prądów wirowych i_2, o ile pominiemy niewielką samoindukcję w ich obwodzie. Pole wywołuje suma geometryczna amperozwojów zwojnicy i prądów wirowych, więc i' jest sumą geometryczną dwuch prądów: prądu i_1, rzeczywiście przebiegającego w zwojnicy, i prądu i_2', który, przebiegając w zwojnicy, wywierałby takie same magnetyczne działanie, jak prądy wirowe.

Z układu wektorów wyraźnie widzimy, że prądy wirowe w znacznym stopniu zmniejszają magnesujące działanie prądu zwojnicy. Gdyby prądy wirowe nie istniały, cały prąd i_1 wytwarzałby pole, w obecności zaś prądów wirowych tylko składowa i' stanowi wypadkowy prąd magnesujący.



Rys. 246.

Na podstawie powyższych wywodów łatwo zrozumieć, że płytka metalowa, (najlepiej miedziana) (rys. 246), umieszczona nad elektromagnesem, zasilanym prądem zmiennym, zasłania w znacznym stopniu przestrzeń nad płytką od działania magnetycznego zwojnicy. Prądy wirowe, powstające w tej płytce, znacznie osłabiają strumień magnetyczny, którego linje idą do góry.

Pozatem należy jeszcze zwrócić uwagę na to, że płytka taka będzie odpychana od elektromagnesu, co wynika z działania prądów pierwotnych na wtórne, wyjaśnionego szczegółowo w rozdziale XX.

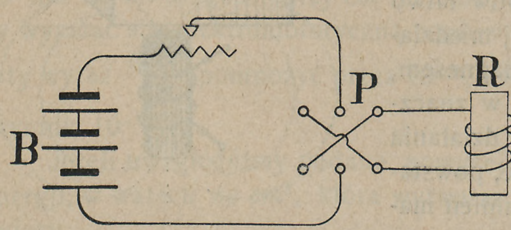
ROZDZIAŁ XXIII.

Ciepło histerezy magnetycznej.

W rozdziale XIX, przy powstawaniu energji pola magnetycznego skutkiem pracy prądu elektrycznego, podany był wzór, wyrażający pracę, zużytkowaną na wywołanie indukcji magnetycznej B w jednostce objętości pewnego ośrodka:

$$A_1 = \frac{1}{4\pi} \cdot \int_0^B H \,.\, dB,$$

gdzie A_1 — praca, H — natężenie pola magnetycznego, B — indukcja magnetyczna. Na rys. 247 wskazany jest układ przyrządów, za pomocą których możemy przemagnesowywać rdzeń zwojnicy R. B oznacza tu źródło prądu, P — przełącznik do zmiany kierunku prądu. Opornik w obwodzie służy do zmiany siły prądu.



Rys. 247.

Rozważmy przedewszystkiem przypadek, gdy rdzeń zwojnicy R nie ma zupełnie własności histerezy. Przy magnesowaniu takiego rdzenia zależność indukcji B od natężenia pola H wyraża się linją prostą (rys. 248). Aby przejść od stanu wyrażonego przez punkt O do wyrażonego przez punkt D, należy zużytkować pewną ilość pracy prądu elektrycznego.

Praca ta, jak widzieliśmy, wyrazi się całką, podaną wyżej, albo też wykreślnie — polem trójkąta ODD' (rys. 248).

Gdy następnie prąd magnesujący będziemy zmniejszali stopniowo do zera, pole magnetyczne zniknie i energja jego przetworzy się z powrotem na pracę prądu. Ilość tej energji znowu wyrażać będzie powyższa całka, tylko, że całka ta będzie teraz ujemna, ponieważ przy H dodatniem dB jest ujemne.

W podobny sposób zachodzić będzie przemiana energji przy magnesowaniu w kierunku odwrotnym. Wykreślnie zaś ilość energji, otrzymanej skutkiem pracy prądu w polu magnetycznym i odwrotnie, wytwarzanej z energji pola magnetycznego, wyrazi się tutaj polem trójkąta OCC'. Widzimy więc, że przy przemagnesowywaniu takiego ośrodka od D do C i od C do D z powrotem, w ośrodku tym nie zachodzi żadna nieodwracalna przemiana energji.

Inaczej przedstawia się ta sprawa, gdy ośrodek przemagnesowywany ma własności histerezy.

Wtedy zależność B od H przy przemagnesowywaniu kołowem wyraża się pętlicą, wskazaną na rys. 249 (p. rozdział VI, § 3).

Przemiany energji, zachodzące przy przejściu żelaza z jednego stanu w drugi w kierunku strzałki wzdłuż pętlicy będą następujące:

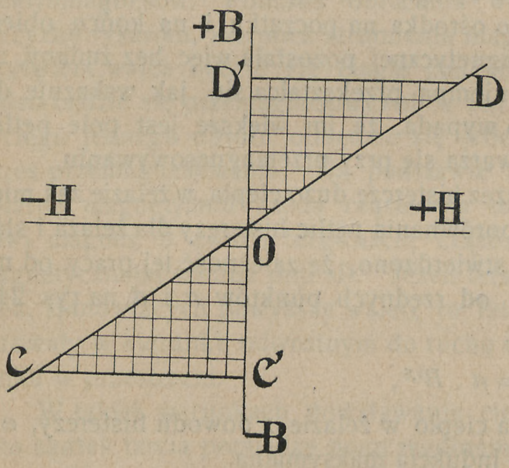
Przy rozmagnesowywaniu żelaza od a do b energja pola magnetycznego wraca do obwodu elektrycznego i wynosi:

$$A_{ab} = \frac{1}{4\pi}\int_a^b (+H)\,.\,(-dB) = -\frac{1}{4\pi}\int_a^b H\,.\,dB.\ ^{1)}$$

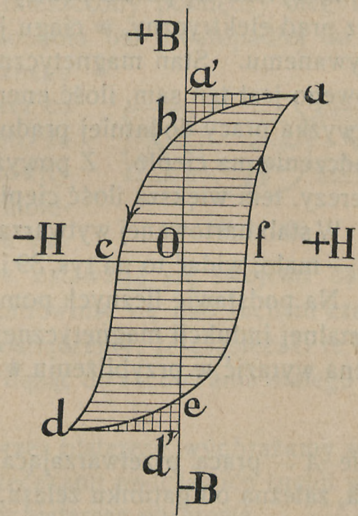
Tę ilość energji wyobraża na wykresie pole $aa'b$.

Dalej:

$$A_{bc} = \frac{1}{4\pi}\int_b^c (-H)\,.\,(-dB) = +\frac{1}{4\pi}\int_b^c H\,.\,dB,$$



Rys. 248.



Rys. 249.

gdzie A_{bc} jest to praca wyobrażona przez pole bco, a ponieważ wielkość ta jest dodatnią, przeto stanowi ona energję, dostarczoną przez prąd elektryczny.

Dalej:

$$A_{cd} = \frac{1}{4\pi}\,.\int_c^d (-H)\,.\,(-dB) = +\frac{1}{4\pi}\int_c^d H\,.\,db,$$

gdzie A_{cd} odpowiada polu $ocdd'o$; jest to również praca, dostarczona przez prąd.

---

1) H i dB oznaczają tu wartości bezwzględne odpowiednich wielkości.

Następnie:

$$A_{de} = \frac{1}{4\pi} \cdot \int_d^e (-H) \cdot (+dB) = -\frac{1}{4\pi} \cdot \int_d^e H \cdot db,$$

gdzie A_{de} odpowiada polu $dd'e$; jest to energja, powracająca z pola magnetycznego do obwodu elektrycznego.

Wreszcie:

$$A_{ef} = \frac{1}{4\pi} \cdot \int_e^f (+H) \cdot (+dB) = +\frac{1}{4\pi} \cdot \int_e^f H \cdot dB$$

$$A_{fa} = +\frac{1}{4\pi} \cdot \int_f^a H \cdot dB$$

gdzie A_{ef} odpowiada polu eof, a A_{fa} — polu $foa'a$.

Obie te prace są dodatnie, a więc dostarczone przez prąd elektryczny.

Na rys. 249 pola, wyrażające pracę dodatnią, są zakreskowane linjami poziomemi, pola zaś wyrażające pracę ujemną — linjami pionowemi. Za pomocą takiego kreskowania rysunek uwydatnia wyraźnie, że przewyżka pracy dodatniej nad ujemną wyraża się polem pętlicy histerezy; ta więc ilość pracy została dostarczona przez prąd elektryczny, w ciągu jednego obiegu kołowego, ośrodkowi przemagnesowywanemu. Stan magnetyczny tego ośrodka na początku i na końcu obiegu kołowego jest ten sam, ilość energji magnetycznej pozostała więc bez zmiany, zaś przewyżka pracy dodatniej prądu nad ujemną przekształca się, jak wskazuje doświadczenie, na ciepło. Z powyższego wypada, że im większe jest pole pętlicy histerezy, tem większa ilość ciepła wytwarza się przy przemagnesowywaniu.

W stali hartowanej wytwarza się przez histerezę dużo ciepła, w żelazie zaś miękkim — mało; widać to na rys. 39 i 40 z porównania pętlic histerezy dla żelaza i stali.

Na podstawie licznych pomiarów stwierdzono, że zależność tej pracy od maksymalnej indukcji magnetycznej (t. j. od rzędnych punktów a i d na rys. 249), można wyrazić w przybliżeniu wzorem:

$$A = a \cdot B^{1,6},$$

gdzie A — praca przetwarzająca się na ciepło w żelazie z powodu histerezy, a — stała, zależna od gatunku żelaza, B — indukcja maksymalna.

Wzór ten podany został przez Steinmetza. Nowsze badania wykazały, że, zależnie od najrozmaitszych okoliczności, wskaźnik potęgi przy B zmienia się w granicach od 1,4 do 1,8. Dla ułatwienia obliczeń, R. Richter proponuje wzór inny, oparty również na wynikach licznych doświadczeń, mianowicie:

$$A = \alpha \cdot B + \beta \cdot B^2,$$

gdzie α i β są to stałe, zależne od gatunku żelaza.

Średnio przyjąć można, że praca, wytwarzająca ciepło w ciągu jednego obiegu kołowego przemagnesowania wynosi w żelazie:

$$A = (0{,}1\ B + 30\ B^2)\ \textit{ergów}\ \text{na}\ cm^3.$$

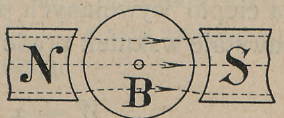
ROZDZIAŁ XXIV.

Straty energji w żelazie.

Ciepło, wytwarzające się w żelazie wskutek histerezy i prądów wirowych, prawie zawsze w praktyce elektrotechnicznej stanowi straty. Tylko w przypadkach wyjątkowych budują się przyrządy, których celem jest wyzyskanie ciepła, powstającego wskutek prądów wirowych i histerezy.

W praktyce rozróżniamy trzy przypadki wywiązywania się ciepła wskutek prądów wirowych i histerezy.

Na rys. 250 widzimy walec żelazny B, umieszczony pomiędzy biegunami elektromagnesów. Podczas obracania walca dookoła osi prostopadłej do płaszczyzny rysunku, kierunek strumienia magnetycznego względem walca będzie się ciągle zmieniał, przez co walec będzie się przemagnesowywał w ten sposób, że w ciągu jednego obrotu odbędzie się jeden całkowity okres przemagnesowania. Na podstawie teorji molekularnej magnetyzmu każda cząsteczka magnesu stanowi magnes o dwuch biegunach; cząsteczki te ustawiają się swojemi osiami magnetycznemi wzdłuż linji sił. Jeżeli teraz zastanowimy się nad ruchem cząsteczek, stanowiących powyższy walec, to łatwo spostrzeżemy, że cząsteczki te będą wirowały w kierunku odwrotnym do ruchu walca, dążąc do zachowania stałego kierunku w przestrzeni.



Rys. 250.

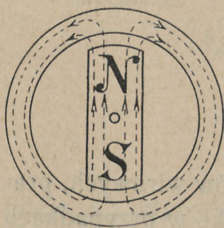
W takich warunkach powstawanie ciepła przez histerezę wyobrażamy sobie jako skutek tarcia pomiędzy poszczególnemi cząsteczkami podczas ich ruchu wirowego. Histerezę w kręcącym się walcu nazywamy histerezą obrotową.

Podczas ruchu walca w polu magnetycznym będą powstawały w nim w kierunku równoległym do osi obrotu, siły elektromotoryczne, które wywołają prądy wirowe; w celu zmniejszenia tych prądów, walec składa się zazwyczaj z kolistych blach, izolowanych od siebie. Blachy te są ułożone w ten sposób, że płaszczyzny rozdziału są prostopadłe do osi walca. Pomimo takiej budowy walca, prądy wirowe, powstające w poszczególnych blachach, wywołują straty energji, równorzędne, co do wielkości, ze stratami na histerezę.

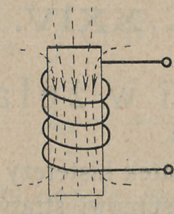
Inny przypadek widzimy na rys. 251; tutaj wewnątrz pierścienia żelaznego znajduje się magnes, który obraca się około osi, prostopadłej do płaszczyzny rysunku. W pierścieniu zewnętrznym układ linij magnetycznych ciągle się zmienia; tutaj również w ciągu jednego obrotu magnesu odbędzie się w żelazie pierścienia jeden całkowity okres przemagnesowania.

Dla zmniejszenia mocy prądów wirowych i tutaj pierścień składa się z izolowanych od siebie pierścieni blaszanych, tak że płaszczyzny podziału są prostopadłe do osi obrotu magnesu.

Rysunek 252 wskazuje przypadek trzeci, gdy w rdzeniu żelaznym, utworzonym z blach, odbywa się przemagnesowywanie pod wpływem prądu zmiennego, przebiegającego w zwojnicy. Płaszczyzny podziału rdzenia są tu również, jak w poprzednich przypadkach, równoległe do linij magnetycznych.



Rys. 251.


Rys. 252.

Celem zmniejszenia strat, wywoływanych przez histerezę, stosujemy żelazo jak najmiększe, z wązką pętlicą histerezy. By zmniejszyć straty na prądy wirowe, używamy niekiedy żelaza nakrzemionego, w którym zresztą i straty na histerezę są mniejsze, niż w żelazie zwykłym.

Szczegółowe badania omawianych tu strat doprowadzają do wniosku, że we wszystkich trzech przypadkach, przytoczonych wyżej, straty w żelazie mogą być wyrażone za pomocą wzoru, który zawiera dwa składniki: jeden, dotyczący strat na ciepło wywołanych przez histerezę, drugi zaś, dotyczący strat na ciepło, które powstaje wskutek prądów wirowych. Wzór ten jest następujący:

$$W = \alpha \cdot \frac{p}{100} \cdot \left(\frac{B}{1000}\right)^{1,6} + \beta \cdot \left(d \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{B}{1000}\right)^2,$$

gdzie W — moc w watach, przypadająca na decymetr sześcienny żelaza,

α, β — spółczynniki stałe, zależne od gatunku żelaza,

p — liczba okresów przemiany pola magnetycznego w żelazie na sekundę (okres odpowiada jednemu pełnemu obiegowi wzdłuż pętlicy histerezy, $p = {}^1/_2\, z$),

B — maksymalna indukcja magnetyczna w żelazie,

d — grubość blachy żelaznej w *mm*.

Dla blachy średniego gatunku:

$$\alpha = 0{,}8, \qquad \beta = 1{,}5 \text{ do } 2{,}5.$$

Dla blachy z żelaza nakrzemionego pewnego gatunku znaleziono następujące spółczynniki:

$$\alpha = 0{,}67,$$
$$\beta = 0{,}63.$$

Przy określaniu własności żelaza pod względem strat, powstających podczas przemagnesowywania, przyjęto za podstawę straty w 1 *kg* żelaza przy: $B = 10000$ i $p = 50$; nazwano tę liczbę **„liczbą strat"**.

Dla blachy żelaznej średniego gatunku, której grubość $d = 0{,}5$ *mm*, otrzymamy liczbę strat następującą (przyjmując wagę 1 $dm^3 = 7{,}7$ *kg*):

$$\frac{1}{7,7}\left[0,8 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{1,6} + 1,5\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10\right)^2\right] = 3,285.$$

Tablica poniższa, zaczerpnięta z Kalendarza dla elektrotechników Uppenborna na rok 1914, podaje straty w żelazie w watach na kilogram żelaza, gdy częstość przemagnesowywania wynosi 50 okresów na sekundę, a indukcja magnetyczna zmienia się według krzywej sinusoidalnej.

B.	Blacha zwykła do dynamomaszyn		Blacha mało nakrzemiona	Blacha dobrze nakrzemiona
	$d = 0,5$ *mm.*	$d = 0,35$ *mm.*	$d = 0,5$ *mm.*	$d = 0,35$ *mm.*
3 000	0,50	0,35	0,4	0,2
10 000	3,30	2,58	2,90	1,36
15 000	7,10	6,40	6,96	3,50

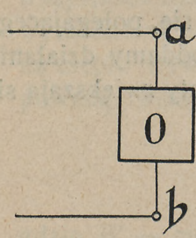
Zwykła blacha żelazna ma własność tak zwanego starzenia się, polegającego na tem, że gdy blachę, ogrzaną do temperatury około 100°, poddamy działaniu zmiennego pola magnetycznego, to po upływie 1000 godzin, straty zwiększają się o 6 do 8%. Blachy nakrzemione tej własności nie posiadają.

ROZDZIAŁ XXV.

Moc prądu zmiennego.

1. **Wzór zasadniczy.** W praktyce przy stosowaniu prądu zmiennego bardzo ważne znaczenie ma wzór na średnią moc prądu zmiennego.

Na rys. 253 mamy t. zw. odbieracz prądu elektrycznego, a więc przyrząd, w którym praca prądu elektrycznego wytwarza jakąś inną postać energji. W tym przypadku praca prądu będzie dodatnia, jeżeli prąd płynie od zacisku o potencjale wyższym do zacisku o potencjale niższym, gdy np.:



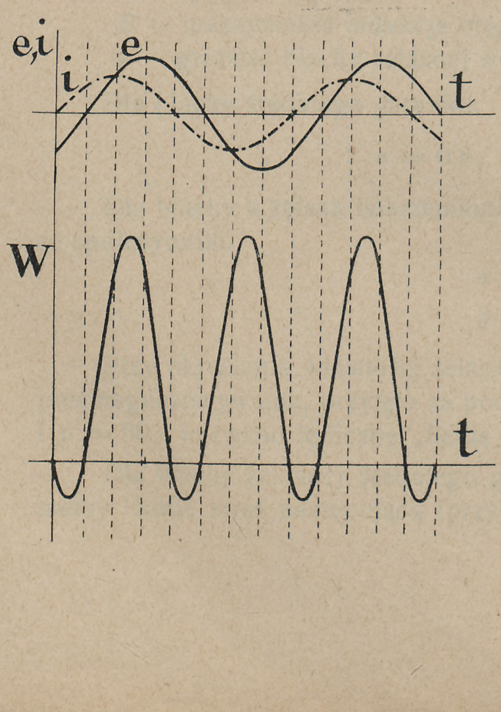
Rys. 253.

$$V_a > V_b,$$

a prąd płynie od a do b. Różnicę potencjałów $V_a - V_b$ oznaczamy przez e_t; będzie to napięcie na końcówkach przyrządu w chwili t. Prąd w chwili t oznaczamy przez i_t; wtedy moc prądu w chwili t, na podstawie określenia wielkości e_t, będzie:

$$W_t = e_t \,.\, i_t \,.$$

Gdy mamy prąd zmienny sinusoidalnie, to zależnie od okoliczności poprzednio rozważanych, e_t i i_t mogą różnić się w fazie i zależność tych wielkości od czasu wyrażoną być może za pomocą dwuch sinusoid, np. takich, jakie podane są na rys. 254.



Rys. 254.

Rys. 255.

Mnożąc dla każdej chwili e_t przez i_t, otrzymamy W_t; wyrażając zaś W_t w zależności od czasu wykreślnie, otrzymamy krzywą, wyobrażoną na rys. 255.

Z kształtu tej linji wnioskujemy, że moc jest okresowo zmienna, i okres zmian jest dwa razy krótszy od okresu zmian i_t i e_t. Położenie zaś tej linji

wskazuje, że moc jest dodatnia, gdy prąd i napięcie mają kierunki zgodne, natomiast jest ona ujemna, gdy te kierunki są sobie przeciwne.

Stąd wniosek, że przyrząd *O* jest przez chwilę odbieraczem prądu, a przez następną — generatorem, wytwarzającym pracę prądu. Praca prądu wyraża się oczywiście polem, zawartem pomiędzy krzywą *W* i osią odciętych. Praca dodatnia np. w ciągu jednego okresu, jest większa od ujemnej; możemy więc powiedzieć, że odbieracz otrzymuje pewną ilość pracy od prądu, lecz część jej zwraca.

Wzór dla krzywej mocy wyprowadzimy w sposób następujący:

Załóżmy, że napięcie wyraża się wzorem:

$$e_t = \bar{e} \,.\, \sin \frac{2\pi t}{T},$$

a prąd spóźnia się w fazie względem napięcia o kąt φ; wtedy:

$$i_t = \bar{i} \,.\, \sin \left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi\right).$$

Moc w chwili t będzie:

$$W_t = \bar{e}\,\bar{i} \,.\, \sin \frac{2\pi t}{T} \,.\, \sin \left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi\right).$$

Iloczyn sinusów można przekształcić w sposób następujący:

$$\sin \frac{2\pi t}{T} \,.\, \sin \left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi\right) = \sin^2 \frac{2\pi t}{T} \,.\, \cos \varphi - \sin \frac{2\pi t}{T} \,.\, \cos \frac{2\pi t}{T} \,.\, \sin \varphi.$$

$$\sin^2 \frac{2\pi t}{T} = \frac{1}{2}\left(1 - \cos \frac{4\pi t}{T}\right),$$

$$\sin \frac{2\pi t}{T} \,.\, \cos \frac{2\pi t}{T} = \frac{1}{2} \,.\, \sin \frac{4\pi t}{T},$$

a więc:

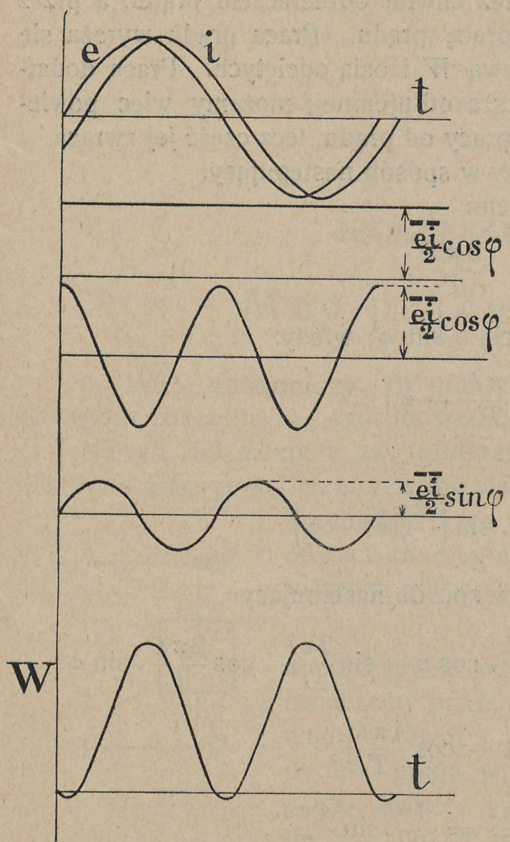
$$\sin \frac{2\pi t}{T} \,.\, \sin \left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi\right) = \frac{1}{2} \,.\, \cos \varphi - \frac{1}{2} \,.\, \cos \frac{4\pi t}{T} \,.\, \cos \varphi - \frac{1}{2} \,.\, \sin \frac{4\pi t}{T} \,.\, \sin \varphi.$$

$$W_t = \frac{1}{2}\, \bar{e}\, \bar{i} \left(\cos \varphi - \cos \varphi \,.\, \cos \frac{4\pi t}{T} - \sin \varphi \,.\, \sin \frac{4\pi t}{T}\right).$$

Z tego wzoru wynika, że rzędne krzywej mocy można uważać, jako sumę algebraiczną rzędnych trzech linij (rys. 256): prostej równoległej do osi odciętych, przeprowadzonej na odległości $\frac{\bar{e} \,.\, \bar{i} \,.\, \cos \varphi}{2}$, cosinusoidy o okresie dwa razy mniejszym od okresu prądu i napięcia, której rzędne mają wartość maksymalną $\frac{\bar{e} \,.\, \bar{i} \,.\, \cos \varphi}{2}$ i sinusoidy o tym samym okresie, której rzędne mają wartość maksymalną $\frac{\bar{e} \,.\, \bar{i} \,.\, \sin \varphi}{2}$.

Odejmując rzędne dwuch ostatnich krzywych od rzędnych pierwszej, otrzyma-

my krzywą mocy. Na rys. 256 wskazane są wszystkie te linje łącznie z krzywą mocy i krzywemi prądu i napięcia przy $\varphi = 25^0$.



Rys. 256.

Moc średnia za cały okres prądu lub napięcia będzie:

$$\frac{\bar{e}\,.\,\bar{i}\,.\cos\varphi}{2}.$$

Ponieważ wartości średnie rzędnych cosinusoidy

$$\frac{\bar{e}\,.\,\bar{i}\,.\cos\varphi}{2}\,.\cos\frac{4\,\pi\,t}{T}$$

i sinusoidy:

$$\frac{\bar{e}\,.\,\bar{i}\,.\sin\varphi}{2}\,.\sin\frac{4\,\pi\,t}{T}$$

za cały okres równają się zeru, pozostaje tylko wartość stała, wyrażona przez rzędną linji prostej.

Za pomocą wzorów rozumowanie powyższe przedstawi się w sposób następujący.

Średnia moc prądu w okresie czasu T wyrazi się wzorem:

$$W = \frac{1}{T}\,.\int_0^T W_t\;dt,$$

a więc:

$$W = \frac{1}{T}\,.\int_0^T \frac{1}{2}\,.\,\bar{e}\,.\,\bar{i}\,.\cos\varphi\,.\,dt\,. - \frac{1}{T}\,.\int_0^T \frac{1}{2}\,.\,\bar{e}\,.\,\bar{i}\,.\cos\varphi\,.\cos\frac{4\,\pi\,t}{T}\,.\,dt -$$

$$- \frac{1}{T}\,.\int_0^T \frac{1}{2}\,.\,\bar{e}\,.\,\bar{i}\,.\sin\varphi\,.\sin\frac{4\,\pi\,t}{T}\,.\,dt.$$

Z pierwszej całki wypada:

$$\frac{1}{2}\,.\,\bar{e}\,.\,\bar{i}\,.\cos\varphi,$$

z drugiej:

$$\frac{1}{T}\,.\,\frac{1}{2}\,.\,\bar{e}\,.\,\bar{i}\,.\cos\varphi\,.\left[\frac{T}{4\,\pi}\,.\sin\frac{4\,\pi\,t}{T}\right]_0^T = 0,$$

a z trzeciej:

$$\frac{1}{T}\,.\,\frac{1}{2}\,.\,\bar{e}\,.\,\bar{i}\,.\sin\varphi\,.\left[\frac{T}{4\,\pi}\,.\cos\frac{4\,\pi\,t}{T}\right]_0^T = 0$$

Ostatecznie więc:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \bar{e} \cdot \bar{i} \cdot \cos \varphi .$$

Wprowadzając wielkości czynne dla e i, zamiast maksymalnych, otrzymamy:

$$W = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot e \cdot \sqrt{2} \cdot i \cdot \cos \varphi ,$$

czyli:

$$W = e \cdot i \cdot \cos \varphi .$$

Z tego wzoru wynika, że przy $\varphi = 0$:

$$W = e \cdot i .$$

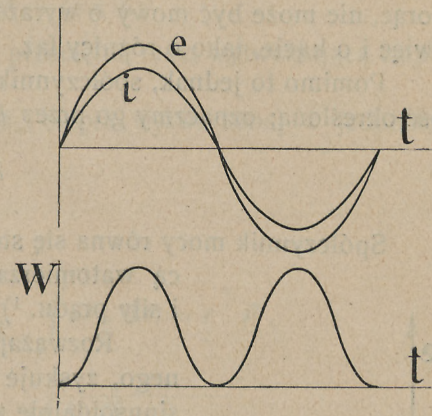
Wtedy, jak wskazuje rys. 257, krzywa mocy leży cała nad osią odciętych. Gdy zaś $\varphi = 90^0$, to $W = 0$, a wtedy krzywa mocy układa się symetrycznie względem osi odciętych (rys. 258 i 259).

Rys. 257 odpowiada temu przypadkowi, gdy mamy obwód tylko z oporem omicznym, rys. 258 — gdy mamy tylko samoindukcję, a rys. 259 — gdy mamy tylko pojemność. W tych dwuch ostatnich przypadkach żadna trwała postać energji nie powstaje skutkiem pracy prądu; energja przenosi się tylko tam i z powrotem. Jeżeli mamy np. zwojnicę z samoindukcją, to przez pewien okres czasu praca prądu wytwarza energję pola magnetycznego, a następnie energja pola magnetycznego wytwarza pracę prądu i t. d. Gdy mamy pojemność (kondensator), to tego samego rodzaju przemiany zachodzą w polu elektrycznym.

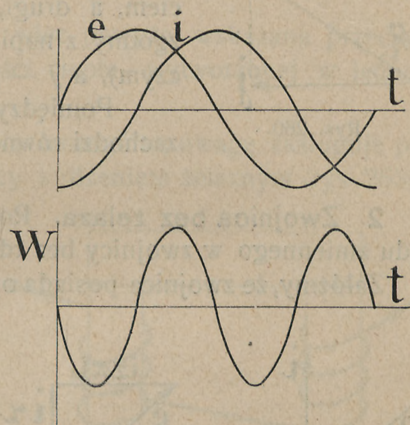
Iloczyn wartości czynnej napięcia przez wartość prądu nazywamy **mocą pozorną** prądu zmiennego i wyrażamy ten iloczyn w jednostkach, które przyjęto nazywać **woltamperami**. Stosunek zaś mocy rzeczywistej do mocy pozornej prądu nazywamy **spółczynnikiem mocy prądu**.

Z wyprowadzonego wyżej wzoru na moc prądu wynika, że spółczynnik mocy będzie $\cos \varphi$, ponieważ:

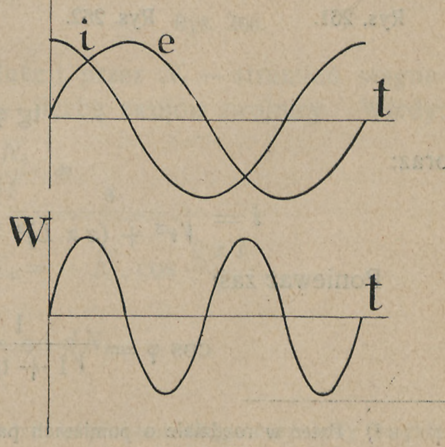
$$\cos \varphi = \frac{W}{e i} .$$



Rys. 257.



Rys. 258.



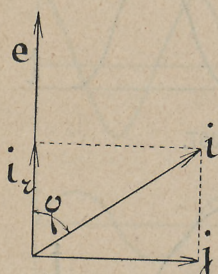
Rys. 259.

Należy jednak pamiętać, że $\cos \varphi$ ma tylko wtedy znaczenie określone, gdy prąd i napięcie zmieniają się według prawa sinusoidy; w przeciwnym razie, ściśle biorąc, nie może być mowy o wyrażeniu prądów i napięć za pomocą wektorów, a więc i o kącie, jako o różnicy faz.

Pomimo to jednak, spółczynnik mocy dla dowolnych prądów ma zawsze wartość określoną; oznaczmy go przez k.

$$k = \frac{W}{e \, . \, i} \, .$$

Spółczynnik mocy równa się stosunkowi mocy prądu, wymierzonej za pomocą watomierza do iloczynu wielkości czynnych napięcia i siły prądu. [1])



Rys. 260.

Rozważając niektóre przypadki pracy prądu elektrycznego, zyskuje się pewną dogodność przez rozłożenie prądu sinusoidalnie zmiennego na dwa prądy również sinusoidalnie zmienne (rys. 260), z których jeden jest zgodny z napięciem, a drugi, przesunięty względem niego o 90°. Prąd zgodny z napięciem i_r nazywamy prądem czynnym (roboczym), a j — prądem jałowym.

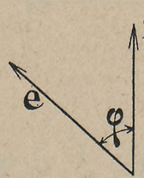
Pomiędzy mocą prądu całego a mocą prądu czynnego zachodzi równość:

$$e i \cos \varphi = e i_r \, .$$

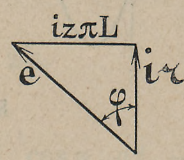
2. Zwojnica bez żelaza. Rozważmy jeszcze szczegółowo przeciętną moc prądu zmiennego w zwojnicy bez rdzenia żelaznego.

Załóżmy, że zwojnica posiada opór omiczny r, a spółczynnik samoindukcji L. Napięcie na końcówkach ab niech będzie e, prąd — i, liczba zmian prądu na sekundę — z; otóż wiemy z poprzedniego, że moc W prądu, dopływającego do zwojnicy, wynosi:

$$e i \cos \varphi \, .$$



Rys. 261.



Rys. 262.

Przy układzie wektorów, wskazanym na rys. 261 i 262: [2])

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{z \pi L}{r} \, ,$$

oraz:

$$i = \frac{e}{\sqrt{r^2 + (z \pi L)^2}} \, , \quad \text{a stąd: } e = i \, . \sqrt{r^2 + (z \pi L)^2} \, .$$

Ponieważ zaś:

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + (z \pi L)^2}} \, ,$$

---

[1]) Patrz w rozdziale o pomiarach paragraf o mierzeniu mocy prądu.
[2]) Patrz rozdział XIII § 5.

przeto:

$$W = i \cdot \sqrt{r^2 + (z\pi L)^2} \cdot i \cdot \frac{r}{\sqrt{r^2 + (z\pi L)^2}} \cdot = i^2 r.$$

Łatwo przekonać się, że ten wzór wyraża przeciętną moc, wytwarzającą ciepło Joule'a w drucie zwojnicy.

Moc prądu w chwiii t, równoważna ilości ciepła, wytworzonej w jednostce czasu, jak wiadomo wynosi:

$$i_t^2 \cdot r.$$

Przeciętna moc za okres T będzie zatem:

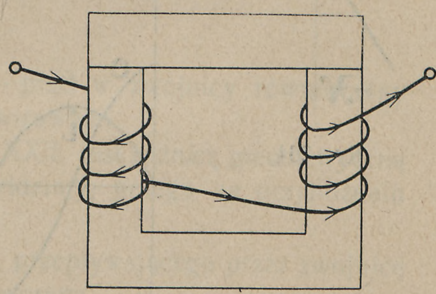
$$W = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T i_t^2 \cdot r \cdot dt = r \cdot \frac{1}{T} \cdot \int_0^T i_t^2 \cdot dt = r \cdot i^2.$$

$$i^2 = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T i_t^2 \cdot dt, \quad i = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i_t^2 \cdot dt}.$$

Wielkość i jest czynną wartością prądu, więc powyżej wskazana przeciętna moc prądu w zwojnicy jest równoważna ilości ciepła, wytworzonej w jednostce czasu.

3. **Zwojnica z rdzeniem żelaznym**. Na szczególną uwagę zasługuje prąd elektryczny zmienny, przepływający w zwojnicy z rdzeniem żelaznym (rys. 263). [1])

Prąd ten pod wpływem histerezy przejawiającej się w żelazie ma krzywą znacznie odkształconą.



Rys. 263.

Załóżmy, że napięcie na końcówkach zwojnicy zmienia się ściśle podług prawa sinusoidy i że opór omiczny zwojnicy jest tak mały, że można go pominąć; wtedy napięcie na końcówkach zwojnicy równa się sile elektromotorycznej samoindukcji ze znakiem odwrotnym.

Oznaczmy następnie przez e_t napięcie, przez E_{st} — siłę elektromotoryczną samoindukcji, przez N_t — strumień magnetyczny w rdzeniu żelaznym zwojnicy, przez n — liczbę zwojów zwojnicy. Wtedy:

$$e_t = -E_{st} = \frac{dN_t}{dt} \cdot n,$$

załóżmy, że:

$$e_t = \bar{e} \cdot \cos\frac{2\pi t}{T}, \text{ a więc i } E_{st} = -\bar{E} \cdot \cos\frac{2\pi t}{T},$$

skąd:

$$\bar{E}_s \cdot \cos\frac{2\pi t}{T} \cdot dt = n \cdot dN_t.$$

[1]) Taką zwojnicę z rdzeniem żelaznym w obwodzie prądu zmiennego nazywamy zwykle dławikiem.

Całkując to równanie i zakładając stałą przy całkowaniu równą zeru, otrzymamy:

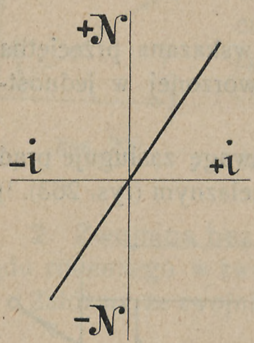
$$n \,.\, N_t = \overline{E}_s \, \frac{T}{2\pi} \,.\, \sin \frac{2\pi t}{T} \,.$$

Strumień N_t zmienia się więc według sinusoidy.

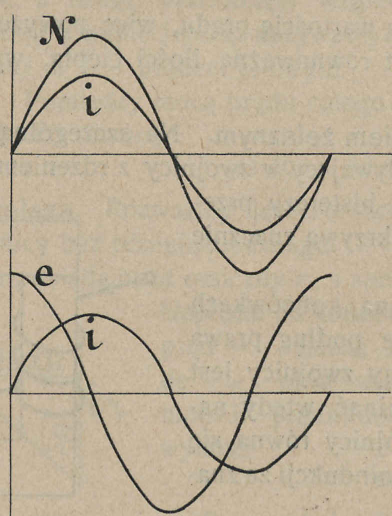
Mając krzywą zmienności strumienia magnetycznego, łatwo określimy zmienność prądu. Gdyby przenikliwość magnetyczna żelaza, z którego zrobiony jest rdzeń dławika, była wielkością stałą, to we wzorze:

$$N = \frac{1{,}25\, n i}{\mathbf{R}} \;{}^{1)}$$

spółczynnik $\frac{1{,}25\, n}{\mathbf{R}}$ byłby wielkością stałą, i zależność N od i można byłoby przedstawić za pomocą wykresu (rys. 264). Stosownie do tego wykresu układ krzywych strumienia magnetycznego i prądu w zależności od czasu przedstawiłby się tak, jak wskazano na rys. 265, a napięcia i prądu tak, jak na rys. 266. W rzeczywistości jednak rdzeń żelazny posiada własność histerezy i zależność N od i znajdziemy na podstawie rozumowania następującego. Krzywa histeresy (rys. 37) przedstawia zależność B od H, lecz $N = a \,.\, B$, a $H = b \,.\, i$, gdzie a i b są to stałe spółczynniki, gdy więc zmienimy odpowiednio skalę spółrzędnych na rys. 37, otrzymamy krzywą (rys. 267), wyrażającą zależność strumienia magnetycznego od prądu.



Rys. 264.



Rys. 265 i 266.

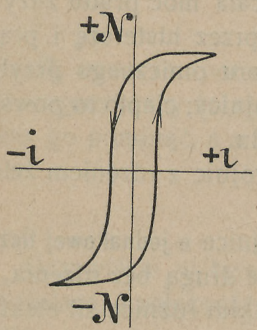
Posiłkując się krzywą histerezy (rys. 267) i zakładając, że krzywa zmienności strumienia jest dana, znajdziemy dla każdej chwili siłę prądu, odpowiadającą każdorazowej wartości strumienia magnetycznego. W ten sposób na. rys 268 wykreślona została krzywa prądu i przy założeniu, że krzywa N jest sinusoidą.

Z tego rysunku widzimy, że krzywa i nie jest sinusoidą, jednak kształt części dodatnich i ujemnych jest symetryczny, a okres taki sam, jak i okres zmienności strumienia magnetycznego; prąd wyprzedza nieco strumień magnetyczny.

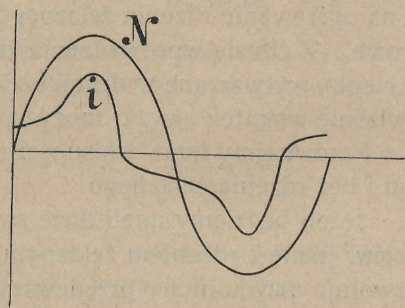
---

1) Patrz rozdział VII.

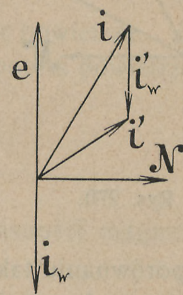
Poza histerezą, na prąd w dławiku mają wpływ jeszcze prądy wirowe w rdzeniu żelaznym. Dla zdania sobie sprawy z ich wpływu chociaż w przybliżeniu, załóżmy, że prąd wytwarzający strumień magnetyczny N w rdzeniu żelaznym można wyrazić za pomocą tak zwanej sinusoidy równoważnej; ta sinusoida ma wartość czynną taką samą, jak rzeczywista krzywa prądu, a różnica faz pomiędzy nią a stru-



Rys. 267.



Rys. 268.



Rys. 269.

mieniem magnetycznym wynosi tyle, że iloczyn napięcia na zwojnicy przez rzut prądu magnesującego na kierunek napięcia wyraża straty energji na ciepło z powodu histerezy.

Na rys. 269 wykreślone są wektory N, i', e, i_w, i. Napięcie e na końcówkach zwojnicy jest prostopadłe do N, gdyż:

$$e = -E_s.$$

i_w — odpowiada prądom wirowym, [1]) i'_w — prąd w zwojnicy równoważny pod względem działania magnetycznego prądom wirowym.

Prąd w zwojnicy i, jak wiemy z rozdziału XXII, jest różnicą gieometryczną prądów i' i i_w. Wpływ prądów wirowych, jak widzimy, polega na przybliżeniu wektora prądu do wektora napięcia.

Celem wyrażenia mocy prądu elektrycznego, przepływającego przez zwojnicę z rdzeniem żelaznym, posługujemy się zwykłym wzorem:

$$w = e \cdot i \cdot \cos \varphi,$$

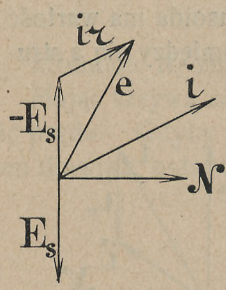
gdzie e oznacza wartość czynną napięcia na końcówkach zwojnicy, i — wartość czynną prądu w zwojnicy, a φ — kąt, wyrażający różnicę faz pomiędzy sinusoidą napięcia i równoważną sinusoidą prądu. Sinusoidą równoważną jest tu sinusoida, której wartość czynna równa się wartości czynnej linji krzywej prądu, a kąt φ określa się przez stosunek mocy rzeczywistej w do pozornej $e \cdot i$.

W poprzednich wywodach nie braliśmy pod uwagę oporu omicznego zwojnicy. Wpływ tego oporu polega na tem, że napięcie na końcówkach zwojnicy jest większe od siły elektromotorycznej i wyraża się wzorem:

$$e_t = i_t\, r - E_{st}.$$

[1]) Patrz rozdział XXII § 3.

Z tego wzoru dla wartości e_t w danej chwili wynika, że napięcie czynne znajdziemy dodając wektorowo, ir do $-E_s$ (rys. 270). Widzimy, że napięcie będzie tu większe i mniej odchylone od prądu, niż przy zwojnicy bez oporu omicznego. Wpłynie to na powiększenie mocy prądu: $e \cdot i \cdot \cos\varphi$.

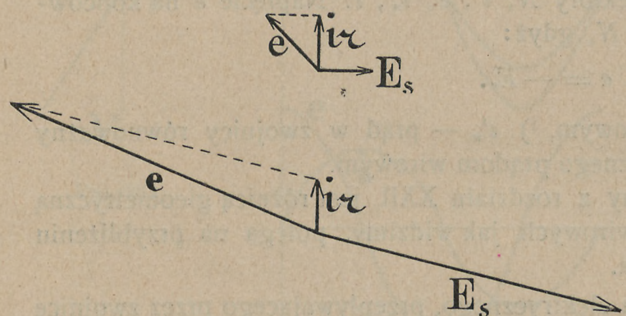


Rys. 270.

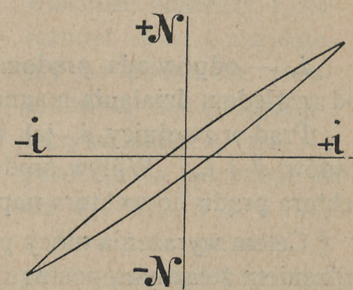
Gdy oporu omicznego niema, cała moc prądu zużywa się na ogrzewanie rdzenia żelaznego przez histerezę i prądy wirowe. Z chwilą wprowadzenia oporu omicznego przybywa ciepło, wytwarzane w drutach zwojnicy; ciepło to powstaje właśnie wskutek zwyżki mocy prądu.

Porównajmy teraz własności zwojnic z rdzeniem żelaznym i bez rdzenia żelaznego.

Jeżeli będziemy mieli dwie zwojnice **o jednakowej liczbie zwojów**, jednę z rdzeniem żelaznym, a drugą bez rdzenia, to przy porównaniu takich zwojnic uwydatni się przedewszystkim różnica sił elektromotorycznych samoindukcji. Załóżmy, że prądy w obu zwojnicach będą jednakowe, to strumień magnetyczny w zwojnicy z rdzeniem żelaznym będzie znacznie większy od strumienia magnetycznego w zwojnicy bez rdzenia, a skutkiem tego układy wektórów przy jednakowych oporach omicznych zwojnic będą takie, jak widzimy na rys. 271 dla zwojnicy bez rdzenia i na rys. 272 dla zwojnicy z rdzeniem. W tym drugim przypadku napięcie na końcówkach zwojnicy jest znacznie większe.



Rys. 271 i 272.



Rys. 273.

Wreszcie należy jeszcze zwrócić uwagę na to, że wpływ histerezy na kształt prądu zwojnicy uwydatnia się najsilniej wtedy, gdy obwód magnetyczny jest doskonały i linje magnetyczne przebiegają całkowicie w żelazie. Im większą część obwodu stanowi powietrze, tym bardziej pętlica histerezy zwęża się i wydłuża (rys. 273), staje się ona wreszcie dokładnie linją prostą wtedy, gdy cały obwód magnetyczny jest w powietrzu. Z tego względu w zwojnicach, mających tylko prosty rdzeń żelazny (rys. 252), kształt krzywej prądu różni się bardzo mało od sinusoidy.

Niewiele także różni się od sinusoidy kształt krzywej prądu nawet w dławiku

(rys. 274), gdzie obwód magnetyczny jest prawie zamknięty, o ile szczelina powietrzna wynosi 1 *mm* lub więcej.

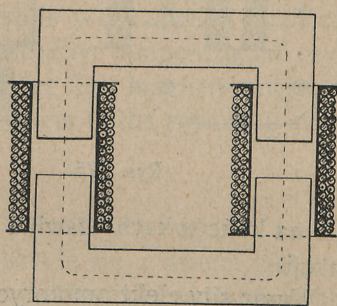
Tę własność zwojnic z niedoskonałemi obwodami magnetycznemi, można udowodnić teoretycznie wzorem dla strumienia magnetycznego (patrz rozdz. VII § 4):

$$N = \frac{1{,}25 \cdot ni}{\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2},$$

gdzie $\mathfrak{R}_1$ oznacza opór magnetyczny żelaza, a $\mathfrak{R}_2$ — takiż opór powietrza. Jeżeli opór magnetyczny żelaza jest bardzo mały w porównaniu z oporem powietrza, to można go pominąć, a wtedy:

$$N = \frac{1{,}25 \cdot ni}{\mathfrak{R}_2}.$$

Oczywiście w tym wzorze N zupełnie nie zależy od własności magnetycznych żelaza, a zależność N od i wyraża się linją prostą.



Rys. 274.

Dla przykładu obliczmy opór obwodu magnetycznego wskazanego na rys. 274. Załóżmy, że długość średniej linji magnetycznej w żelazie wynosi $l = 40$ *cm*, w powietrzu $\delta = 2$ *cm* [1]; przekrój strumienia magnetycznego w żelazie przyjmiemy wszędzie za jednakowy, mianowicie $S = 25$ *cm*². Przenikliwość magnetyczna żelaza przy indukcji około 6000 jednostek bezwzględnych wynosi $\mu = 4000$. Wtedy opór magnetyczny żelaza będzie:

$$\frac{l}{q \cdot \mu} = \frac{40}{25 \cdot 4000} = 0{,}0004,$$

a opór powietrza:

$$\frac{\delta}{q \cdot \mu} = \frac{2}{25 \cdot 1} = 0{,}08.$$

Opór żelaza stanowi zatem w tym przypadku pół procentu w stosunku do oporu powietrza.

4. Przykład obliczenia prądu w zwojnicy z rdzeniem żelaznym. W zastosowaniu praktycznym najważniejsze znaczenie mają dwa następujące przypadki.

Opór omiczny zwojnic jest mały, natomiast dużo jest żelaza przy wysokiej indukcji magnetycznej, a więc są duże straty na histerezę i prądy wirowe. Np. z doświadczenia wiemy, że dławik przy 110 *V* napięcia zabiera prąd 0,64 *A* (przy 50 okresach na sekundę), a moc prądu, pochłaniana przez dławik, wynosi 30 *W*, opór zwojów — 0,622 Ω.

[1]) Szczelina powietrzna o szerokości 1 *cm* z każdej strony.

Moc prądu, wytwarzająca ciepło w zwojnicy, wynosi:

$$0{,}622 \,.\, 0{,}64^2 = 0{,}255 \text{ wata.}$$

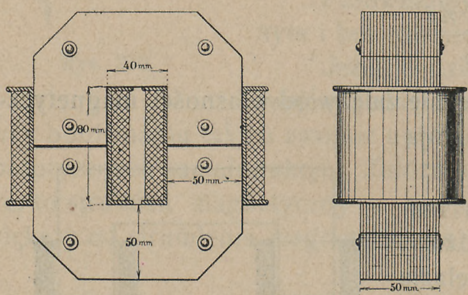
Moc wytwarzająca ciepło w żelazie, wynosi:

$$30 - 0{,}255 = 29{,}745 \text{ wata.}$$

Spadek napięcia w zwojnicy:

$$0{,}64 \times 0{,}622 = 0{,}397 \text{ wolta.}$$

Spróbujmy teraz obliczyć siłę prądu w dławiku na podstawie danych konstrukcyjnych tego przyrządu (rys. 275).



Rys. 275.

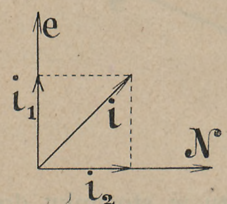
Wymiary rdzenia są wskazane na rysunku; waga żelaza wynosi 7 *kg*. Obie zwojnice mają łącznie 254 zwoje.

Obliczmy prąd przy napięciu 110 woltów. W tym celu zwróćmy uwagę, że w takim dławiku będzie mały spadek napięcia w zwojnicy z powodu oporu omicznego (z doświadczenia wypadło 0,397 wolta wobec 110 *V*).

Wtedy układ wektorów przedstawi się tak, jak wskazano na rys. 276 i napięcie na końcówkach dławika będzie się równało sile elektromotorycznej samoindukcji.

Wyraz siły elektromotorycznej samoindukcji jest następujący:

$$E_{st} = -\frac{dN}{dt} \,.\, n.$$



Rys. 276.

(n — liczba zwojów zwojnic magnesujących).

Jeżeli $N = \overline{N} \,.\, \sin \frac{2\pi t}{T}$, to

$$E_{st} = -\frac{2\pi}{T} \,.\, \overline{N} \,.\, n \,.\, \cos \frac{2\pi t}{T},$$

a więc:

$$\overline{E_s} = z\pi \overline{N} \,.\, n,$$

a wartość czynna:

$$E = z\pi \frac{\overline{N}}{\sqrt{2}} \,.\, n = 2{,}22 \,.\, z\overline{N} \,.\, n.$$

Ponieważ $e = E$, zatem:

$$e = 2{,}22\, z\, \overline{N} \,.\, n \,.\, 10^{-8} \text{ wolt.}$$

Z tego wzoru obliczamy $\overline{N}$.

$$\overline{N} = \frac{110 \,.\, 10^8}{2{,}22 \,.\, 100 \,.\, 254} = 193000.$$

Przekrój rdzenia wynosi $5 \times 5 = 25\, cm^2$, w tym jest pewien procent papieru

izolującego blaszki żelazne między sobą. Z praktyki wiadomo, że można przyjmować przekrój żelaza za 0,8 ogólnego przekroju rdzenia, indukcję więc magnetyczną w żelazie obliczymy ze wzoru:

$$\overline{B} = \frac{193000}{25 \,.\, 0{,}8},$$

stąd:

$$\overline{B} = 9660.$$

Mając $\overline{B}$, obliczymy prądy jałowy i roboczy i_1 i i_2, na które rozkłada się całkowity prąd i.

Prąd jałowy jest w fazie ze strumieniem magnetycznym, obliczymy go więc w przybliżeniu, przyjmując, że iloczyn prądu jałowego przez liczbę zwojów zwojnicy stanowi amperozwoje, wywołujące w rozważanym obwodzie magnetycznym wiadomy strumień magnetyczny.

Z rozważania krzywych magnetyzmu (patrz rys. 63) wynika, że dla wywołania w blachach żelaznych indukcji magnetycznej, wynoszącej 9660 jednostek, na 1 *cm* średniej linji indukcji, potrzeba około 3,5 amperozwojów. Ponieważ 9660 jest to indukcja maksymalna, więc i amperozwoje w ten sposób wyznaczone odpowiadają prądowi maksymalnemu; chcąc więc obliczyć amperozwoje czynne, należy 3,5 podzielić przez $\sqrt{2}$. Cała długość średniej linji magnetycznej w żelazie, jak widać z rysunku 275, wynosi około 40 *cm*, zatem liczba czynnych amperozwojów będzie następująca:

$$\frac{3{,}5 \times 40}{\sqrt{2}} = 99.$$

Pozatym należy uwzględnić, że rdzeń żelazny składa się z dwuch części, które stykają się pomiędzy sobą w środku zwojnic, lecz styki te nie są nigdy zupełnie szczelne. Z praktyki wiadomo, że na każdy taki styk należy liczyć tyle amperozwojów, ile ich potrzeba dla przeprowadzenia linji przez warstwę powietrza, której grubość wynosi 0,005 *cm*, a więc na dwa styki należy liczyć 0,01 *cm*.

Liczbę potrzebnych amperozwojów czynnych obliczymy ze wzoru: [1])

$$n' i = 0{,}8 \, \frac{\overline{B}}{\sqrt{2}} \,.\, \delta,$$

$$n' i = 0{,}8 \, \frac{9660}{\sqrt{2}} \,.\, 0{,}01 = \infty 55.$$

Ogólna liczba amperozwojów będzie:

$$99 + 55 = 154.$$

Liczba zwojów w zwojnicy wynosi 254, zatem prąd jałowy będzie:

$$i_2 = \frac{154}{254} = 0{,}607.$$

Prąd roboczy znajdziemy w sposób następujący. Wiadomo, że przy maksymalnej indukcji w żelazie — 9660 straty w żelazie wynoszą około 3,5 wata na kilogram, [2]) więc na 7 *kg* żelaza wypadnie:

$$3{,}5 \,.\, 7 = 24{,}5 \; W.$$

---

[1]) Patrz rozdział VII § 6.
[2]) Patrz rozdział XXIV.

A stąd prąd roboczy:

$$i_1 = \frac{24,5}{110} = 0,223\ A.$$

Z rys. 276 widzimy, że cały prąd dławika znajdziemy w sposób następujący:

$$i = \sqrt{i_1^2 + i_2^2} = 0,646,$$

$$\cos\varphi = \frac{i_1}{i} = \frac{0,223}{0,646} = 0,345.$$

Na zasadzie wyników pomiarów można obliczyć $\cos\varphi$ ze wzoru:

$$e\,i \cos\varphi = w,$$

$$\cos\varphi = \frac{w}{e\,i}.$$

Ponieważ z pomiarów wypadło, że $w = 30$, $e = 110$, $i = 0,64$, więc:

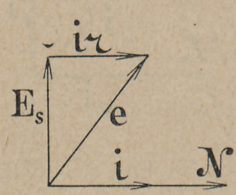
$$\cos\varphi = \frac{30}{110\,.\,0,64} = 0,426.$$

Zestawiając wyniki obliczeń z wynikami pomiarów, widzimy, że prąd obliczony bardzo mało różni się od zmierzonego, natomiast $\cos\varphi$ obliczony wypada znacznie mniejszy od otrzymanego z pomiarów; pochodzi to bezwątpienia stąd, że niedokładnie znamy własności żelaza, użytego do budowy rdzenia dławika.

Drugi przypadek zachodzi, gdy mamy zwojnicę z dość cienkim rdzeniem żelaznym, i gdy drut zwojnicy ma znaczny opór, co się zwykle zdarza przy elektromagnesach, służących do poruszania jakichś mechanizmów; wtedy można zazwyczaj pominąć w rozważaniu moc, pochłoniętą na ciepło w żelazie.

Chcąc np. obliczyć siłę prądu, należy wiedzieć liczbę zwojów zwojnic, opór zwojnic i opór obwodu magnetycznego, a także przekrój rdzenia.

Układ wektorów będzie wtedy taki, jak na rys. 277, ponieważ przyczyn odchylających N od i nie uwzględniamy.



Rys. 277.

Dla określenia i mamy równania następujące:

$$e^2 = (i\,.\,r)^2 + E_s^2,$$

$$n i = 0,8\,.\,\frac{\overline{B}}{\sqrt{2}}\,.\,\delta,$$

$$E_s = 2,22\,.\,z\,.\,\overline{B}\,.\,S\,.\,n.$$

Pisząc te równania, założyliśmy, że opór obwodu magnetycznego stanowi tylko powietrze, którego grubość warstwy wynosi δ. Przez S oznaczyliśmy przekrój rdzenia żelaznego.

W tych trzech równaniach są trzy niewiadome: i, E_s i $\overline{B}$, łatwo więc z tych równań wyznaczyć i.

ROZDZIAŁ XXVI.

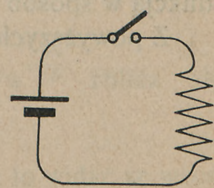
Powstawanie i znikanie prądów: ciągłe i oscylacyjne.[1]

1. Obwód z oporem omicznym. Gdy obwód pozbawiony samoindukcji i pojemności (rys. 278) zamkniemy, to prąd osiągnie **odrazu** swą maksymalną wartość, zależną od wielkości siły elektromotorycznej ogniwa E i oporu omicznego obwodu R.

Prąd w każdej chwili będzie:

$$i = \frac{E}{R}.$$

Wielkość jego, jak to widzimy ze wzoru, nie zależy od czasu.



Rys. 278.

2. Obwód z oporem omicznym i samoindukcją. Przypadek omówiony w § 1 jest idealny; w praktyce obwód zawsze ma pewną pojemność i samoindukcję (rys. 279). Pojemność wprawdzie jest częstokroć mała, można ją więc pominąć, koniecznie jednak trzeba uwzględniać samoindukcję.

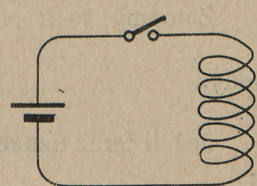
Oznaczmy siłę elektromotoryczną samoindukcji przez E_s, a spółczynnik samoindukcji — przez L; wtedy:

$$i_t = \frac{E + E_{st}}{r},$$

$$E_{st} = -L \cdot \frac{di_t}{dt},$$

a więc:

$$i_t = \frac{E - L \cdot \frac{di_t}{dt}}{r}.$$



Rys. 279.

Z tych wzorów wypada, że przy powstawaniu prądu w obwodzie po zamknięciu wyłącznika, prąd nie może osiągnąć odrazu wielkości:

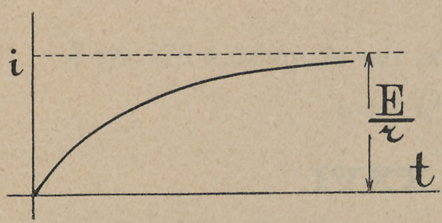
$$\frac{E}{r},$$

ponieważ przy wzmaganiu się prądu powstaje siła elektromotoryczna samoindukcji, skierowana przeciwko prądowi.

---

[1]) Szczegóły patrz w książce F. Badella i A. C. Crehore'a: „Theorie der Wachselströme". (Oryginał tej książki jest pisany po angielsku).

Doświadczenie poucza, że zależność prądu od czasu wyraża się krzywą, która ma kształt wskazany na rys. 280; jest to krzywa tak zwana logarytmiczna, zbliżająca się asymptotycznie do prostej, poprowadzonej na odległości $\frac{E}{r}$ od osi odciętych. Prąd osiąga więc dokładnie wartość $\frac{E}{r}$ dopiero po upływie nieskończenie długiego czasu.



Rys. 280.

W obwodach, najczęściej spotykanych w praktyce, wielkość prądu już po upływie bardzo drobnej części sekundy różni się nieznacznie tylko od wielkości $\frac{E}{r}$.

Teoretycznie zależność siły prądu od czasu da się znaleźć w obwodach z samoindukcją w sposób następujący:

Z powyższych równań mamy:

$$i_t \,.\, r = E - L \,.\, \frac{d i_t}{d t},$$

$$L \,.\, \frac{d i_t}{d t} = E - i_t \,.\, r,$$

$$r \,.\, \frac{d i_t}{E - i_t \,.\, r} = r \,.\, \frac{d t}{L}.$$

Całkując to równanie, otrzymamy:

$$-\operatorname{logn}(E - i_t \,.\, r) = \frac{r \,.\, t}{L} + k,$$

gdzie k — dowolna wielkość stała.

Załóżmy, że $k = -\operatorname{logn} K$,

wtedy:
$$\operatorname{logn}(E - i_t \,.\, r) - \operatorname{logn} K = -\frac{r \,.\, t}{L}.$$

Jeżeli teraz oznaczymy zasadę logarytmów naturalnych przez ε, (epsylon), to:

$$\frac{E - i_t \,.\, r}{K} = \varepsilon^{-\frac{rt}{L}},$$

stąd:

$$i_t = \frac{E}{r} - \frac{K}{r} \,.\, \varepsilon^{-\frac{rt}{L}} \quad \text{. . . . . (a)}$$

Jest to równanie ogólne, wyrażające zależność prądu od czasu:

Jeżeli rozważamy prąd powstający, to przy $t = 0$, $i_t = 0$. Podstawiając te wartości dla t i i_t w równanie prądu (a), otrzymamy:

$$0 = \frac{E}{r} - \frac{K}{r},$$

więc:

$$K = E.$$

Podstawiając tę wartość dla K, w równanie prądu (a), otrzymamy:

$$i_t = \frac{E}{r}\left(1 - \varepsilon^{-\frac{rt}{L}}\right).$$

Przy $t = 0$, $\varepsilon^{-\frac{rt}{L}} = 1$; wraz z czasem wielkość ta stopniowo zmniejsza się i przy $t = \infty$, $\varepsilon^{-\frac{rt}{L}}$ równa się 0, wtedy:

$$i_t = \frac{E}{r}.$$

Prędkość, z jaką prąd wzrasta, zależy od spółczynnika:

$$\frac{r}{L}.$$

Im r jest większe, a L mniejsze, tym prędzej wartość $\varepsilon^{-\frac{rt}{L}}$ zbliża się do zera, tym prędzej więc zwiększa się prąd.

Spółczynnik $\frac{r}{L}$ nazywa się **stałą czasu**; zależy on, jak to widać ze wzoru, od własności obwodu elektrycznego; dlatego też mówimy zwykle o stałej czasu dla danego obwodu elektrycznego.

Przykład. $E = 1{,}5\ V$, $r = 1\ \Omega$, $L = 0{,}1\ H$. Obliczmy czas, po upływie którego prąd będzie miał siłę równającą się połowie największej siły, jaka ustaliłaby się po upływie czasu nieskończenie długiego.

Stosownie do zadania prąd ma być

$$i = \frac{1}{2} \cdot \frac{1{,}5}{1} = 0{,}75\ A,$$

$$\frac{r}{L} = \frac{1}{0{,}1} = 10.$$

$$0{,}75 = 1{,}5\,(1 - \varepsilon^{-10t}),$$

stąd:

$$t = 0{,}0694 \text{ sekundy.}$$ [1]

Obliczmy jeszcze przy tych samych danych, jaką część ustalonego prądu (1,5 A) wyniesie siła prądu po upływie 0,5 sekundy. Otóż:

$$i_t = \frac{E}{r}\left(1 - \varepsilon^{-10 \cdot 0{,}5}\right) = \frac{E}{r} \cdot 0{,}99327.$$

Tym sposobem po upływie pół sekundy od chwili zamknięcia obwodu siła prądu będzie się różniła od tej siły, jaka ustaliłaby się po upływie czasu nieskończenie długiego, o 0,673 procentu.

---

[1] $\varepsilon = 2{,}718\ldots$

Przy przerywaniu prądu zmiana prądu w czasie zależy przedewszystkim od tego, w jaki sposób odbywa się przerywanie połączenia w wyłączniku, t. j. w jaki sposób zmienia się opór kontaktu, [1]) przez rozłączenie którego przerywa się obwód. Gdyby kontakt można było rozłączyć raptownie, tak, że opór jego od małej części oma powiększyłby się odrazu, do nieskończoności, to prąd byłby przerwany w jednej chwili, raptownie. W rzeczywistości jednak ścisłość styku osłabia się zawsze stopniowo, a nadto powstaje tu jeszcze iskra albo tak zwany łuk pomiędzy rozsuwającemi się powierzchniami. Iskra i łuk stanowią strumień rozżarzonych gazów i pary, jaka tworzy się z rozsuwających się powierzchni przewodników. W tych warunkach opór w miejscu przerwy zwiększa się oczywiście stopniowo i odpowiednio do tego słabnie siła prądu.

Przy zmniejszaniu się siły prądu w obwodzie powstaje siła elektromotoryczna samoindukcji zgodna z prądem, która dodaje się do siły elektromotorycznej źródła prądu i może wywołać bardzo znaczne napięcie pomiędzy rozsuwającymi się w kontakcie powierzchniami.

Oznaczmy przez E siłę elektromotoryczną źródła prądu, przez E_{st} — siłę elektromotoryczną samoindukcji, przez i_t — siłę prądu, przez r — opór obwodu, a przez R — opór w kontakcie, który zaczynamy przerywać. Na zasadzie prawa Ohma możemy napisać:

$$i_t = \frac{E + E_{st}}{r + R},$$

$$i_t \,.\, r + i_t \,.\, R = E + E_{st}.$$

Przy przerywanin prądu jest taka chwila, gdy R staje się znacznie większe od r, wtedy w przybliżeniu:

$$i_t R = E + E_{st}.$$

Iloczyn $i_t R$ jest napięciem między rozsuwanemi powierzchniami kontaktu. Wypada więc, że to napięcie równa się sumie sił elektromotorycznych źródła prądu i samoindukcji. Przy znacznej samoindukcji suma ta może być wiele razy większą od siły elektromotorycznej źródła prądu. Jest to, tak zwana, zwyżka napięcia przy przerywaniu prądu w obwodzie z samoindukcją. Za pomocą wzorów można wyjaśnić przebieg zjawiska przerywania prądu w sposób następujący.

Załóżmy, że opór obwodu r, w którym płynie narazie stały prąd J został zwiększony o R; wtedy cały opór obwodu będzie $r + R$.

Po wprowadzeniu oporu dodatkowego R prąd stopniowo będzie się zmniejszał. Stosując do tego przypadku równanie (a) str. 248, otrzymamy:

$$i_t = \frac{E}{r + R} - \frac{K}{r + R} \,.\, \varepsilon^{-\frac{(r+R)\,.\,t}{L}}.$$

Ponieważ przy $t = 0$, $i_t = J$, przeto:

$$J = \frac{E}{r + R} - \frac{K}{r + R},$$

[1]) „Kontakt“ znaczy styk, zetknięcie.

i stąd:

$$K = E - J \,.\, (r + R).$$

Na zasadzie prawa Ohma:

$$E = J \,.\, r,$$

więc:

$$K = - J \,.\, R.$$

Wprowadzając tę wartość dla K w równanie prądu, otrzymamy:

$$i_t = \frac{E}{r+R} + \frac{J \,.\, R}{r+R} \,.\, \varepsilon^{-\frac{(r+R)\,.\,t}{L}},$$

albo, uwzględniając, że $E = Jr$:

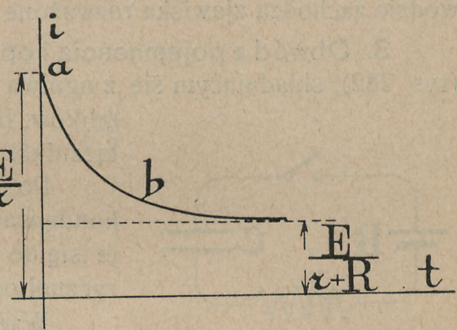
$$i_t = \frac{E}{r+R}\left(1 + \frac{R}{r} \,.\, \varepsilon^{-\frac{(r+R)\,.\,t}{L}}\right).$$

Jest to oczywiście wzór krzywej ab (rys. 281), która jest asymptotyczną do prostej równoległej do osi odciętych, przeprowadzonej na odległości $\frac{E}{r+R}$.

Wzór ten ma szczególną wartość ze względu na to, że daje możność obliczenia siły elektromotorycznej samoindukcji, powstającej w tym przypadku.

Siła elektromotoryczna samoindukcji będzie:

$$E_{st} = - L \,.\, \frac{d i_t}{d t}.$$



Rys. 281.

Różniczkując wzór dla i_t, otrzymamy:

$$E_{st} = L \,.\, \frac{J \,.\, R}{r+R} \,.\, \frac{r+R}{L} \,.\, \varepsilon^{-\frac{(r+R)\,.\,t}{L}}.$$

a więc:

$$E_{st} = J \,.\, R \,.\, \varepsilon^{-\frac{(r+R)}{L}\,.\,t},$$

albo też podstawiając $J = \frac{E}{r}$:

$$E_{st} = E\,\frac{R}{r} \,.\, \varepsilon^{-\frac{(r+R)}{L}\,.\,t}.$$

Na początku zmiennego okresu prądu przy $t = o$, E_{st} będzie oczywiście największe; podstawiając w powyższe równanie zero zamiast t, otrzymamy:

$$E_{s0} = E\,\frac{R}{r}.$$

Tym sposobem siła elektromotoryczna samoindukcji w pierwszej chwili będzie tyle razy większa od siły elektromotorycznej źródła prądu, ile razy opór dodatkowy jest większy od pierwotnego oporu obwodu.

Podobna siła elektromotoryczna powstaje też ozywiście przy zupełnym przerywaniu obwodu, i wtedy może ona stać się bardzo znaczna. Wielka siła elektromotoryczna samoindukcji będzie trwać tym dłużej, im większy jest spółczynnik samoindukcji obwodu. Wynika to z równania dla E_{st}.

Można obliczyć czas t_1, po upływie którego wielkość siły elektromotorycznej samoindukcji będzie wynosiła połowę jej największej wartości. Załóżmy, że $E_{st} = \frac{1}{2} E \frac{R}{r}$, wtedy:

$$\frac{1}{2} = \varepsilon^{-\frac{r+R}{L} \cdot t_1},$$

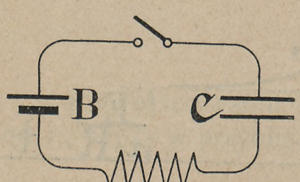
a logarytmując to równanie, otrzymamy:

$$t_1 = -\frac{\log \frac{1}{2}}{\log \varepsilon} \cdot \frac{L}{r+R} = 0{,}69 \frac{L}{r+R}.$$

Wzór ten wskazuje, że t_1 jest proporcjonalne do L.

Wielkość napięcia w miejscu przerwy obwodu nieraz zależy jeszcze w znacznym stopniu od pojemności różnych części obwodu, skutkiem tego, że w tym obwodzie zachodzą zjawiska rozważone w paragrafach następnych.

3. **Obwód z pojemnością i oporem omicznym.** Rozważmy prąd w obwodzie (rys. 282), składającym się z ogniwa galwanicznego B, kondensatora C, przewodników, łączących źródło prądu z kondensatorem i wyłącznika.



Rys. 282.

Po zamknięciu wyłącznika prąd będzie ładował kondensator aż do chwili, kiedy kondensator naładuje się do napięcia, równającego się sile elektromotorycznej ogniwa B.

Wzór, wyrażający zależność siły prądu od czasu, znajdziemy przez rozumowanie następujące:

Oznaczmy opór omiczny całego obwodu przez R, pojemność kondensatora przez C, siłę elektromotoryczną ogniwa przez E, siłę elektromotoryczną kondensatora przez E_c, napięcie na kondensatorze przez e_c, prąd w obwodzie przez i_t, a ilość elektryczności zebranej na każdej z okładek kondensatora przez q_t.

Wtedy:

$$i_t = \frac{dq_t}{dt},$$

$$e_{ct} = \frac{q_t}{C},$$

$$E_{ct} = -e_{ct} = -\frac{q_t}{C},$$

$$i_t \cdot R = E + E_{ct},$$

a więc:

$$\frac{dq_t}{dt} \cdot R = E - \frac{q_t}{C},$$

$$-\frac{1}{C} \cdot \frac{dq_t}{E - \frac{q_t}{C}} = -\frac{dt}{R.C}.$$

Całkując to równanie, otrzymamy:

$$\operatorname{logn}\left(E - \frac{q_t}{C}\right) = - \frac{t}{R \cdot C} + k.$$

Zakładając $k = \operatorname{logn} K$, otrzymamy:

$$\operatorname{logn}\left(E - \frac{q_t}{C}\right) - \operatorname{logn} K = - \frac{t}{R \cdot C},$$

$$\operatorname{logn} \frac{E - \frac{q_t}{C}}{K} = - \frac{t}{R \cdot C},$$

$$\frac{E - \frac{q_t}{C}}{K} = \varepsilon^{-\frac{t}{R \cdot C}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(b)}$$

W chwili $t = 0$, $q_t = 0$, zatem:

$$\frac{E}{K} = 1,$$

a więc:

$$K = E,$$

$$\frac{E - \frac{q_t}{C}}{E} = \varepsilon^{-\frac{t}{R \cdot C}}.$$

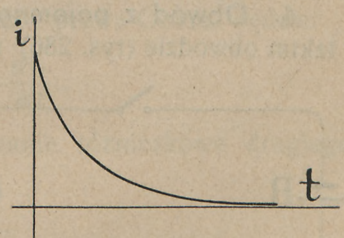
Tym sposobem:

$$q_t = E \cdot C\left(1 - \varepsilon^{-\frac{t}{R \cdot C}}\right),$$

a prąd:

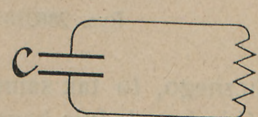
$$i_t = \frac{d q_t}{d t} = \frac{E}{R} \varepsilon^{-\frac{t}{R \cdot C}}.$$

Krzywa, wyrażająca zależność prądu ładującego od czasu, będzie miała kształt przedstawiony na rys. 283; zbliża się ona asymptotycznie do osi t, a przy $t = o$, $i_o = \frac{E}{R}$.



Rys. 283.

Łącząc okładki naładowanego kondensatora obwodem o oporze R, wyładujemy go przez ten opór (rys. 284).



Rys. 284.

Zmienność prądu wyładowującego wyrazi się wzorem, który łatwo otrzymamy ze wzoru (b), zakładając $E = 0$ [1]). Z tego wzoru wynika, że:

$$\frac{- \frac{q_t}{C}}{K} = \varepsilon^{-\frac{t}{R \cdot C}}.$$

---

[1]) Jeżeli porównamy rys. 282 i 284, łatwo spostrzeżemy, że gdy siła elektromotoryczna ogniwa równa się zeru, obwód rysunku 282 przekształca się w obwód rysunku 284.

Jeżeli rozważamy wyładowanie, to w chwili $t = 0$, mamy kondensator naładowany ilością elektryczności wynoszącą np. Q na każdej okładce.

Wtedy:

$$q_0 = Q,$$

$$\frac{-\frac{Q}{C}}{K} = 1,$$

czyli:

$$K = -\frac{Q}{C}.$$

Wtedy:

$$\frac{\frac{q_t}{C}}{\frac{Q}{C}} = \varepsilon^{-\frac{t}{R.C}},$$

$$q_t = Q \,.\, \varepsilon^{-\frac{t}{R\,C}},$$

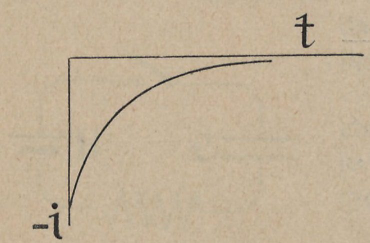
$$i_t = \frac{d q_t}{dt} = -Q \,.\, \frac{1}{R\,.\,C} \,.\, \varepsilon^{-\frac{t}{R.C}}.$$

a ponieważ:

$$Q = e_c \,.\, C,$$

przeto:

$$i_t = -\frac{e_c}{R} \,.\, \varepsilon^{-\frac{t}{RC}}.$$

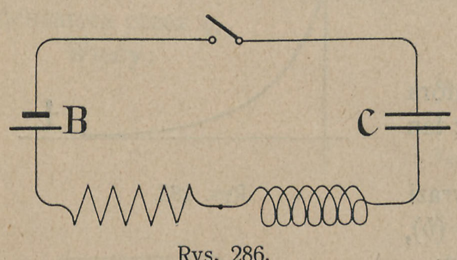


Rys. 285.

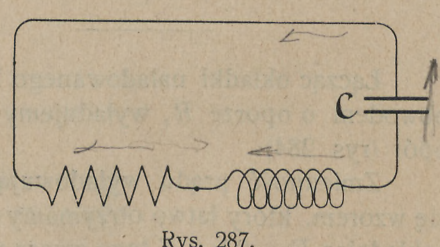
Prąd wyładowujący wyrazi się krzywą, wskazaną na rys. 285, z którego widać, że jest to krzywa, zupełnie symetryczna do wskazanej na rys. 283. W pierwszej chwili siła prądu będzie:

$$i_t = -\frac{e_c}{R}.$$

4. Obwód z pojemnością, oporem omicznym i samoindukcją. Jeżeli w takim obwodzie (rys. 286) mamy źródło prądu stałego w postaci ogniwa galwanicznego, to tak samo jak poprzednio (§ 3) prąd będzie przebiegał tylko dotąd dopóki nie naładuje kondensatora.



Rys. 286.



Rys. 287.

Podobnież przy wyładowywaniu kondensatora, przez obwód wskazany na rys. 287, będzie płynął chwilowo prąd wyładowujący. Charakter zmienności prądu wyładowującego będzie taki sam jak prądu ładującego. W pierwszym przypadku

(rys. 286) w obwodzie będą czynne trzy siły elektromotoryczne E — siła elektromotoryczna źródła prądu, E_s — samoindukcji, E_c — pojemności. Wzór prawa Ohma będzie wtedy następujący:

$$i_t \, . \, R_t = E + E_{ct} + E_{st}.$$

Wielkości E_{ct} i E_{st} można wyrazić jak następuje:

$$E_{ct} = -e_{ct} = -\frac{q_t}{C} = -\frac{\int i_t \, . \, dt}{C},$$

$$E_{st} = -L \, . \, \frac{di_t}{dt},$$

a więc:

$$i_t \, . \, R = E - \frac{\int i_t \, . \, dt}{C} - L \, . \, \frac{di_t}{dt}.$$

Różniczkując to równanie względem t, otrzymamy równanie różniczkowe drugiego rzędu:

$$L \, . \, \frac{d^2 i_t}{dt^2} + R \, . \, \frac{di_t}{dt} + \frac{i_t}{C} = 0.$$

W drugim przypadku, gdy kondensator wyładowuje się (rys. 287), mamy tylko dwie siły elektromotoryczne: E_{st} i E_{ct}. Siła elektromotoryczna samoindukcji wyraża się tym samym wzorem jak poprzednio. Siła zaś elektromotoryczna kondensatora zależy od ładunku, który pozostał w chwili t na okładkach kondensatora, kierunek jej jest zgodny z prądem. Oznaczmy ilość elektryczności na każdej z okładek kondensatora przed wyładowaniem przez Q, to po upływie pewnego czasu na okładkach kondensatora będziemy mieli ładunek:

$$Q - \int i_t \, . \, dt,$$

a przeto:

$$E_{ct} = \frac{Q - \int i_t \, . \, dt}{C}.$$

Równanie, wyrażające zmienność prądu na zasadzie prawa Ohma, będzie:

$$i_t \, . \, R = \frac{Q - \int i_t \, . \, dt}{C} - L \, . \, \frac{di_t}{at}.$$

Różniczkując je względem t, otrzymamy równanie różniczkowe drugiego rzędu:

$$L \, . \, \frac{d^2 i_t}{dt} + R \, . \, \frac{di_t}{dt} + \frac{i_t}{C} = 0,$$

zupełnie takie samo jak dla prądu ładującego kondensator.

Temu równaniu różniczkowemu czyni zadość rozwiązanie:

$$i_t = A \, . \, \varepsilon^{kt},$$

A i k—czynniki stałe.

Podstawiając wyraz dla i_t w równanie różniczkowe, otrzymamy: [1])

[1]) $\frac{di_t}{dt} = A \, . \, k \, . \, \varepsilon^{kt}, \quad \frac{d^2 i_t}{dt^2} = A \, . \, k^2 \, . \, \varepsilon^{kt}.$

$$k^2 + \frac{R}{L} \cdot k + \frac{1}{L \cdot C} = 0.$$

Rozwiązując to równanie względem k, otrzymamy:

$$k = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - 4\frac{L}{C}}}{2L} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(a)}$$

Jeżeli dwa pierwiastki powyższego równania oznaczymy przez: k_1 i k_2, to równaniu różniczkowemu będą czynić zadość dwie funkcje:

$$i'_t = A_1 \cdot \varepsilon^{k_1 t},$$
$$i_t'' = A_2 \cdot \varepsilon^{k_2 t}.$$

Ogólne rozwiązanie równania różniczkowego otrzymamy, biorąc sumę powyższych funkcji:

$$i_t = A_1 \cdot \varepsilon^{k_1 t} + A_2 \cdot \varepsilon^{k_2 t} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(b)}$$

Dla wyznaczenia stałych spółczynników A_1 i A_2, ze wzoru siły prądu wyprowadzimy wzór ilości elektryczności wyładowanej z kondensatora. Oznaczmy tę ilość przez q_t, wtedy:

$$q_t = \int_0^t i_t \cdot dt,$$

$$q_t = \left(\frac{A_1}{k_1} \cdot \varepsilon^{k_1 \cdot t} + \frac{A_2}{k_2} \cdot \varepsilon^{k_2 \cdot t}\right) - \left(\frac{A_1}{k_1} + \frac{A_2}{k_2}\right) \quad \ldots\ldots \quad \text{(c)}$$

Załóżmy, że w chwili $t=0$, $i_t=0$, a po upływie nieskończenie długiego czasu $q_t = Q$; Q jest to ładunek na okładkach kondensatora w chwili $t = 0$; po upływie nieskończenie długiego czasu ładunek ten wyładowuje się.

Przy $t = 0$, z równania (b) będziemy mieli:

$$A_1 + A_2 = 0.$$

Przy $t = \infty$, uwzględniając, że k_1 i k_2 są wielkości ujemne [1]), z równania (c) otrzymamy:

$$-Q = \frac{A_1}{k_1} + \frac{A_2}{k_2}.$$

Z tych dwuch równań wynika, że:

$$A_1 = \frac{Q}{\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1}},$$

$$A_2 = \frac{Q}{\frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}}.$$

[1]) Patrz wyraz (a).

Wzór, wyrażający prąd i_t, przybiera różną postać zależnie od wartości oporu omicznego w obwodzie w porównaniu z wielkością samoindukcji i pojemności.

Gdy w wyrazie (a) $R^2 > 4\frac{L}{C}$, wzór dla prądu ma postać (b) i dalej uproszczony być nie może.

Gdy $R^2 = 4\frac{L}{C}$, wyraz (a) dla k ma tylko jedną wartość, wtedy ogólne rozwiązanie równania różniczkowego ma inną postać:

$$i_t = A_1 \,.\, \varepsilon^{k.t} + A_2 \,.\, t \,.\, \varepsilon^{k.t}.$$

Całkując to równanie w granicach od 0 do t, otrzymamy wzór na ilość elektryczności q_t, wyładowanej z kondensatora w czasie od 0 do t.

$$q_t = (A_3 \,.\, \varepsilon^{k.t} + A_4 \,.\, t \,.\, \varepsilon^{k.t}) - A_3 .$$

A_3 i A_4 — nowe stałe spółczynniki.

Uwzględniając, że k jest ujemne i zakładając, że przy $t = \infty$, $q_t = Q$, otrzymamy: [1])

$$A_3 = -Q,$$

$$q_t = (-Q \,.\, \varepsilon^{k.t} + A_4 \,.\, t \,.\, \varepsilon^{k.t}) + Q.$$

Z tego wzoru wyznaczymy z powrotem wzór dla i_t:

$$i_t = \frac{dq_t}{dt},$$

$$i_t = (A_4 - Q \,.\, k)\, \varepsilon^{k.t} + A_4 \,.\, k \,.\, t \,.\, \varepsilon^{k.t}.$$

Przy $t = 0$, $i_t = 0$, więc:

$$A_4 - Q \,.\, k = 0,$$

$$A_4 = Q \,.\, k,$$

a wzór dla prądu będzie:

$$i_t = Q \,.\, k^2 \,.\, t \,.\, \varepsilon^{k.t}.$$

Ze wzoru (a), przy $R^2 = 4\frac{L}{C}$:

$$k = -\frac{R}{2L},$$

a według założenia:

$$R^2 = 4\frac{L}{C},$$

podstawiając te dwa wyrazy we wzór dla i_t, otrzymamy:

$$i_t = \frac{Q}{C \,.\, L} \,.\, t \,.\, \varepsilon^{-\frac{R.t}{2L}}.$$

[1]) Wyraz $A_4 \,.\, t \,.\, \varepsilon^{kt}$ przy $k < 0$ i $t = \infty$ równa się zeru, ponieważ rozwijając ε^{kt} w szereg łatwo spostrzedz, że t pozostaje tylko w mianowniku.

Wreszcie może być jeszcze trzeci przypadek, gdy $R^2 < 4\frac{L}{C}$, wtedy wielkość k [wzór (a)] staje się urojoną. Można jednak za pomocą odpowiednich przekształceń matematycznych otrzymać dla prądu i w tym przypadku wyraz rzeczywisty. Ogólne rozwiązanie równania różniczkowego pozostaje w tym przypadku takie jak przy $R^2 > 4.\frac{L}{C}$:

$$i_t = A_1 \,.\, \varepsilon^{k_1 . t} + A_2 \,.\, \varepsilon^{k_2 . t}.$$

Przekształćmy przedewszystkiem wyraz (a) dla k:

$$k = -\frac{R}{2L} \pm \frac{\sqrt{R^2 - 4\frac{L}{C}}}{2L} = -\frac{R}{2L} \pm \frac{\sqrt{4\frac{L}{C} - R^2}}{2L} \,.\, \sqrt{-1}\,.$$

Wprowadźmy następnie oznaczenia:

$$\sqrt{-1} = j,$$

$$\frac{\sqrt{4\frac{L}{C} - R^2}}{2L} \,.\, t = \alpha \,. \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{(d)}$$

gdzie α jest liczbą oderwaną.[1])

Wprowadzając te oznaczenia we wzór prądu, otrzymamy:

$$i_t = \varepsilon^{-\frac{Rt}{2L}} \left(A_1 \,.\, \varepsilon^{\alpha j} + A_2 \,.\, \varepsilon^{-\alpha j} \right).$$

Na podstawie szeregu Maclaurina łatwo wyrazić część wzoru zawartą w nawiasach za pomocą sinusa i cosinusa kąta, którego wielkość wynosi α:

$$A_1 \,.\, \varepsilon^{\alpha j} + A_2 \,.\, \varepsilon^{-\alpha j} = (A_1 + A_2) \,.\, \cos\alpha + j \,.\, (A_1 - A_2) \sin\alpha.$$

Wprowadźmy oznaczenia:

$$A_1 + A_2 = K_1,$$

$$A_1 - A_2 = -j \,.\, K_2,$$

wtedy:

$$A_1 \,.\, \varepsilon^{\alpha j} + A_2 \,.\, \varepsilon^{-\alpha j} = K_1 \,.\, \cos\alpha + K_2 \,.\, \sin\alpha.$$

Sumę cosinusoidy i sinusoidy można wyrazić za pomocą sinusoidy[2]), a więc:

$$A_1 \,.\, \varepsilon^{\alpha j} + A_2 \,.\, \varepsilon^{-\alpha j} = B \,.\, \sin(\alpha + \varphi),$$

jeżeli:

$$B = \sqrt{K_1^2 + K_2^2}, \quad \text{a } \operatorname{tg}\varphi = \frac{K_1}{K_2}.$$

[1]) Wypada to z wymiarów dla L, R i C patrz rozdział XXVII.

[2]) Patrz rozdział XIII § 5.

Rzeczywisty wyraz dla prądu będzie ostatecznie:

$$i_t = B \,.\, \varepsilon^{-\frac{Rt}{2L}} \,.\, \sin(\alpha + \varphi),$$

albo, jeżeli wprowadzimy oznaczenie:

$$\alpha = \frac{2\pi t}{T} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(e)}$$

$$i_t = B \,.\, \varepsilon^{-\frac{Rt}{2L}} \,.\, \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right).$$

Wyznaczmy teraz stałe czynniki B i φ.

Przy $t = 0$, $i_t = 0$, więc:

$$0 = B \,.\, \sin\varphi.$$

B nie może być równe zeru, ponieważ w takim razie prąd zawsze byłby równy zeru, przeto:

$$\sin\varphi = 0,$$

a zatem może być $\varphi = 0$ i

$$i_t = B \,.\, \varepsilon^{-\frac{Rt}{2L}} \,.\, \sin\frac{2\pi t}{T} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(f)}$$

Dla wyznaczenia B znajdujemy wzór na ilość elektryczności wyładowanej w ciągu czasu t.

$$q_t = \int_0^t i_t \,.\, dt.$$

$$q_t = B' \,.\, \varepsilon^{-\frac{Rt}{2L}} \,.\, \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi'\right) - B' \,.\, \sin\varphi'.$$

B' — nowy stały spółczynnik.

Założmy, że przy $t = \infty$, $q_t = Q$, wtedy:

$$-Q = B' \,.\, \sin\varphi',$$

$$B' = -\frac{Q}{\sin\varphi'}.$$

Przechodząc z powrotem od ilości elektryczności do prądu, otrzymamy:

$$i_t = \frac{dq_t}{dt},$$

$$i_t = \frac{Q \,.\, \varepsilon^{-\frac{Rt}{2L}}}{\sin\varphi'}\left[\frac{R}{2L} \,.\, \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi'\right) - \frac{2\pi}{T} \,.\, \cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi'\right)\right]. \quad \ldots \quad \text{(g)}$$

Przy $t = 0$, $i_t = 0$, przeto:

$$\frac{R}{2L} \,.\, \sin\varphi' - \frac{2\pi}{T} \,.\, \cos\varphi' = 0,$$

stąd:

$$\operatorname{tang} \varphi' = \frac{\frac{2\pi}{T}}{\frac{R}{2L}},$$

$$\sin \varphi' = \frac{\frac{2\pi}{T}}{\sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{4\pi^2}{T^2}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(h)}$$

Wyrażając różnicę sinusoidy i cosinusoidy przez sinusoidę, wzór (g) przekształcimy na:

$$i_t = \frac{Q \cdot \varepsilon^{-\frac{Rt}{2L}} \cdot \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{4\pi^2}{T^2}}}{\sin \varphi'} \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi''\right).$$

Zestawiając ten wzór ze wzorem (f) na stronie 259, otrzymamy:

$$B = \frac{Q \cdot \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{4\pi^2}{T^2}}}{\sin \varphi'}, \text{ a } \varphi'' = 0.$$

Wprowadzając wartość dla $\sin \varphi'$ ze wzoru (h), otrzymamy:

$$B = \frac{Q \cdot \left(\frac{R^2}{4L^2} + \frac{4\pi^2}{T^2}\right)}{\frac{2\pi}{T}}.$$

Według wzorów (d) na stronie 258 i (e) na stronie 259

$$\frac{2\pi}{T} = \frac{\sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}}{2L} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(l)}$$

Wprowadzając ten wyraz do poprzedniego wzoru, otrzymamy:

$$B = \frac{2 \cdot Q}{\sqrt{4L \cdot C - R^2 \cdot C^2}}.$$

Ostateczny więc wyraz prądu będzie:

$$i_t = \frac{2 \cdot Q}{\sqrt{4L \cdot C - R^2 \cdot C^2}} \cdot \varepsilon^{-\frac{Rt}{2L}} \cdot \sin \frac{2\pi t}{T}.$$

Okres zmienności tego prądu T, wyraża się, jak widać ze wzoru (l), wzorem:

$$T = 4\pi \frac{L \cdot C}{\sqrt{4L \cdot C - R^2 \cdot C^2}}.$$

Zestawimy teraz wyniki powyższych rozumowań.

Gdy $R^2 > \frac{4L}{C}$:

$$i_t = A_1 \,.\, \varepsilon^{k_1 . t} + A_2 \,.\, \varepsilon^{k_2 . t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{I}$$

$$k_1 = \frac{-R^2 + \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}}{2L},$$

$$k_2 = \frac{-R^2 - \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}}{2L},$$

$$A_1 = \frac{Q}{\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1}},$$

$$A_2 = -\frac{Q}{\frac{1}{k_2} - \frac{1}{k_1}}.$$

Przy $R^2 = \frac{4L}{C}$:

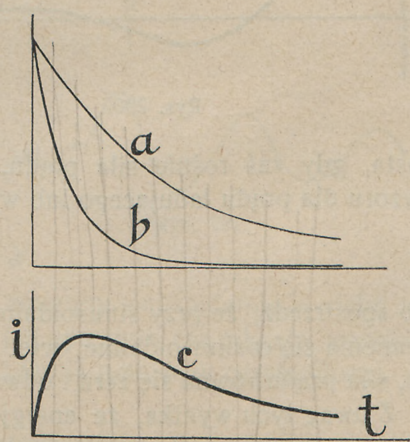
$$i_t = \frac{Q}{C \,.\, L} \,.\, t \,.\, \varepsilon^{-\frac{R . t}{2L}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{II}$$

Ten przypadek nazywa się często przypadkiem najszybszego wyładowania.

Przy $R^2 < \frac{4L}{C}$:

$$i_t = \frac{2Q}{\sqrt{4L \,.\, C - R^2 \,.\, C^2}} \,.\, \varepsilon^{-\frac{R . t}{2L}} \,.\, \sin \frac{2\pi t}{T} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{III}$$

$$T = 4\pi \frac{L \,.\, C}{\sqrt{4L \,.\, C - R^2 \,.\, C^2}}.$$



Rys. 288.

Na rys. 288 wykreślona jest krzywa (c), wyrażająca zależność siły prądu od czasu, odpowiadająca równaniu I.

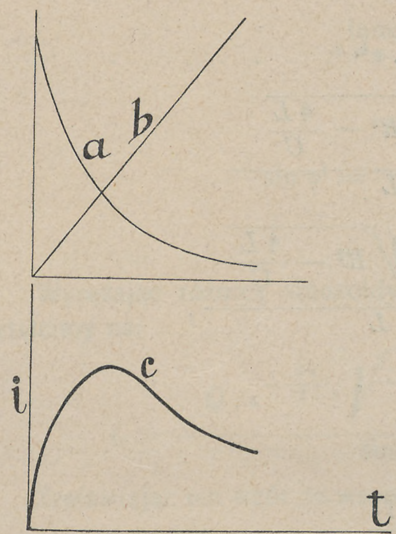
Rzędne tej linji są różnicą rzędnych dwuch innych krzywych (a) i (b), wykreślonych na podstawie wzorów:

$$A_1 \,.\, \varepsilon^{k_1 t} \quad \text{i} \quad A_2 \,.\, \varepsilon^{k_2 t}.$$

Stromość tych linij jest różna, ponieważ niezależnie od znaku $k_2 > k_1$.

Na rys. 289 wykreślona jest krzywa (c) przedstawiająca zależność prądu od czasu,

wyrażoną przez równanie II. Rzędne tej krzywej stanowi ą iloczyn rzędnych krzywej (a) i prostej (b). Krzywa (a) jest wykreślona według wzoru:



Rys. 289.

$$\varepsilon^{-\frac{Rt}{2L}},$$

prosta zaś (b) według wzoru:

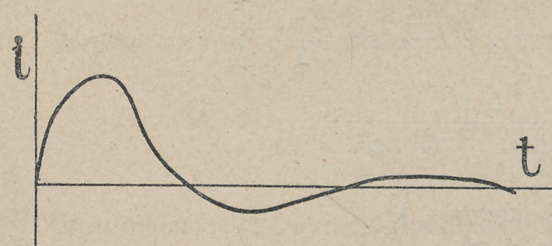
$$\frac{Q}{L \,.\, C} \,.\, t.$$

W przypadkach wskazanych na rys. 288 i 289 prąd zachowuje stały kierunek, i wzrósłszy do pewnego maximum, następnie zmniejsza się stopniowo do zera po upływie nieskończenie długiego czasu.

Na rys. 290 wykreślona jest krzywa, przedstawiająca zmienność siły prądu w zależności od czasu, wyrażoną przez równanie III. Tutaj prąd zmienia kierunek okresowo. Długość okresu jest wielkością stałą, natomiast maksymalna siła prądu (amplituda) zmniejsza się stopniowo według krzywej logarytmicznej:

$$\bar{i} = \frac{2\,Q}{\sqrt{4\,L \,.\, C - R^2 \,.\, C^2}} \,.\, \varepsilon^{-\frac{Rt}{2L}}.$$

Krzywa prądu ma postać nieco odkształconej sinusoidy; wtedy mówimy, że w obwodzie powstają drgania elektryczne stopniowo zanikające. Z punktu widzenia energietycznego mamy tu zjawisko następujące. Kondensator naładowany (rys. 287) zawiera zasób energji w polu elektrycznym, a wokoło całego obwodu, szczególnie zaś wewnątrz zwojnicy, znajduje się energja pola magnetycznego. Gdy na okładkach kondensatora napięcie się wzmaga, zasób energji pola elektrycznego wzrasta, gdy zaś rośnie siła prądu, przybywa energji do pola magnetycznego. Ze wzoru dla prądu ładującego lub wyładowującego kondensator:



Rys. 290.

$$i_t = C \,.\, \frac{d\,e_t}{dt}$$

łatwo spostrzedz, że przy sinusoidalnej zmienności prądu napięcie na kondensatorze zmienia się cosinusoidalnie, więc gdy mamy maximum napięcia na kondensatorze, siła prądu równa się zeru i odwrotnie.

Z uwag tych wynika, że energja przenosi się tu z pola magnetycznego do elektrycznego i z powrotem z elektrycznego do magnetycznego, jednocześnie

jednak pod wpływem oporu omicznego pewna część jej zamienia się na ciepło, wywołując stałe zmniejszanie się energji elektromagnetycznej. Po upływie nieskończenie długiego czasu cała energja elektromagnetyczna obwodu zamieni się na ciepło. Skutkiem tego właśnie drgania elektryczne są tu zanikające. Stały okres tych drgań wynosi:

$$T = 4\pi \frac{LC}{\sqrt{4L \cdot C - R^2 \cdot C^2}}$$

Zależy on tylko od spółczynnika samoindukcji, pojemności i oporu omicznego obwodu i dla tego nazywa się **okresem własnym drgań elektrycznych** tego obwodu. Ładunki elektryczne, znajdujące się w obwodzie, wprawione w ruch przez jakiś, chwilowo istniejącym bodziec, poruszają się w obwodzie, wytwarzając prąd o powyższym okresie, zupełnie podobnie jak sprężyna, umocowana w jednym końcu, odgięta i pozostawiona samej sobie waha się z określoną częstością drgań, jej właściwą.

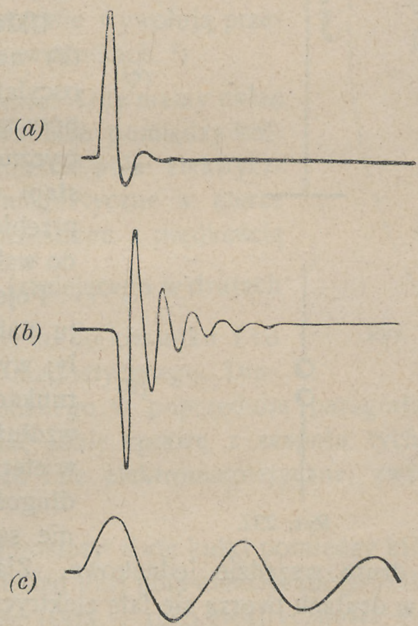
Wszystkie wywody teoretyczne, podane powyżej, są zupełnie zgodne z wynikami doświadczeń. Jako przykład podaję na rys. 291 (*a*) (*b*) (*c*) krzywe, otrzymane za pomocą oscylografu[1], wyrażające zależność prądu od czasu w przypadku wyładowania wahadłowego (oscylacyjnego) kondensatora.

Rys. 291 (*a*) odpowiada przypadkowi, gdy w obwodzie mamy duży opór omiczny, skutkiem czego drgania zanikają bardzo szybko. Na rys. 291 (*b*) widzimy drgania elektryczne przy małym oporze omicznym, małej samoindukcji i małej pojemności, a na rys. 291 (*c*) również przy małym oporze omicznym, lecz przy dużej samoindukcji i pojemności.

Gdy opór omiczny obwodu jest bardzo mały, własności prądu i obwodu będą wyrażone w przybliżeniu poprzedniemi wzorami przy założeniu, że $R = 0$, wtedy:

$$i_t = \frac{Q}{\sqrt{L \cdot C}} \cdot \sin \frac{2\pi t}{T},$$

$$T = 2\pi\sqrt{L \cdot C} \quad \ldots\ldots \quad \text{(i)}$$



Rys. 291.

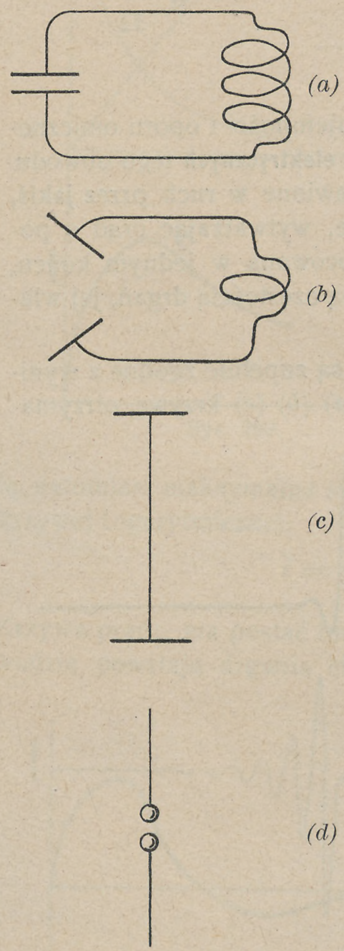
W tym przypadku mamy prąd dokładnie zmienny sinusoidalnie o stałej amplitudzie, prąd ten będzie płynął wiecznie, tak jak sprężyna, raz odgięta, wahałaby się wiecznie, gdyby nie było oporu powietrza i tarcia pomiędzy cząsteczkami.

---

[1]) Rysunek przedstawia wierną kopję zdjęć fotograficznych. O oscylografie patrz rozdział XXXIV.

Okres własny drgań elektrycznych jest tu mniejszy niż w przypadku obecności oporu omicznego.

5. **Fale elektryczne w drutach.** Obwód, w którym odbywają się wyładowania wahadłowe, przybrać może postać zupełnie inną, która jednak w istocie rzeczy jest tylko odmianą poprzedniego obwodu. Na rys. 292 (*a*) widzimy obwód taki sam, jaki rozważaliśmy w paragrafach poprzednich; obwód na rys. 292 (*b*) różni się od poprzedniego tylko tym, że okładki kondensatora są nieco rozsunięte, a liczba zwojów zwojnicy zmniejszona. Na rys. 292 (*c*) mamy obwód, któren utworzył się przez dalsze rozsuwanie okładek kondensatora i wyprostowanie drutu. Wreszcie na rys. 292 (*d*) widzimy dwa druty zaopatrzone w środku w kulki, pomiędzy któremi może przeskakiwać iskra i uzupełniać przerwany przewodnik; ten obwód otrzymamy z poprzedniego, zmniejszając odpowiednio wymiary płytek kondensatora.



Rys. 292.

Układ dwuch drutów, wskazany na rys. 292, (*d*) nazywa się oscylatorem Hertza. Gdy kulki oscylatora połączymy z biegunami jakiegokolwiek przyrządu, wytwarzającego wysokie napięcie elektryczne, pomiędzy kulkami przeskoczy iskra i nastąpi wyładowanie; będzie ono wahadłowe i cały przebieg zjawiska odbędzie się w sposób podobny do wskazanego w paragrafie poprzednim.

Pojemność drutów i spółczynnik samoindukcji są tu małe, więc okres zmian prądu będzie bardzo mały; wynika to ze wzoru (i) na str. 263. W tych warunkach droga, przebyta w ciągu jednego okresu wzdłuż drutów, przez zmiany elektromagnetyczne w eterze otaczającym drut, jest tego samego rzędu co długość drutów. Napięcie i siła prądu elektrycznego nie są w danej chwili wzdłuż górnego lub dolnego drutu wszędzie jednakowe. Zjawisko zazwyczaj odbywa się w ten sposób, że w drutach tworzą się fale elektryczne stojące. Fala prądu ma strzałkę w tym miejscu, gdzie przeskakuje iskra (rys. 293), strzałki zaś fali napięcia, czyli ściślej, potencjału elektrycznego względem ziemi będą się znajdowały na końcach drutów. Zanim się te fale stojące utworzą w obie strony od iskry, będziemy mieli fale bieżące.

Z teorji fal wiemy, że długość fali λ można wyrazić wzorem w zależności od szybkości ruchu zmian tworzących fale — v i długości okresu drgań wywołujących fale T, a mianowicie:

$$\lambda = v \, . \, T.$$

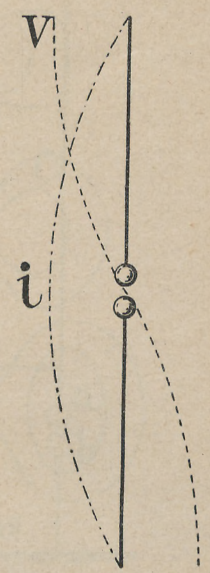
Zmiany elektromagnetyczne przenoszą się w eterze z prędkością $3 . 10^{10} \frac{cm}{sek.}$, więc jeżeli np. $T = 10^{-8}$ *sek.*, to:

$$\lambda = 3 . 10^{10} . 10^{-8} = 300 \, cm,$$

a przeto:

$$\frac{\lambda}{4} = 75 \, cm.$$

Ćwierć fali odpowiada długości jednego drutu na rys. 293. Jeżeli więc ten drut będzie miał długość 75 *cm*, to w nim mogą powstać fale stojące, odpowiadające okresowi drgań 10^{-8} sekundy, t. j. stu miljonom drgań w ciągu jednej sekundy.



Rys. 293.

Wzdłuż drutów przy zmianach potencjału elektrycznego na końcach powstają zawsze fale elektromagnetyczne, ilekroć druty są dość długie, a częstość drgań elektrycznych dostatecznie wielka.

Rozważając bieg fal w drutach, trzeba mieć na względzie, że ruch fali elektrycznej wzdłuż drutu nie jest ruchem elektryczności w przewodniku, lecz ruchem zmian elektromagnetycznych w eterze otaczającym przewodnik. Przedewszystkiem więc wzdłuż przewodników biegną fale w eterze i te następnie wywołują przesunięcia ładunków elektrycznych w tych przewodnikach. [1])

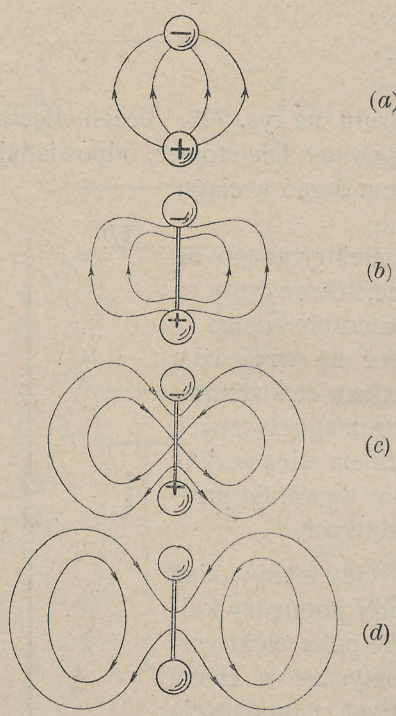
6. Fale elektromagnetyczne swobodne. Gdy mamy układ wskazany na rys. 292 (*d*), to, przy wyładowaniach pomiędzy kulkami, w przestrzeni otaczającej powstają zmienne pola: elektryczne i magnetyczne. Zmiany elektryczne i magnetyczne w eterze przenoszą się w kierunku od drutów w przestrzeń z prędkością $3 . 10^{10} \frac{cm}{sek.}$ i skutkiem zmienności prądu istniejącego w drutach tworzą fale. Wzdłuż tych fal mamy zmienne co do kierunku i co do wielkości natężenia pola elektrycznego i magnetycznego. Długość fal zależy, jak to widać ze wzoru podanego w poprzednim paragrafie, od częstości drgań prądu w drutach. Aby zdać sobie sprawę z zespołu tych pól: elektrycznego i magnetycznego, tworzących fale elektromagnetyczne, zwróćmy uwagę na kształt odpowiednich linji sił.

Jako przykład weźmiemy oscylator najprostszy: dwie kulki pomiędzy którymi przeskakuje iskra. Zanim iskra przeskoczy, układ linij pola elektrycznego jest taki, jak wskazano na rys. 294 (*a*). Gdy powstaje iskra — ruch elektryczności — linje stopniowo zmieniają kształt tak, jak to wskazano na rys. 294 (*b*), (*c*) i (*d*), potem kulki naładowują się odwrotnie: dolna ujemnie, a górna dodatnio, skutkiem czego powstają linje sił kierunku odwrotnego i t. d. Przy ruchu elektryczności wokoło iskry wytwarzają się i linje sił magnetycznych, które mają kształt kół; płaszczyzny tych kół są prostopadłe do osi iskry, a środki leżą na tej osi. Układ linji szeregu

[1]) Niektóre szczegóły o falach powstających w drutach czytelnik znajdzie w III T. Zasad fizyki pr. A. Witkowskiego str. 615.

fal magnetycznych i elektrycznych wytworzonych przez ruch elektryczności pomiędzy kulkami pokazany jest w dwuch prostopadłych do siebie płaszczyznach na rys. 295. [1])

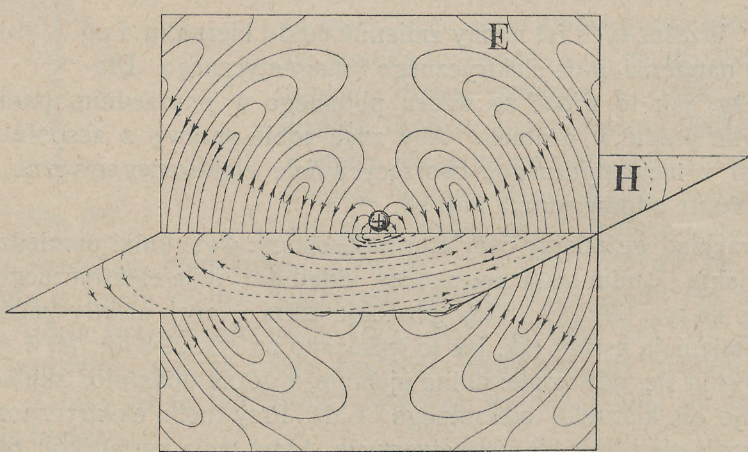
Fale te biegną we wszystkie strony. Zjawisko takie czasem nazywamy promieniowaniem oscylatora. W falach tych przenosi się pewien zasób energji, mówimy więc, że oscylator wypromieniowuje energję. Na tem właśnie polega zasadnicza różnica pomiędzy obwodami rys. 292 (*a*) i 292 (*d*).



Rys. 294.

Gdy w obwodzie rys. 292 (*a*) przy drganiach elektrycznych energja przenosi się głównie z pola elektrycznego kondensatora do pola magnetycznego zwojnicy i z powrotem, oscylator [rys. 292 (*d*)], wywołuje wprawdzie także przemianę energji pola elektrycznego w energję pola magnetycznego i odwrotnie, ale przytem znaczną część energji wypromieniowuje w przestrzeń. Drgania elektryczne w obwodzie [rys 292 (*a*)] trwają dość długo, gdy opór omiczny obwodu jest mały, drgania zaś elektryczne w oscylatorze [rys. 292 (*d*)] zanikają prędko, o ile niema dopływu energji.

Fale elektromagnetyczne, biegnące w przestrzeń, gdy napotkają przewodnik, wywołu-



Rys. 295.

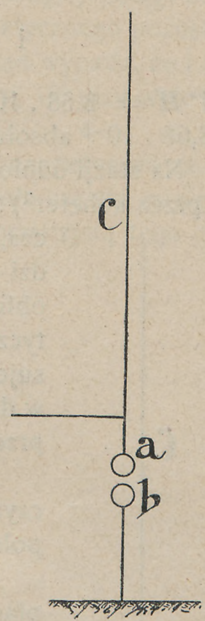
[1]) Szczegóły o powstawaniu fal elektromagnetycznych czytelnik znajdzie w III T. Zasad fizyki pr. A. Witkowskiego, str. 624.

ją w nim ruch elektryczności t. j. prąd elektryczny. Za pomocą tego prądu można wykryć obecność fal elektromagnetycznych.

Na tej własności fal elektromagnetycznych oparte jest urządzenie telegrafu bez drutu, inaczej telegrafu iskrowego.

Dla przykładu rozważmy według Kennelly'ego przenoszenie się energji przy telegrafji iskrowej.

Stacja wysyłająca zaopatrzona jest w oscylator (rys. 296), składający się z dwuch kulek a i b, z których jedna b jest połączona z ziemią, a druga z wysokim drutem ac (anteną) i z jednym biegunem źródła prądu, którego drugi biegun jest połączony z ziemią. Gdy kulka a z drutem ac naładuje się do odpowiedniego potencjału, następuje wyładowanie wahadłowe i z przewodnika ac wybiegają fale elektromagnetyczne, które jednak bardzo szybko zanikają z powodu wyczerpania się energji. Pierwsza fala zawierać będzie energji najwięcej, więc w przybliżeniu można przyjąć, że cała energja, zawarta w naładowanym przewodniku ac, znajduje się w pierwszej fali.



Rys. 296.

Załóżmy, że przewodnik ac został naładowany do potencjału wynoszącego $3 \cdot 10^4$ V.; pojemność tego przewodnika jest 0,01 mikrofarada[1]), czyli 10^{-8} faradów; na zasadzie wzoru, przytoczonego w rozdziale XXI dla obliczenia energji kondensatora naładowanego, otrzymujemy:

$$A = \frac{e^2 \cdot C}{2} = \frac{(3 \cdot 10^4)^2\, 10^{-8}}{2} = 4{,}5 \text{ dżaulów,}$$

co wynosi mniej więcej 0,46 kgm lub też $4{,}5 \cdot 10^7$ ergów. Jeżeli przypuścimy, że ilość energji ciepła i światła, wydzielająca się przy tem zjawisku, jest znikomo mała, to cała energja ładunku przechodzi do fali elektromagnetycznej, wybiegającej z przewodnika.

Fala elektromagnetyczna od przewodnika ac rozchodzi się w postaci półkuli, której środek znajduje się u podstawy drutu ac; długość fali wynosi w tym razie poczwórnie wziętą długość drutu ac, czyli długość tego drutu stanowi czwartą część długości fali. Przyjmując długość drutu ac za 30 m, otrzymamy całkowitą długość fali:

$$30 \cdot 4 = 120\ m.$$

Kiedy odległość przodu fali od wysyłającego drutu będzie wynosiła 10 km, to objętość przestrzeni zajętej przez falę oblicza się w przybliżeniu według wzoru:

$$2\pi \cdot (10^6)^2 \cdot 12 \cdot 10^3 = 7{,}54 \cdot 10^{16}\ cm^3.$$

Ilość energji, przypadająca na 1 cm^3 objętości fali, wynosi:

$$\frac{4{,}5 \cdot 10^7}{7{,}54 \cdot 10^{16}} = 6 \cdot 10^{-10} \text{ ergów.}$$

[1]) Jest to właściwie pojemność kondensatora, utworzonego z przewodnika ac i ziemi.

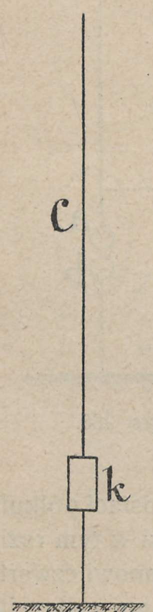
Energja ta zawiera się w połowie (3 . 10^{-10} ergów) w polu magnetycznem i w połowie w polu elektrycznem. Przyjmując dla uproszczenia obliczeń równomierny rozkład energji w fali, otrzymamy wzory do obliczenia natężeń elektrycznego i magnetycznego. Energja w jednostce objętości wyraża się przez natężenie pola za pomocą wzorów, wskazanych poprzednio w rozdziałach XIX i XXI. Korzystając z tych wzorów i uważając przenikliwość magnetyczną i stałą dielektryczną dla powietrza za równe jednostce, otrzymamy:

$$\frac{E^2}{8\pi} = 3 \cdot 10^{-10} \text{ ergów}$$

i $$\frac{H^2}{8\pi} = 3 \cdot 10^{-10} \text{ ergów},$$

stąd $H = 8{,}68 \cdot 10^{-5}$ absolutnych jednostek elektromagnetycznych, zaś $E = 8{,}68 \cdot 10^{-5}$ absolutnych jednostek elektrostatycznych.

Na stacji odbiorczej znajduje się także pionowy drut c (rys. 297), połączony np. przez koherer[1]) z ziemią. Fala elektromagnetyczna uderzając w drut odbieracza, wzbudza w tym drucie siłę elektromotoryczną, która pochodzi od działania pola elektrycznego i pola magnetycznego. Dla obliczenia siły elektromotorycznej, pochodzącej od pola magnetycznego, możemy posługiwać się tym samym wzorem, który stosuje się w teorji działania dynamomaszyn. Siła elektromotoryczna w drucie wyraża się ilością linji sił przecinanych na sekundę przez przewodnik.



Rys. 297.

Ilość linji sił magnetycznych, przypadających na 1 cm^2 płaszczyzny prostopadłej do linji, równa się ilości jednostek natężenia pola magnetycznego w tem miejscu.

W rozważanej fali ilość linji sił, przypadająca na 1 cm^2 płaszczyzny leżącej wzdłuż kierunku ruchu fali, wynosi:

$$8{,}68 \cdot 10^{-5};$$

linje te biegną z prędkością 3 . 10^{10} *cm/sek*. Jeżeli wysokość drutu odbierającego wynosi 30 *m*, a odległość od stacji wysyłającej 10 *km*, to siła elektromotoryczna, powstająca w tym drucie od pola magnetycznego, wyniesie:

$$8{,}68 \cdot 10^{-5} \cdot 3 \cdot 10^{3} \cdot 3 \cdot 10^{10} = 78{,}12 \cdot 10^{8}$$

absolutnych jednostek elektromagnetycznych, czyli 78,12 V.

Elektryczna część fali wzbudza również siłę elektromotoryczną, którą możemy obliczyć, przyjmując pod uwagę, że natężenie pola elektrycznego jest to siła elektromotoryczna, przypadająca na długość 1 *cm*. Kierunek natężenia pola elektrycznego w fali jest pionowy, odpowiada więc kierunkowi drutu odbiorczego, który jest również pionowy. Na zasadzie powyższego wypada, że w każdym *cm* drutu pole

[1]) Koherer jest to rurka szklana napełniona opiłkami metalowemi, w końcach rurki są zatopione dwa druty. W normalnych warunkach taka rurka nie przepuszcza prądu z ogniwa elektrycznego; gdy jednak przez nią przejdzie wyładowanie elektryczności o wyższem napięciu, rurka staje się przewodnikiem i dla prądu z ogniwa.

elektryczne wzbudza siłę elektromotoryczną, wynoszącą $8{,}68 \,.\, 10^{-5}$ absolutnych elektrostatycznych jednostek, czyli $8{,}68 \,.\, 10^{-5} \,.\, 3 \,.\, 10^{10} \,.\, 10^{-8} = 0{,}02604$ V.[1]) Ponieważ długość całkowita drutu wynosi 3000 *cm*, cała siła elektromotoryczna wyniesie $0{,}02604 \,.\, 3000 = 78{,}12$ V., to jest tyleż, co i od części magnetycznej fali.

Pod wpływem tej siły elektromotorycznej powstaje w drucie odbierającym ruch elektryczności, który wprawia w działanie przyrządy sygnalizacyjne. Zależność wielkości omawianej siły elektromotorycznej od odległości pomiędzy stacją odbiorczą i wysyłającą daje się łatwo wyprowadzić stąd, że ilość energji, przypadająca na 1 cm^3 fali, zmienia się w odwrotnym stosunku do drugiej potęgi odległości fali od źródła; natężenie więc pól elektrycznego i magnetycznego pozostaje w stosunku odwrotnym do pierwszej potęgi tej odległości, a stąd wypada, że i siła elektromotoryczna w drucie odbiorczym zmniejszy się tyle razy, ile razy wzrośnie odległość dwuch stacji.

Z tego przykładu widzimy, że przesyłając energję elektromagnetyczną za pomocą fal, otrzymujemy na stacji odbiorczej względnie tylko małą cząstkę napięcia elektrycznego, które zastosowaliśmy na stacji wysyłającej, przyczyną tego jest przedewszystkiem rozpraszanie się energji we wszystkie strony.

---

[1]) Patrz rozdział XXVII § 11.

CZĘŚĆ V.

Pomiary elektrotechniczne.

ROZDZIAŁ XXVII.

Jednostki.

Wymierzyć pewną wielkość, znaczy porównać ją z inną obraną za jednostkę. Wynik pomiarów wyrażamy liczbą i nazwą jednostek, w których pomiar wykonywamy; liczba wskazuje ile tych jednostek mieści się w mierzonej wielkości.

Teorja zjawisk, zachodzących w przyrodzie, ujmuje we wzory matematyczne związki, zachodzące pomiędzy różnemi wielkościami, które możemy wyrażać w jednostkach dowolnych. Weźmy np. wzór drogi, przebytej przez ciało ruchem jednostajnym postępowym. Jeżeli ten wzór, wyrażający drogę przez prędkość i czas, ma być stosowany przy dowolnych jednostkach, to wypadnie go napisać w postaci następującej:

$$S = K \cdot v \cdot t.$$

s oznacza tu drogę, v—prędkość, t—czas, a K—wielkość stałą, zależną od jednostek obranych do mierzenia prędkości, drogi i czasu. Załóżmy np., że za jednostkę prędkości obierzemy prędkość, którą osiąga ciało, spadające na ziemię, po upływie jednej sekundy, czas będziemy mierzyli w sekundach, a drogę w metrach, wtedy wzór powyższy przybierze postać:

$$s = 9{,}81 \cdot v \cdot t.$$ [1]

Najprostszy jednak wzór otrzymamy, gdy obierzemy dla wyrażenia wielkości, wchodzących w skład wzoru takie jednostki, aby $K = 1$.

W powyższym wypadku, obierając np. do mierzenia czasu sekundę, do mierzenia prędkości — metr na sekundę, a do mierzenia drogi — metr, otrzymamy K równe jednostce. Wogóle K równać się będzie jednostce wtedy, gdy za jednostkę drogi obierzemy drogę, którą ciało przebywa w ciągu jednostki czasu przy pręd-

---

[1] Po upływie jednej sekundy od chwili rozpoczęcia się spadku, ciała spadające na ziemię mają prędkość 9,81 $\frac{m}{\text{sek.}}$.

kości równej jednostce. Mając na względzie takie układy jednostek, możemy wzór dla drogi napisać w sposób następujący:

$$s = v \,.\, t.$$

Tak też piszemy wszystkie wzory w tej książce, przypuszczając, że spółczynnik zależny od wyboru jednostek równa się zawsze jednostce.

Najprostszy i najdogodniejszy układ jednostek otrzymamy wtedy, gdy przyjmiemy dowolnie jaknajmniejszą liczbę jednostek zasadniczych, inne zaś wyprowadzimy jako pochodne od nich, opierając się na wzorach matematycznych, wyrażających związek pomiędzy poszczególnemi wielkościami, i zakładając zawsze spółczynnik proporcjonalności jako równy jedności.

Obecnie przy pomiarach posługujemy się przeważnie jednostkami, utworzonemi na podstawie tak zwanego **układu bezwzględnego** jednostek, opartego na trzech jednostkach zasadniczych: długości, masy materjalnej i czasu. Twórcami układu bezwzględnego byli Gauss i Weber. Wzór, wyrażający zależność pewnej wielkości od długości, masy i czasu, nazywamy według Maxwella, wzorem wymiarowym. A więc np. wzór wymiarowy prędkości będzie:

$$\text{Wymiar: } v = L \,.\, T^{-1}.$$

Wzór wymiarowy drogi:

$$\text{Wymiar: } s = L \,.\, T^{-1} \,.\, T = L.$$

Przyśpieszenia:

$$\text{Wymiar: } u = L \,.\, T^{-1} \,.\, T^{-1} = L \,.\, T^{-2},$$

Siły:

$$\text{Wymiar: } f = M \,.\, L \,.\, T^{-2}.$$

Pracy:

$$\text{Wymiar: } A = M \,.\, L^2 \,.\, T^{-2}.$$

Mocy:

$$\text{Wymiar: } W = M \,.\, L^2 \,.\, T^{-3}.$$

L oznacza tu długość, M — masę, a T — czas.

W dalszym ciągu dla uwydatnienia jednostek zasadniczych we wzorach wymiarowych zamiast liter M, L i T będziemy stosowali czasem oznaczenia odpowiednie jednostek zasadniczych.

Wzory wymiarowe nie tylko ułatwiają wyznaczenie jednostek, one porządkują wyobrażenia, jakie sobie tworzymy, opracowując teorje zjawisk w przyrodzie. Przez zwrócenie uwagi na wielkości równoznaczne ułatwiają one sprawdzanie rozumowań, których wyniki muszą być zgodne z tą zasadą logiczną, że tylko wielkości równoznaczne, mające w danym układzie jednostek jeden i ten sam wymiar, mogą być ze sobą porównywane. Pomimo wymienionych powyżej zalet układu jednolitego jednostek, w praktyce posiłkujemy się dość często jednostkami dowolnie obranemi, głównie ze względu na trudność powszechnego wprowadzenia jednostek najpraktyczniejszych i dogodność powiększania i zmniejszania niektórych jednostek bezwzględnych dla uniknięcia przy rachunkach liczb zbyt wielkich lub ułamków zbyt drobnych. W ten sposób powstały układy jednostek praktyczne.

Gdy mamy do czynienia z różnemi układami jednostek, to znaczenie pierw-

szorzędne ma sprawa stosunku wzajemnego tych jednostek i liczb, wyrażających te same wielkości w różnych układach. Mając do czynienia z tymi stosunkami, musimy zawsze mieć na względzie, że stosunek jednostek jest odwrotny względem stosunku liczb, wyrażających rozważane wielkości w tych jednostkach. Pochodzi to stąd, że każdą wielkość uważać możemy za iloczyn jednostki, wziętej przy pomiarze, przez liczbę, wyrażającą daną wielkość w tej jednostce. Gdy np. zmniejszamy jeden czynnik iloczynu (jednostkę), to ponieważ iloczyn ma pozostać nie zmieniony, drugi czynnik (liczba) zmieni się w stosunku odwrotnym.

Najlepiej to zrozumiemy na przykładzie. Pewną drogę mierzymy w metrach i otrzymujemy wynik pomiaru 25 *m*; jeżeli tą samą drogę zmierzymy w centymetrach, to otrzymamy 2500 *cm*. Oznaczmy drogę, wyrażoną w metrach przez S_m, a w centymetrach przez S_c, wtedy wypadnie:

$$\frac{S_c}{S_m} = \frac{2500}{25} = 100.$$

Natomiast wiemy, że centymetr jest sto razy krótszy od metra, więc, oznacza jąc długość centymetra przez l_c, a długość metra przez l_m, otrzymamy:

$$\frac{l_c}{l_m} = \frac{1}{100}.$$

1. Jednostki zasadnicze. Dla wszystkich prawie wielkości fizycznych mamy jednostki pochodne od jednostek zasadniczych długości, masy materjalnej i czasu. Ogólnie przyjęte jednostki zasadnicze w tak zwanym układzie bezwzględnym są następujące: **centymetr, gram, sekunda,** stąd nazwa układu: centymetrogramosekundowy lub w skróceniu: układ c. g. s.

Centymetr, stanowiący jednostkę długości w układzie c. g. s., wynosi 0,01 część metra, który jest długością, w temperaturze 0° C., pomiędzy dwiema kreskami, naciętemi przy końcach pręta metalowego wzorcowego, przechowywanego w Paryżu.[1])

Gram — jednostka masy w układzie c. g. s., jest tysiączną częścią kilograma, który stanowi masę metalowego cylindra wzorcowego, również przechowywanego w Paryżu.[2])

Sekunda — jednostka czasu w układzie c. g. s., jest $\frac{1}{86400}$ częścią średniej doby słonecznej, która stanowi średni czas, upływający od jednego do następnego przejścia słońca przez południk dowolnego miejsca na kuli ziemskiej.

Na podstawie tych trzech jednostek powstał układ jednostek bezwzględnych i pochodne jednostki praktyczne.

2. Jednostki pochodne układu c. g. s. w mechanice.

P r ę d k o ś ć. Prędkość ruchu jednostajnego punktu wynosi jedną jednostkę bezwzględną, gdy w ciągu sekundy punkt przechodzi drogę długości jednego centymetra.

$$\text{Wymiar: } v = cm \, . \, s^{-1}.$$

---

[1]) Metr stanowi w przybliżeniu dziesięciomiljonową część ćwierci południka ziemskiego.

[2]) Kilogram stanowi w przybliżeniu masę wody w objętości 1 litra przy 4° C

Jednostkę taką nazywamy **centymetrem na sekundę**.

Przyśpieszenie. Ruch ciała odbywa się ze stałym przyśpieszeniem, wynoszącym jednostkę bezwzględną, gdy prędkość ruchu zmienia się o jednostkę bezwzględną w ciągu sekundy.

Wymiar: $u = cm \,.\, s^{-2}$.

Jednostkę taką nazywamy **centymetrem na kwadrat sekundy**.

Siła. Bezwzględną jednostkę siły stanowi taka siła, która masie jednego grama nadaje przyśpieszenie jednego centymetra na kwadrat sekundy.

Wymiar: $f = gr \,.\, cm \,.\, s^{-2}$.

Taką jednostkę siły nazywamy **dyna**.

Praca. Bezwzględną jednostką pracy jest praca wykonana przez siłę jednej dyny, gdy punkt przyczepienia tej siły przechodzi w kierunku siły drogę, wynoszącą jeden centymetr.

Wymiar: $A = gr \,.\, cm^2 \,.\, s^{-2}$.

Taką jednostkę nazywamy **ergiem**.

Energja. Energję mierzymy w tych samych jednostkach co i pracę.

Moc[1]). Jednostka bezwzględna mocy wykonywa w ciągu sekundy jeden erg pracy.

Wymiar: $W = gr \,.\, cm^2 \,.\, s^{-3}$.

Taką jednostkę mocy nazywamy **ergiem na sekundę**.

3. Praktyczne jednostki mechaniczne i cieplne. Ważniejsze jednostki praktyczne oparte częściowo na układzie bezwzględnym są następujące:

Siła. Za jednostkę siły stosujemy często **kilogram**; jest to siła, z jaką ziemia przyciąga masę jednego kilograma. Przyśpieszenie ciążenia ziemskiego przyjmujemy zwykle równe 981 $cm \,.\, s^{-2}$. Przy tym założeniu:

1 kilogram siły = 981000 dyn.

Praca. Jednostką pracy pochodną od erga jest: **dżaul**.

1 dżaul = 10^7 ergów.

Inną jednostką praktyczną, częściej używaną, jest **kilogramometr**, stanowiący pracę siły, wynoszącej jeden kilogram, na drodze jednego metra w kierunku siły.

1 kilogramometr = 981000 . 100 = 9,81 . 10^7 dynocentymetrów czyli ergów = 9,81 dżauli.

W elektrotechnice jednak stosowana jest najczęściej jednostka: **kilowatgodzina**, stanowiąca pracę mocy, wynoszącej jeden kilowat w ciągu jednej godziny. Dalej wykażemy, że 1 kilowat = 1000 dżauli na sekundę, więc:

1 kilowatgodzina = 3600000 dżauli.

Ilość ciepła. W praktyce najczęściej używamy dwuch jednostek ilości ciepła: **kalorję gramową** i **kalorję kilogramową**. Są to ilości ciepła potrzebne do ogrza-

---

[1]) W niektórych książkach moc nazywają autorzy dzielnością lub sprawnością.

nia jednego grama lub też jednego kilograma wody o jeden stopień Celsiusza w ściśle określonych warunkach.[1])

1 kalorja kilogramowa = 1000 kalorji gramowych.

1 kalorja kilogramowa jest równoważna 427 kilogramometrom pracy mechanicznej.[2])

Na podstawie tej liczby wypada, że:

$$1 \text{ dżaul} = \frac{1}{9,81} \text{ kilogramometrów} = \text{około } 0,24 \text{ kalorji gramowej,}$$

1 kilowat godzina = około 857 kalorji kilogramowych.

Moc. Opierając się na bezwzględnej jednostce pracy, określamy praktyczną jednostkę mocy **wat**, jako taką moc, która może wykonać pracę 10^7 ergów w ciągu sekundy, co stanowi jeden dżaul na sekundę. Częściej jednak jest stosowana jednostka większa **kilowat**, która równa się 1000 watom.

Pozatem stosuje się jeszcze jednostka mocy **koń mechaniczny**. Jest to moc, która może wykonać pracę 75 kilogramometrów w ciągu sekundy.

75 kilogramometrów = 75 . 981000 . 100 dynocentymetrów czyli ergów = 75 . 9,81 dżauli.

Stąd wynika, że:

1 koń mechaniczny = 736 dżauli na sekundę = 736 watów[3]).

Porównywając różne jednostki mocy pomiędzy sobą, otrzymujemy:

1 kilowat = 1,36 konia mechanicznego = 0,24 kalorji kilogramowej na sekundę.

4. O układach jednostek w nauce o elektryczności i magnetyzmie. Na zasadzie zależności, pomiędzy różnemi wielkościami, stosowanemi w nauce o elektryczności i magnetyzmie, można ułożyć szereg wzorów, w których poszczególne wielkości określają się na podstawie poprzednich. Pierwszą wielkość można określić na zasadzie związku z zasadniczemi wielkościami fizycznemi: długością, masą materjalną i czasem.

Opierając się na takich wzorach, łatwo jest wyznaczyć stopniowo wymiar poszczególnych wielkości.

Praktyczne znaczenie mają dwa układy wymiarów. Jeden rozpoczynający się od wzorów elektrostatyki, drugi, od wzorów magnetycznych. Pierwszy nazywa się układem **elektrostatycznym**, a drugi **elektromagnetycznym**.

Układ elektrostatyczny. Zasadniczą wielkością jest tu ilość elektryczności, którą określamy na podstawie wzoru Coulomba (patrz str. 77). We wzorze tym, oprócz ilości elektryczności, siły i odległości ładunków elektrycznych mamy spółczynnik zależny od rodzaju ośrodka, w którym znajdują się ładunki. Wymiaru tego czynnika, zwanego zdolnością elektryczną ośrodka, w zależności od długości, masy materjalnej i czasu w rozważanym układzie związków wyznaczyć nie mo-

---

[1]) Patrz Zasady fizyki p. A. Witkowskiego T. II.

[2]) 427,1 jest liczbą średnią z nowszych pomiarów.

[3]) Moc konia mechanicznego angielskiego może wykonać pracę 550 stopofuntów na sekundę (food-pounds per second), jest on trochę większy od używanego na kontynencie i wynosi 746 watów.

żemy, pozostawiamy więc go we wszystkich równaniach wymiarowych jako czynnik mający pewien wymiar: [**k**].

Aby uniezależnić równania wymiarowe od wyboru jednostek, oznaczać będziemy w tych równaniach długość przez L, masę materjalną przez M, a czas przez T.

Ilość elektryczności. W nauce elektrostatyki podstawowe równanie Coulomba wyraża siłę przyciągania lub odpychania dwuch ładunków elektrycznych wzorem:

$$f = \frac{1}{\mathbf{k}} \cdot \frac{q_1 \cdot q_2}{r^2}.$$

q_1 i q_2 są to ładunki elektryczne skupione w punktach, znajdujących się w odległości r jeden od drugiego, **k**—zdolność elektryczna ośrodka.

Zakładając $q_1 = q_2 = q$, otrzymamy:

$$q = r \cdot \sqrt{\mathbf{k} \cdot f}.$$

Z tego wzoru wynika, że:

$$\text{Wymiar: } q = \mathrm{L} \cdot \sqrt{[\mathbf{k}] \cdot \mathrm{M} \cdot \mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-2}} = \mathrm{L}^{\frac{3}{2}} \cdot \mathrm{M}^{\frac{1}{2}}\ \mathrm{T}^{-1} \cdot [\mathbf{k}]^{\frac{1}{2}}$$

Gęstość powierzchniowa elektryczności. Gdy na powierzchni S mamy ładunek Q, rozłożony jednostajnie, to gęstość powierzchniowa będzie:

$$\sigma = \frac{Q}{S}.$$

$$\text{Wymiar: } \sigma = \mathrm{L}^{\frac{3}{2}} \cdot \mathrm{M}^{\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{T}^{-1}\,[\mathbf{k}]^{\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{L}^{-2} = \mathrm{L}^{-\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{M}^{\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{T}^{-1} \cdot [\mathbf{k}]^{\frac{1}{2}}.$$

Natężenie pola elektrycznego. Gdy w polu elektrycznym na ładunek elektryczny q działa siła f, a natężenie pola jest $\mathbf{E}$, to

$$\mathbf{E} = \frac{f}{q}.$$

Stąd:

$$\text{wymiar: } \mathbf{E} = \mathrm{M} \cdot \mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-2} \cdot \mathrm{L}^{-\frac{3}{2}} \cdot \mathrm{M}^{-\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{T} \cdot [\mathbf{k}]^{-\frac{1}{2}} = \mathrm{L}^{-\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{M}^{\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{T}^{-1} \cdot [\mathbf{k}]^{-\frac{1}{2}}.$$

Różnica potencyałów. (Inaczej napięcie elektryczne). Dla pracy wykonanej przy przeniesieniu ilości elektryczności q z miejsca, gdzie potencjał jest V, do innego miejsca, gdzie potencjał jest V_2, mamy wzór następujący:

$$A = (V_1 - V_2) \cdot q.$$

Stąd:

$$V_1 - V_2 = \frac{A}{q}.$$

Wymiar:

$$(V_1 - V_2) = \mathrm{M} \cdot \mathrm{L}^2 \cdot \mathrm{T}^{-2} \cdot \mathrm{L}^{-\frac{3}{2}} \cdot \mathrm{M}^{-\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{T} \cdot [\mathbf{k}]^{-\frac{1}{2}} = \mathrm{L}^{\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{M}^{\frac{1}{2}} \cdot \mathrm{T}^{-1} \cdot [\mathbf{k}]^{-\frac{1}{2}}.$$

Ten sam wymiar ma siła elektromotoryczna.

Pojemność. Przy rozważaniu własności kondensatorów określiliśmy pojemność kondensatora jako spółczynnik warunkujący ilość elektryczności, znajdującej się na każdej z okładek kondensatora w zależności od różnicy potencjałów pomiędzy okładkami:

$$C = \frac{q}{V_1 - V_2}.$$

Stąd:

$$\text{wymiar: } C = L^{\frac{3}{2}} . M^{\frac{1}{2}} . T^{-1} [k]^{\frac{1}{2}} . L^{-\frac{1}{2}} . M^{-\frac{1}{2}} . T . [k]^{\frac{1}{2}} = L . [k].$$

Pojemność ma tu wymiar długości pomnożonej przez wymiar zdolności elektrycznej ośrodka.

P r ą d e l e k t r y c z n y. Siłę prądu elektrycznego w układzie elektrostatycznym znajdziemy na zasadzie poglądu na prąd, jako na ruch elektryczności wzdłuż przewodnika.

$$i = \frac{q}{t}.$$

i—siła prądu stałego, przy którym w ciągu czasu t przepływa ilość elektryczności q.

$$\text{Wymiar: } i = L^{\frac{3}{2}} . M^{\frac{1}{2}} . T^{-1} . [k]^{\frac{1}{2}} . T^{-1} = L^{\frac{3}{2}} . M^{\frac{1}{2}} . T^{-2} . [k]^{\frac{1}{2}}.$$

O p ó r e l e k t r y c z n y. Na zasadzie prawa Ohma możemy wyrazić opór omiczny pewnego przewodnika wzorem:

$$r = \frac{V_1 - V_2}{i}.$$

Prąd i przepływa po przewodniku, na którego końcach istnieje różnica potencjałów $V_1 - V_2$.

Stąd:

$$\text{wymiar: } r = L^{\frac{1}{2}} . M^{\frac{1}{2}} . T^{-1} [k]^{-\frac{1}{2}} . L^{-\frac{3}{2}} . M^{-\frac{1}{2}} . T^2 . [k]^{-\frac{1}{2}} = L^{-1} . T . [k]^{-1}.$$

S p ó ł c z y n n i k s a m o i n d u k c j i. Wyraz dla siły elektromotorycznej samoindukcji w zależności od spółczynnika samoindukcji i szybkości zmienności prądu podany był na str. 70:

$$E_{st} = - L \frac{di_t}{dt}.$$

Stąd:

$$L = - E_{st} . \frac{dt}{di_t},$$

a przeto, uwzględniając, że siła elektromotoryczna i różnica potencjałów mają wymiar jednakowy, otrzymamy:

$$\text{Wymiar: } L = L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1} k^{-\frac{1}{2}} . L^{-\frac{3}{2}} . M^{-\frac{1}{2}} . T^2 . [k]^{-\frac{1}{2}} . T = L^{-1} . T^2 . [k]^{-1}.$$

Przechodzimy teraz do wielkości magnetycznych.

N a t ę ż e n i e p o l a m a g n e t y c z n e g o. Według wzoru Laplace'a (str. 7).

$$dH = \frac{dl . i}{r^2} . \sin \alpha.$$

Funkcje trygonometryczne są liczbami oderwanemi, nie mają zatem żadnego wymiaru, czyli że potęgi przy L, M i T są dla nich zerowe, z powyższego więc wzoru otrzymamy:

$$\text{Wymiar: } H = L . L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2} [k]^{\frac{1}{2}} . L^{-2} = L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2} . [k]^{\frac{1}{2}}.$$

Masa magnetyczna. Na str. 6 mamy wzór dla natężenia pola:

$$H = \frac{F}{m}.$$

Stąd:

$$m = \frac{F}{H}.$$

Ten wzór wyraża wielkość masy magnetycznej według siły F, jaka działa na nią, gdy jest umieszczona w polu magnetycznym o natężeniu H.

Stąd:

Wymiar: $m = M \,.\, L \,.\, T^{-2} \,.\, L^{-\frac{1}{2}} \,.\, M^{-\frac{1}{2}} \,.\, T^{2} \,.\, [\mathbf{k}]^{-\frac{1}{2}} = L^{\frac{1}{2}} \,.\, M^{\frac{1}{2}} \,.\, \mathbf{k}^{-\frac{1}{2}}$.

Indukcja magnetyczna. Według wzoru podanego na str. 30, indukcję magnetyczną wyrażamy przez natężenie pola H i własności magnetyczne ośrodka określone przez przenikliwość magnetyczną μ. Wzór powyższy jest następujący:

$$B = \mu \,.\, H.$$

μ—jest wielkością o niewiadomym narazie wymiarze, pozostawiamy więc ją w równaniach wymiarowych, oznaczając wymiar jej przez: $[\mu]$

Wymiar: $B = L^{\frac{1}{2}} \,.\, M^{\frac{1}{2}} \,.\, T^{-2} \,.\, [\mathbf{k}]^{\frac{1}{2}} \,.\, [\mu]$.

Strumień magnetyczny. Według wzoru podanego na str. 48, strumień indukcji wyraża się przez indukcję magnetyczną i wielkość pola powierzchni, przez którą strumień przenika:

$$N = B \,.\, s.$$

Wymiar: $N = L^{\frac{1}{2}} \,.\, M^{\frac{1}{2}} \,.\, T^{-2} \,.\, [\mathbf{k}]^{\frac{1}{2}} \,.\, [\mu] \,.\, L^{2} = L^{\frac{5}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2} \,.\, [\mathbf{k}]^{\frac{1}{2}} \,.\, [\mu]$.

Siła magnetomotoryczna. Według str. 59, siłę magnetomotoryczną M zwojnicy, składającej się z n zwojów z prądem i, wyrażamy wzorem:

$$M = 1{,}256 \,.\, ni.$$

Tutaj spółczynnik $1{,}256 \,.\, n$ jest liczbą oderwaną, więc:

Wymiar: $M =$ wymiar: $i = L^{\frac{3}{2}} \,.\, M^{\frac{1}{2}} \,.\, T^{-2} \,.\, [\mathbf{k}]^{\frac{1}{2}}$.

Opór magnetyczny. Według str. 59, opór magnetyczny obwodu strumienia magnetycznego wyraża się wzorem:

$$\mathbf{R} = \frac{l}{\mu \,.\, s}.$$

l—długość, s—stały przekrój strumienia, przebiegającego w ośrodku o przenikliwości magnetycznej μ.

Wymiar $\mathbf{R} = L \,.\, L^{-2} \,.\, [\mu]^{-1} = L^{-1} \,.\, [\mu]^{-1}$.

Układ elektromagnetyczny. Zasadniczą wielkością jest tu masa magnetyczna, którą określamy na zasadzie wzoru Coulomba (patrz str. 5). We wzorze tym, oprócz mas magnetycznych, siły i odległości biegunów, mamy spółczynnik

zależny od rodzaju ośrodka, w którym znajdują się bieguny. Wymiaru tego czynnika, zwanego przenikliwością lub zdolnością magnetyczną ośrodka, wyznaczyć nie możemy, pozostawiamy go więc we wszystkich równaniach wymiarowych jako czynnik mający pewien wymiar. $[\mu]$:

Masa magnetyczna. W nauce magnetyzmu podstawowe równanie Coulomba wyraża siłę przyciągania lub odpychania dwuch mas magnetycznych wzorem:

$$f = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r_2}.$$

m_1 i m_2 są to masy biegunów magnetycznych, znajdujących się w odległości r jeden od drugiego, w ośrodku o przenikliwości magnetycznej μ.

Zakładając: $m_1 = m_2 = m$, otrzymamy

$$m = r \,.\, \sqrt{\mu \,.\, f}\,.$$

Stąd:

$$\text{Wymiar: } m = L \,.\, \sqrt{[\mu] \,.\, M \,.\, L \,.\, T^{-2}} = L^{\frac{3}{2}} \,.\, M^{\frac{1}{2}} \,.\, T^{-1} \,.\, [\mu]^{\frac{1}{2}}\,.$$

Natężenie pola magnetycznego. Na str. 6 mamy wzór:

$$H = \frac{F}{m}.$$

Stąd:

$$\text{Wymiar: } H = M \,.\, L \,.\, T^{-2} \,.\, L^{-\frac{3}{2}} \,.\, M^{-\frac{1}{2}} \,.\, T \,.\, [\mu]^{-\frac{1}{2}} = L^{-\frac{1}{2}} \,.\, M^{\frac{1}{2}} \,.\, T^{-1} \,.\, [\mu]^{-\frac{1}{2}}\,.$$

Indukcja magnetyczna. Na str. 30 mamy wzór:

$$B = \mu \,.\, H.$$

Stąd:

$$\text{Wymiar: } B = L^{-\frac{1}{2}} \,.\, M^{\frac{1}{2}} \,.\, T^{-1} \,.\, [\mu]^{\frac{1}{2}}\,.$$

Strumień magnetyczny. Na str. 48 mamy wzór:

$$N = B \,.\, s\,.$$

Stąd:

$$\text{Wymiar: } N = L^{-\frac{1}{2}} \,.\, M^{\frac{1}{2}} \,.\, T^{-1} \,.\, [\mu]^{\frac{1}{2}} \,.\, L^2 = L^{\frac{3}{2}} \,.\, M^{\frac{1}{2}} \,.\, T^{-1} \,.\, [\mu]^{\frac{1}{2}}\,.$$

Opór magnetyczny. Według wzoru na str. 59.

$$\text{Wymiar: } \mathbf{R} = L^{-1} \,.\, [\mu]^{-1}\,.$$

Siła magnetomotoryczna. Jeżeli przez M oznaczymy siłę magnetomotoryczną i przez $\mathbf{R}$ opór magnetyczny, to według wzorów podanych na str. 59 wypadnie:

$$N = \frac{M}{\mathbf{R}},$$

Stąd:

$$M = N \,.\, \mathbf{R}\,.$$

$$\text{Wymiar: } M = L^{\frac{3}{2}} \,.\, M^{\frac{1}{2}} \,.\, T^{-1} \,.\, \mu^{\frac{1}{2}} \,.\, L^{-1} \,.\, [\mu]^{-1} = L^{\frac{1}{2}} \,.\, M^{\frac{1}{2}} \,.\, T^{-1} \,.\, [\mu]^{-\frac{1}{2}}\,.$$

Od wielkości magnetycznych przejdziemy teraz do wielkości elektrycznych. Są dwa wzory, na podstawie których takie przejście uskutecznić możemy.

Jeżeli siłę magnetomotoryczną oznaczymy przez M, to według wzoru dla siły magnetomotorycznej (str. 59) wypadnie:

$$M = 1{,}256 \, . \, ni.$$

Stąd:

$$i = \frac{M}{1{,}256 \, . \, n}.$$

Ponieważ 1,256 . n jest liczbą oderwaną, więc:

Wymiar: i = wymiarowi: $M = L^{\frac{1}{2}} \, . \, M^{\frac{1}{2}} \, . \, T^{-1} \, . \, [\mu]^{-\frac{1}{2}}$.

Możemy jednak rozumować jeszcze inaczej. Na str. 7 mamy wzór Laplace'a:

$$dH = \frac{dl \, . \, i}{r^2} \, . \, \sin\alpha.$$

Stąd:

$$i = \frac{dH \, . \, r^2}{dl \, . \, \sin\alpha},$$

a przeto:

wymiar: $i = L^{-\frac{1}{2}} \, . \, M^{\frac{1}{2}} \, . \, T^{-1} \, . \, [\mu]^{-\frac{1}{2}} \, . \, L^2 \, . \, L^{-1} = L^{\frac{1}{2}} \, . \, M^{\frac{1}{2}} \, . \, T^{-1} \, . \, [\mu]^{-\frac{1}{2}}$.

Ilość elektryczności. Na str. 11 mamy wzór:

$$q = i \, . \, t,$$

stąd:

Wymiar: $q = L^{\frac{1}{2}} \, . \, M^{\frac{1}{2}} \, . \, T^{-1} \, . \, [\mu]^{-\frac{1}{2}} \, . \, T = L^{\frac{1}{2}} \, . \, M^{\frac{1}{2}} \, . \, [\mu]^{-\frac{1}{2}}$.

Napięcie (różnica potencjałów). Na str. 13 mamy wzór:

$$e = \frac{A}{q},$$

Stąd:

Wymiar: $e = M \, . \, L \, . \, T^{-2} \, . \, L \, . \, L^{-\frac{1}{2}} \, . \, M^{-\frac{1}{2}} \, . \, [\mu]^{\frac{1}{2}} = L^{\frac{3}{2}} \, . \, M^{\frac{1}{2}} \, . \, T^{-2} \, . \, [\mu]^{\frac{1}{2}}$.

Ten sam wymiar ma siła elektromotoryczna.

Opór elektryczny. Na str. 21 mamy wzór:

$$r = \frac{W}{i^2}.$$

Stąd:

Wymiar: $r = M \, . \, L^2 \, . \, T^{-3} \, . \, L^{-1} \, . \, M^{-1} \, . \, T^2 \, . \, [\mu] = L \, . \, T^{-1} \, . \, [\mu]$.

Spółczynnik samoindukcji. Według wzoru (1) (str. 70) mamy:

$$L = \frac{n \, . \, N_t}{i_t},$$

n—jest liczbą oderwaną, więc:

Wymiar: $L = L^{\frac{3}{2}} \, . \, M^{\frac{1}{2}} \, . \, T^{-1} \, . \, [\mu]^{\frac{1}{2}} \, . \, L^{-\frac{1}{2}} \, . \, M^{-\frac{1}{2}} \, . \, T \, . \, [\mu]^{\frac{1}{2}} = L \, . \, [\mu]$.

W tym układzie równań spółczynnik samoindukcji ma wymiar długości pomnożonej przez wymiar przenikliwości magnetycznej.

Pojemność elektryczna. Na str. 89 mamy wzór:

$$C = \frac{q}{e}.$$

Stąd:

Wymiar: $C = L^{\frac{1}{2}} \, . \, M^{\frac{1}{2}} \, . \, [\mu]^{-\frac{1}{2}} \, . \, L^{-\frac{3}{2}} \, . \, M^{-\frac{1}{2}} \, . \, T^2 \, . \, [\mu]^{-\frac{1}{2}} = L^{-1} \, . \, T^2 \, . \, [\mu]^{-1}$.

Wymiary dla ważniejszych wielkości znalezione w powyższych układach zestawiamy w tablicy, gdzie podajemy również stosunek wymiaru elektrostatycznego do elektromagnetycznego:

Nazwa wielkości.	Oznaczenie.	Wymiar w układzie:		Stosunek wymiaru elektrostatycznego do elektromagnetycznego.
		elektrost.	elektromag.	
Ilość elektryczności	q	$L^{\frac{3}{2}} . M^{\frac{1}{2}} . T^{-1} . [\mathbf{k}]^{\frac{1}{2}}$	$L^{\frac{1}{2}} . M^{\frac{1}{2}} . [\mu]^{-\frac{1}{2}}$	$L . T^{-1} . [\mathbf{k}]^{\frac{1}{2}} . [\mu]^{\frac{1}{2}}$
Napięcie elektryczne . . .	e	$L^{\frac{1}{2}} . M^{\frac{1}{2}} . T^{-1} . [\mathbf{k}]^{-\frac{1}{2}}$	$L^{\frac{3}{2}} . M^{\frac{1}{2}} . T^{-2} . [\mu]^{\frac{1}{2}}$	$L^{-1} . T . [\mathbf{k}]^{-\frac{1}{2}} . [\mu]^{-\frac{1}{2}}$
Pojemność	C	$L . [\mathbf{k}]$	$L^{-1} . T^{2} . [\mu]^{-1}$	$L^{2} . T^{-2} . [\mathbf{k}] . [\mu]$
Siła prądu	i	$L^{\frac{3}{2}} . M^{\frac{1}{2}} . T^{-2} . [\mathbf{k}]^{\frac{1}{2}}$	$L^{\frac{1}{2}} . M^{\frac{1}{2}} . T^{-1} . [\mu]^{-\frac{1}{2}}$	$L . T^{-1} . [\mathbf{k}]^{\frac{1}{2}} . [\mu]^{\frac{1}{2}}$
Opór elektryczny	r	$L^{-1} . T . [\mathbf{k}]^{-1}$	$L . T^{-1} . [\mu]$	$L^{-2} . T^{2} . [\mathbf{k}]^{-1} . [\mu]^{-1}$
Spółczynnik samoindukcji . .	L	$L^{-1} . T^{2} . [\mathbf{k}]^{-1}$	$L . [\mu]$	$L^{-2} . T^{2} . [\mathbf{k}]^{-1} . [\mu]^{-1}$
Natężenie pola magnetycznego	H	$L^{\frac{1}{2}} . M^{\frac{1}{2}} . T^{-2} . [\mathbf{k}]^{\frac{1}{2}}$	$L^{-\frac{1}{2}} . M^{\frac{1}{2}} . T^{-1} . [\mu]^{-\frac{1}{2}}$	$L . T^{-1} . [\mathbf{k}]^{\frac{1}{2}} . [\mu]^{\frac{1}{2}}$
Masa magnetyczna	m	$L^{\frac{1}{2}} . M^{\frac{1}{2}} . [\mathbf{k}]^{-\frac{1}{2}}$	$L^{\frac{3}{2}} . M^{\frac{1}{2}} . T^{-1} . [\mu]^{\frac{1}{2}}$	$L^{-1} . T . [\mathbf{k}]^{-\frac{1}{2}} . [\mu]^{-\frac{1}{2}}$
Indukcja magnetyczna . . .	B	$L^{\frac{1}{2}} . M^{\frac{1}{2}} . T^{-2} . [\mathbf{k}]^{\frac{1}{2}} . [\mu]$	$L^{-\frac{1}{2}} . M^{\frac{1}{2}} . T^{-1} . [\mu]^{\frac{1}{2}}$	$L . T^{-1} . [\mathbf{k}]^{\frac{1}{2}} . [\mu]^{\frac{1}{2}}$
Strumień magnetyczny . . .	N	$L^{\frac{5}{2}} . M^{\frac{1}{2}} . T^{-2} . [\mathbf{k}]^{\frac{1}{2}} . [\mu]$	$L^{\frac{3}{2}} . M^{\frac{1}{2}} . T^{-1} . [\mu]^{\frac{1}{2}}$	$L . T^{-1} . [\mathbf{k}]^{\frac{1}{2}} . [\mu]^{\frac{1}{2}}$
Siła magnetomotoryczna . .	M	$L^{\frac{3}{2}} . M^{\frac{1}{2}} . T^{-2} . [\mathbf{k}]^{\frac{1}{2}}$	$L^{\frac{1}{2}} . M^{\frac{1}{2}} . T^{-1} . [\mu]^{-\frac{1}{2}}$	$L . T^{-1} . [\mathbf{k}]^{\frac{1}{2}} . [\mu]^{\frac{1}{2}}$
Opór magnetyczny	R	$L^{-1} . [\mu]^{-1}$	$L^{-1} . [\mu]^{-1}$	1

Jeżeli teorja podana w tej książce ma stanowić jednolity całokształt nauki o elektryczności i magnetyzmie, to przy dowolnym wyprowadzaniu jednych wielkości z drugich musimy otrzymywać zawsze wymiary te same; uzgodnienie to osiągniemy, określając wymiar iloczynu **k** . μ.

Aby wszystkie wymiary w układzie elektromagnetycznym i elektrostatycznym wypadły zgodnie, podane powyżej stosunki muszą wyrażać się za pomocą jednostki oderwanej.

Załóżmy, że:

$$L \,.\, T^{-1} \,.\, [\mathbf{k}]^{\frac{1}{2}} \,.\, [\mu]^{\frac{1}{2}} = 1,$$

stąd:

$$L \,.\, T^{-1} \,.\, \sqrt{[\mathbf{k}] \,.\, [\mu]} = 1,$$

$$\sqrt{[\mathbf{k}] \,.\, [\mu]} = L^{-1} \,.\, T,$$

$$[\mathbf{k}] \,.\, [\mu] = L^{-2} \,.\, T^2.$$

Równanie to wskazuje, że wymiar iloczynu **k** . μ ma być taki sam, jak jednostki podzielonej przez kwadrat prędkości. Jeżeli więc zrobimy takie założenie, to wszystkie stosunki w powyższej tablicy staną się równe jednostce.

W ten sposób mamy wyznaczony wymiar iloczynu **k** . μ, co zaś do wymiaru każdego czynnika oddzielnie, to na zasadzie podanej tu teorji odnaleźć go nie można.

Dla ułożenia jednak bezwzględnego układu jednostek, opartego na centymetrze, gramie i sekundzie, jest rzeczą niezbędną znać wymiary obu czynników **k** i μ. Maxwell wprowadził do nauki dwa bezwzględne układy jednostek: elektrostatyczny, który opiera się na założeniu, że **k** jest liczbą oderwaną i wtedy:

$$[\mu] = L^{-2} \,.\, T^2$$

i elektromagnetyczny, oparty na założeniu, że μ jest liczbą oderwaną, wtedy:

$$[\mathbf{k}] = L^{-2} \,.\, T^2.$$

Przy określeniu jednostek Maxwell przyjął w układzie elektrostatycznym dla powietrza $\mathbf{k} = 1$, a w układzie elektromagnetycznym dla powietrza $\mu = 1$.

Chcąc otrzymać wymiary jednostek w bezwzględnym układzie elektrostatycznym, należy w powyższej tablicy [**k**] opuścić, a zamiast [μ] napisać: $L^{-2} \,.\, T^2$.

Chcąc zaś otrzymać wymiary jednostek w bezwzględnym układzie elektromagnetycznym, należy [μ] opuścić, a zamiast [**k**] napisać $L^{-2} \,.\, T^2$.

Najważniejszy jest bezwzględny układ elektromagnetyczny; na podstawie tego układu przyjęte są jednostki praktyczne, które stanowią wielokrotność dziesiętną lub ułamek dziesiętny jednostek bezwzględnych elektromagnetycznych.

5. **Układ bezwzględnych jednostek elektrostatycznych.** Podstawowemi jednostkami są tu *cm.*, *gr.* i *s.*; w tych jednostkach wyrażać będziemy wymiary jednostek elektromagnetycznych. Dla powietrza $\mathbf{k} = 1$, μ ma wymiar $cm^{-2} \,.\, s^2$.

Opierając się na wynikach rozumowań paragrafu poprzedniego, otrzymamy

następujące określenia poszczególnych bezwzględnych jednostek elektrostatycznych: [1])

Ilość elektryczności. Wymiar jednostki ilości elektryczności będzie:

$$cm^{\frac{3}{2}} . gr^{\frac{1}{2}} . s^{-1} .$$

Bezwzględną jednostkę elektrostatyczną ładunku elektrycznego określimy jako jedną z dwuch liczbowo równych ilości elektryczności, skupionych w dwuch punktach, znajdujących się w odległości jednego centymetra jeden od drugiego w powietrzu, gdy siła przyciągania lub odpychania, działająca pomiędzy temi ilościami elektryczności, wynosi jedną dynę.

Gęstość powierzchniowa elektryczności. Wymiar jednostki gęstości ładunku będzie:

$$cm^{-\frac{1}{2}} . gr^{\frac{1}{2}} . s^{-1} .$$

Jednostkę bezwzględną stanowi taka gęstość ładunku, przy której na 1 cm^2 powierzchni przypada jednostka elektrostatyczna ładunku elektrycznego.

Natężenie pola elektrycznego. Wymiar jednostki natężenia pola będzie:

$$cm^{-\frac{1}{2}} . gr^{\frac{1}{2}} . s^{-1} .$$

Jednostkę bezwzglądną natężenia pola elektrycznego określimy jako natężenie takiego pola, które na jednostkę bezwzględną ilości elektryczności działa z siłą jednej dyny.

Różnica potencjałów (napięcie). Wymiar jednostki różnicy potencjałów jest:

$$cm^{\frac{1}{2}} . gr^{\frac{1}{2}} . s^{-1} .$$

Jednostką bezwzględną napięcia będzie różnica potencjałów dwuch punktów, pomiędzy którymi, przenosząc jedną bezwzględną jednostkę ilości elektryczności, otrzymamy albo wykonamy jeden erg pracy.

Pojemność. Wymiar pojemności jest:

$$cm .$$

Bezwzględną jednostką pojemności jest pojemność kondensatora, do którego wprowadzić należy jedną bezwzględną jednostkę elektryczności na każdą z okładek, aby różnica potencjałów wynosiła jedną bezwzględną jednostkę napięcia.

W podobny sposób można określić wartość wszystkich innych jednostek elektromagnetycznych, mając na uwadze, że przenikliwość magnetyczna μ jest tu wielkością mianowaną.

Przenikliwość magnetyczna. Wymiar tej wielkości jest:

$$cm^{-2} . s^2 .$$

Jednostkę określimy przez następujące rozumowanie. Według teorji ruchu

[1]) Przytaczamy tu tylko niektóre ważniejsze.

fal elektromagnetycznych [1]), podanej przez Maxwella, prędkość biegu fal elektromagnetycznych w ośrodku o przenikliwości magnetycznej μ i zdolności elektrycznej **k**, wynosi:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{k} \cdot \mu}},$$

stąd:

$$\mu = \frac{1}{v^2 \cdot \mathbf{k}}.$$

W rozważanym układzie μ będzie jednostką, gdy $v^2 \cdot \mathbf{k} = 1$, a więc $v = \sqrt{\frac{1}{\mathbf{k}}}$.

Stąd **jednostkę elektrostatyczną przenikliwości magnetycznej ma taki ośrodek, w którym fale elektromagnetyczne biegną z prędkością, równą** $\sqrt{\frac{1}{\mathbf{k}}}$ **centymetrów na sekundę.**

Z doświadczeń wiemy, że w powietrzu fale elektromagnetyczne biegną z prędkością

$$3 \cdot 10^{10}\, cm \cdot s^{-1},$$

a **k**, według założenia $= 1$, więc dla powietrza:

$$\mu = \frac{1}{3^2 \cdot 10^{20}} = 1{,}11 \cdot 10^{-21}\, cm^{-2} \cdot s^2.$$

6. **Układ bezwzględnych jednostek elektromagnetycznych.** Podstawowemi jednostkami są tu *cm*, *gr* i *s*.; w tych jednostkach wyrażać będziemy wymiary jednostek elektromagnetycznych. Dła powietrza $\mu = 1$, **k** ma wymiar $cm^{-2} \cdot s^2$.

Opierając się na wynikach rozumowań podanych w § 4, otrzymamy określenia poszczególnych bezwzględnych jednostek elektromagnetycznych następujące:

M a s a   m a g n e t y c z n a. Wymiar jednostki masy magnetycznej będzie:

$$cm^{\frac{3}{2}} \cdot gr^{\frac{1}{2}} \cdot s^{-1}.$$

Jednostką masy magnetycznej jest **jedna z dwuch równych mas, skupionych w biegunach, znajdujących się w odległości jednego centymetra jeden od drugiego w powietrzu, gdy bieguny te przyciągają się do siebie lub odpychają z siłą jednej dyny.**

N a t ę ż e n i e   p o l a   m a g n e t y c z n e g o. Wymiar jednostki jest następujący:

$$cm^{-\frac{1}{2}} \cdot gr^{\frac{1}{2}} \cdot s^{-1}.$$

Jednostkę natężenia pola magnetycznego ma takie pole, które na jednostkę masy magnetycznej działa z siłą jednej dyny.

Jednostka taka nazywa się **gaus.**

I n d u k c j a   m a g n e t y c z n a. W tym układzie indukcja magnetyczna ma ten sam wymiar i tę samą jednostkę, co natężenie pola.

---

[1]) Patrz pr. A. Witkowskiego „Zasady fizyki" t. III, str. 626 i 627.

Strumień indukcji magnetycznej. Wymiar jednostki strumienia magnetycznego jest:

$$cm^{\frac{3}{2}} \cdot gr^{\frac{1}{2}} \cdot s^{-1}.$$

Jednostką strumienia indukcji magnetycznej jest strumień, przenikający płaszczyznę o jednym centymetrze kwadratowym powierzchni, prostopadłą do linji indukcji w polu jednostajnym, w którym indukcja wynosi jednostkę.

Jednostka taka nazywa się **makswel.** [1])

Siła prądu. Wymiar jednostki siły prądu w bezwzględnym układzie elektromagnetycznym jest następujący:

$$cm^{\frac{1}{2}} \cdot gr^{\frac{1}{2}} \cdot s^{-1}.$$

Określimy najwłaściwiej tę jednostkę, opierając się na wzorze: (patrz str. 8).

$$H = \frac{2\pi \cdot i}{R}.$$

H jest to natężenie pola, wywołane przez prąd kołowy. Oznaczmy przez H' natężenie pola, wywołane przez jednostkę długości obwodu tego koła, wtedy:

$$H' = \frac{H}{2\pi R} = \frac{i}{R^2},$$

stąd:

$$i = H' \cdot R^2.$$

Z tego wzoru wynika, że przy $R = 1$, $H' = 1$ i $i = 1$. Możemy więc określić jednostkę siły prądu w sposób następujący:

Jednostkę siły posiada taki prąd, przepływający po obwodzie koła o promieniu 1 *cm*, którego cząstka długości, wynosząca 1 *cm*, wywołuje w środku koła pole magnetyczne o natężeniu równym jednostce.

Ilość elektryczności. Wymiar jednostki ilości elektryczności jest:

$$cm^{\frac{1}{2}} \cdot gr^{\frac{1}{2}}.$$

Jednostką jest ilość elektryczności, która w ciągu sekundy przebiega przez każdy przekrój przewodnika, jeśli po tym przewodniku płynie prąd, którego siła jest jednostką.

Napięcie [2]). Wymiar napięcia jest:

$$cm^{\frac{3}{2}} \cdot gr^{\frac{1}{2}} \cdot s^{-2}.$$

Napięcie pomiędzy dwoma punktami w polu elektrycznym (np. na przewodniku) **wtedy równa się jednostce, gdy, przy przesuwaniu pomiędzy temi punktami jednostki ilości elektryczności, wykonywamy lub otrzymujemy pracę jednego erga.**

Siła elektomotoryczna. Wymiar i jednostki siły elektromotorycznej są takie same, jak napięcia. Można jednak określić ją, rozumując inaczej.

Na stronie 182 mieliśmy wyraz dla siły elektromotorycznej idukcji:

$$E_t = -\frac{d N_t}{dt}.$$

---

[1]) Od nazwiska uczonego, Maxwella.
[2]) To samo, co różnica potencjałów.

Na zasadzie tego wzoru:

$$\text{Wymiar } E = cm^{\frac{3}{2}} \cdot gr^{\frac{1}{2}} \cdot s^{-1} \cdot s^{-1} = cm^{\frac{3}{2}} \cdot gr^{\frac{1}{2}} \cdot s^{-2}.$$

Jednostkę siły elektromotorycznej określimy w sposób następujący. **Siła elektromotoryczna równa jednostce powstaje wtedy w obwodzie elektrycznym, gdy w ciągu jednostki czasu strumień magnetyczny, objęty tym obwodem, zmienia się o jednostkę.**

Opór elektryczny. Wymiar jednostki oporu jest następujący:

$$cm \cdot s^{-1}.$$

Według wzoru Joule'a (str. 21) jednostkę oporu określimy w ten sposób: **Jednostkę oporu stanowi opór takiego przewodnika, w którym przy sile prądu równej jednostce, moc, wynosząca jeden erg na sekundę, wytwarza ciepło.**

Według prawa Ohma: **jednostkę oporu ma taki przewodnik, na którego końcach napięcie jest równe jednostce, gdy po przewodniku przepływa prąd, wynoszący jednostkę.**

Pojemność. Wymiar jednostki pojemności będzie:

$$cm^{-1} \cdot s^2.$$

Jednostkę pojemności możemy określić np. ze wzoru (patrz str. 90):

$$i_t = C \cdot \frac{d\,e_t}{dt}.$$

Jednostkę pojemności ma taki kondensator, przez który płynie prąd chwilowy, równy jednostce, gdy napięcie na okładkach kondensatora w ciągu sekundy zmienia się o jednostkę.

Spółczynnik samoindukcji. Wymiar jednostki spółczynnika samoindukcji stanowi:

$$cm.$$

Spółczynnik ten mierzy się więc w centymetrach.

Określenie jednostki może być różne, zależnie od wzoru, na którym się w określeniu opieramy.

Według wzoru (1) na str. 70: **obwód elektryczny ma spółczynnik samoindukcji równy jednostce, gdy, przy sile prądu wynoszącej jednostkę, obwód ten obejmuje jednostkowy strumień magnetyczny.**

Według wzoru (3) na str. 70, **obwód elektryczny ma wtedy spółczynnik samoindukcji — jednostkę, gdy w obwodzie tym powstaje siła elektromotoryczna, równa jednostce przy zmianie siły prądu o jednostkę w ciągu jednej sekundy.**

Zdolność elektryczna ośrodka. Wymiar tej wielkości stanowi:

$$cm^{-2} \cdot s^2.$$

Na podstawie wzoru, wyrażającego prędkość ruchu fal elektromagnetycznych w ośrodku o przenikliwości magnetycznej μ i zdolności elektrycznej $\mathbf{k}$ wynika, że:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{k} \cdot \mu}},$$

przeto:

$$\mathbf{k} = \frac{1}{v^2 \cdot \mu}$$

W rozważanym układzie **k** będzie jednostką, gdy $v^2 \cdot \mu = 1$, a więc $v = \sqrt{\frac{1}{\mu}}$.

Stąd jednostkę bezwzględną elektromagnetyczną zdolności elektrycznej ma taki ośrodek, w którym fale elektromagnetyczne biegną z prędkością $v = \sqrt{\frac{1}{\mu}}$.

Ponieważ z doświadczeń wiemy, że w powietrzu fale elektromagnetyczne biegną z prędkością $3 \cdot 10^{10}\, cm \cdot s^{-1}$, a w rozważanym układzie jednostek dla powietrza $\mu = 1$, a więc dla powietrza:

$$\mathrm{k} = \frac{1}{3^2 \cdot 10^{20}} = 1{,}11 \cdot 10^{-21}\, cm^{-2} \cdot s^2 .$$

7. **Przykłady stosowania jednostek bezwzględnych elektromagnetycznych.** Obliczyć siłę, z którą odpychają się od siebie dwa miligramy jonów wodoru, umieszczone w powietrzu na odległości jednego centymetra jeden od drugiego.

Gramrównoważnik wodoru wynosi 1 *gr* [1]), przeto jeden miligram zawiera ładunek:

$$0{,}001 \cdot 96540 \text{ kulombów, } ^{1})$$

albo: $$0{,}0001 \cdot 96540 \text{ bezwzgl. jedn. elektrom. } ^{2})$$

Na zasadzie prawa Coulomba:

$$f = \frac{1}{\mathrm{k}} \cdot \frac{q^2}{r^2},$$

$$\mathrm{k} = 1{,}11 \cdot 10^{-21}, \qquad q = 9{,}654, \qquad r = 1, \text{ więc:}$$

$$f = 8{,}39 \cdot 10^{22} \text{ dyn.}$$

Ponieważ 1 *grc* = 981 dyn, więc:

$$f = 0{,}855 \cdot 10^{14} \text{ tonn.}$$

Wynik ten jest ciekawy, gdyż daje pojęcie o wielkości sił, działających pomiędzy jonami.

Obliczmy w przybliżeniu pojemność kondensatora z izolacją szklaną, mającego kształt cylindra z dnem; średnica cylindra wynosi 10 *cm*. Szkło jest oklejone cynfolją na dnie i z boków na wysokość 10 *cm* zewnątrz i wewnątrz. Stała dielektryczna szkła = 7. Grubość szkła wszędzie jednakowa = 2 *mm*. Zdolność elektryczna w jednostkach bezwzględnych elektromagnetycznych będzie:

$$1{,}11 \cdot 10^{-21} \cdot 7 .$$

Dla obliczenia pojemności zastosujemy wzór, wyprowadzony dla kondensatora płaskiego: [3])

---

[1]) Patrz rozdział XVII.

[2]) Patrz § 10 niniejszego rozdziału.

[3]) Patrz rozdział IX § 7.

$$C = \frac{\mathbf{k} \cdot S}{4\pi \cdot d},$$

$$S = \pi \cdot 5^2 + 2\pi \cdot 5 \cdot 10 = 125\pi,$$

$$C = \frac{1{,}11 \cdot 10^{-21} \cdot 7 \cdot 125 \cdot \pi}{4 \cdot \pi \cdot 0{,}2},$$

stąd:

$$C = 1{,}215 \cdot 10^{-18} \text{ bezwzgl. jedn. elektrom.}$$

Według § 10, 1 mikrofarada $= 10^{-15}$ bezwzgl. jedn. elektrom., więc:

$$C = 1{,}215 \cdot 10^{-3} \text{ mikrofarada.}$$

8. Stosunek jednostek bezwzględnych elektrostatycznych do elektromagnetycznych. Oznaczmy przez q_s jeden z dwuch równych ładunków elektrycznych, wyrażonych w jednostkach bezwzględnych elektrostatycznych. Załóżmy, że te ładunki są skupione w dwuch punktach, znajdujących się w odległości r jeden od drugiego w ośrodku, którego zdolność elektryczna jest $\mathbf{k}_s$. Wtedy siła współdziałania pomiędzy temi ładunkami wyrazi się wzorem:

$$f = \frac{1}{\mathbf{k}_s} \cdot \frac{q_s^2}{r^2}.$$

Jeżeli te same ładunki, wyrażone w jednostkach bezwzględnych elektromagnetycznych, oznaczymy przez q_m, to w tym układzie jednostek zdolność elektryczna ośrodka będzie $\mathbf{k}_m$ i:

$$f = \frac{1}{\mathbf{k}_m} \cdot \frac{q_m^2}{r^2}.$$

Z tych dwuch równań wypada:

$$\frac{q_s^2}{r^2} = \frac{\mathbf{k}_s}{\mathbf{k}_m} \cdot \frac{q_m^2}{r^2}.$$

$$\frac{q_s}{q_m} = \sqrt{\frac{\mathbf{k}_s}{\mathbf{k}_m}}.$$

$\mathbf{k}_s$ jest liczbą oderwaną, natomiast $\mathbf{k}_m$ ma wymiar $cm^{-2} \cdot s^2$, t. j. wymiar odwrotności kwadratu prędkości, więc wymiar $\sqrt{\frac{\mathbf{k}_s}{\mathbf{k}_m}}$ jest wymiarem prędkości. Z tego powodu oznaczamy ten pierwiastek zwykle przez v i piszemy:

$$\frac{q_s}{q_m} = v.$$

Na podstawie wzorów, wyrażających związek pomiędzy różnemi wielkościami w nauce o elektromagnetyzmie, znajdziemy stosunki następujące: [1])

Siła prądu:

$$i_s = \frac{q_s}{t}; \qquad i_m = \frac{q_m}{t}.$$

---

[1]) Wszystkie litery ze znakiem s wyrażają odpowiednie wielkości w jednostkach bezwzględnych elektrostatycznych, a ze znakiem m — w jednostkach bezwzględnych elektromagnetycznych.

Stąd:

$$\frac{i_s}{i_m} = \frac{q_s}{q_m} = v.$$

N a p i ę c i e: Praca przy ruchu elektryczności w obu układach bezwzględnych wyraża się tą samą liczbą i posiada jeden wymiar. Łatwo to stwierdzić, wypisując wymiary z tablicy, podanej na str. 280.

Wymiar: e. Wymiar: q = Wymiar: A.

W jednostkach elektrostatycznych otrzymamy:

$$L^{\frac{1}{2}} . M^{\frac{1}{2}} . T^{-1} . [\mathbf{k}]^{-\frac{1}{2}} . L^{\frac{3}{2}} . M^{\frac{1}{2}} . T^{-1} . [\mathbf{k}]^{\frac{1}{2}} = L^2 . M . T^{-2}.$$

W jednostkach elektromagnetycznych:

$$L^{\frac{3}{2}} . M^{\frac{1}{2}} . T^{-2} . [\mu]^{\frac{1}{2}} . L^{\frac{1}{2}} . M^{\frac{1}{2}} . [\mu]^{-\frac{1}{2}} = L^2 . M . T^{-2}.$$

Możemy więc napisać:

$$e_s = \frac{A}{q_s}; \qquad e_m = \frac{A}{q_m},$$

stąd:

$$\frac{e_s}{e_m} = \frac{q_m}{q_s} = v^{-1}.$$

O p ó r e l e k t r y c z n y:

$$r_s = \frac{e_s}{i_s}; \qquad r_m = \frac{e_m}{i_m},$$

stąd:

$$\frac{r_s}{r_m} = \frac{e_s . i_m}{e_m . i_s} = v^{-1} . v^{-1} = v^{-2}.$$

P o j e m n o ś ć:

$$C_s = \frac{q_s}{e_s}; \qquad C_m = \frac{q_m}{e_m},$$

stąd:

$$\frac{C_s}{C_m} = \frac{q_s . e_m}{q_m . e_s} = v . v = v^2.$$

Z d o l n o ś ć e l e k t y c z n a o ś r o d k a: Stosownie do oznaczenia, wprowadzonego na początku niniejszego paragrafu:

$$\frac{\mathbf{k}_s}{\mathbf{k}_m} = v^2.$$

Z d o l n o ś ć m a g n e t y c z n a o ś r o d k a: Według teorji ruchu fal elektromagnetycznych, wprowadzając $\mathbf{k}$ i μ w jednostkach elektrostatycznych, szybkość tego ruchu wyrażamy wzorem:

$$\sqrt{\frac{1}{\mathbf{k}_s . \mu_s}},$$

jeżeli zaś **k** i μ wyrazimy w jednostkach elektromagnetycznych, to ta sama prędkość wyrazi się wzorem:

$$\frac{1}{\sqrt{k_m \cdot \mu_m}}.$$

Możemy więc napisać równanie:

$$\frac{1}{\sqrt{k_s \cdot \mu_s}} = \frac{1}{\sqrt{k_m \cdot \mu_m}},$$

stąd:

$$k_s \cdot \mu_s = k_m \cdot \mu_m,$$

$$\frac{\mu_s}{\mu_m} = \frac{k_m}{k_s} = v^{-2}.$$

Zestawiając wyniki powyższych rozważań, widzimy, że **stosunki wielkości** elektromagnetycznych, wyrażonych w układzie elektrostatycznym i elektromagnetycznym wyrażają się pewną prędkością w różnych potęgach.

Stosunki jednostek w układach elektrostatycznym i elektromagnetycznym są **odwrotne** względem podanych powyżej stosunków odpowiednich wielkości. [1])

Wymiary wszystkich wielkości mechanicznych w obu układach są jednakowe i wielkości te wyrażają się liczbami jednakowemi.

9. Doświadczalne wyznaczenie wielkości „v“. Wyznaczyć „v“ można w różny sposób. Ze wzorów paragrafu poprzedniego widzimy, że wystarcza w tym celu wymierzyć jakąkolwiek wielkość w jednostkach bezwzględnych elektrostatycznych i w jednostkach bezwzględnych elektromagnetycznych; mając te liczby, z powyższych wzorów, łatwo obliczyć „v“.

Wyznaczenie „v“ przez pomiar ilości elektryczności. W roku 1856 Weber i Kohlrausch zmierzyli za pomocą wagi skręceń Coulomba określoną część ładunku kondensatora. Zasada wagi skręceń polega na tym, że jedna z dwuch kulek naładowanych elektrycznością jest umieszczona na drążku poziomym, zawieszonym na druciku. Siłę odpychania tych kuleczek równoważy moment sił sprężystych skręconego drucika. Mierząc kąt skręcenia, łatwo oznaczyć siłę odpychania kuleczek, a stąd obliczyć według wzoru Coulomba ładunki w jednostkach elektrostatycznych.

Uczeni ci mierzyli następnie ładunek wspomnianego powyżej kondensatora w jednostkach elektromagnetycznych, wyładowując go przez galwanometr balistyczny. [2]) Według pomiarów Webera i Kohlrauscha $v = 3{,}107 \,.\, 10$ $cm\ sek.^{-1}$.

Wyznaczenie „v“ przez mierzenie napięcia. Mierząc siłę prądu w przewodniku o wiadomym oporze, lord Kelvin wyznaczył w jednostkach bezwzględnych elektromagnetycznych napięcie pomiędzy końcami tego przewodnika.

Następnie to samo napięcie zmierzył za pomocą elektrometru bezwzględnego,

---

[1]) Patrz wstęp do niniejszego rozdziału.

[2]) Patrz rozdział XXXVI.

którego zasada jest oparta na przyciąganiu się dwuch płytek kondensatora. Z równania (patrz str. 222).

$$F = \frac{8\pi . d^2}{e^2 . S} . \mathbf{k}$$

można wyznaczyć e, znając F, d, S i przyjmując dla powietrza $\mathbf{k} = 1$.

Według pomiarów lorda Kelvina:

$$v = 3{,}004 . 10^{10} \, cm . sek.^{-1}.$$

W y z n a c z e n i e „v“ p r z e z m i e r z e n i e p o j e m n o ś c i. Ayrton i Perry w roku 1878 obliczyli z wymiarów pojemność pewnego kondensatora w jednostkach elektrostatycznych i następnie określili tę pojemność z napięcia i ładunku, zmierzonych w bezwzględnych jednostkach elektromagnetycznych.

Ayrton i Perry otrzymali:

$$v = 2{,}980 . 10^{10} \, cm \, sek.^{-1}.$$

W y z n a c z e n i e „v“ p r z e z m i e r z e n i e p r ę d k o ś c i ś w i a t ł a. Według wzmianki w § 5 i 6, prędkość ruchu fal elektromagnetycznych wyraża się wzorem:

$$\frac{1}{\sqrt{\mathbf{k} . \mu}}.$$

Jeżeli $\mathbf{k}$ i μ wyrażamy w jednostkach bezwzględnych elektromagnetycznych, to wyraz tej prędkości będzie:

$$\frac{1}{\sqrt{\mathbf{k}_m . \mu_m}}.$$

Gdy ośrodkiem jest powietrze, to $\mu_m = 1$, a z poprzedniego paragrafu:

$$\sqrt{\frac{\mathbf{k}_s}{\mathbf{k}_m}} = v;$$

lecz dla powietrza $\mathbf{k}_s = 1$, przeto otrzymamy:

$$\mathbf{k}_m = \frac{1}{v^2}.$$

Uwzględniając te wartości dla μ_m i $\mathbf{k}_m$, będzie:

$$\frac{1}{\sqrt{\mathbf{k}_m . \mu_m}} = v.$$

Prędkość więc, określająca stosunek wielkości, wyrażonych w jednostkach bezwzględnych elektrostatycznych i elektromagnetycznych, równa się prędkości ruchu fal elektromagnetycznych w powietrzu. Prędkość ta na zasadzie elektromagnetycznej teorji światła równa się prędkości światła w powietrzu (ściślej w próżni) [1]. Według pomiarów spółczesnych liczba, wyrażająca szybkość światła w powietrzu, wynosi: 3 . 10^{10} *cm/sek.*

---

[1]) Patrz „Zasady fizyki“ prof. A. Witkowskiego, t. III.

10. Praktyczny układ jednostek elektromagnetycznych. Niektóre jednostki bezwzględne są zbyt wielkie lub też zbyt małe, a więc niedogodne przy wyrażaniu odpowiednich wielkości we wzorach liczbowych. W celu uniknięcia tej niedogodności, stosujemy dla wielkości częściej używanych jednostki praktyczne, których szczegółowe zestawienie podaję poniżej.

P r ą d. Do mierzenia prądu przyjęto w praktyce jednostkę, wynoszącą 0,1 część jednostki bezwzględnej elektromagnetycznej i nazwano ją **amperem** (oznaczenie A).

I l o ś ć e l e k t r y c z n o ś c i. Gdy za jednostkę czasu przyjmiemy sekundę, to ilość elektryczności według wzoru $q = it$, odpowiadająca jednemu amperowi i jednej sekundzie, wynosi 0,1 część bezwzględnej jednostki elektromagnetycznej. Taka jednostka nazywa się **kulombem** (oznaczenie C).

Przyjmując za jednostkę czasu godzinę, otrzymamy jednostkę ilości elektryczności, która nazywa się **amperogodziną** (oznaczenie Ah); wynosi ona oczywiście 3600 kulombów.

N a p i ę c i e i s i ł a e l e k t r o m o t o r y c z n a. Przyjmując za jednostkę pracy dżaul, a za jednostkę ilości elektryczności — kulomb, otrzymamy według wzoru $e = \frac{A}{q}$ jednostkę praktyczną napięcia **wolt** (oznaczenie V).

Biorąc pod uwagę, że jeden dżaul $= 10^7$ ergów, a jeden kulomb $= 10^{-1}$ jednostki bezwzględnej ilości elektryczności, otrzymamy:

$$\text{jeden wolt} = \frac{10^7}{10^{-1}} = 10^8 \text{ bezwzględnych jednostek elektromagnetycznych.}$$

O p ó r. Jeżeli za jednostkę napięcia przyjmiemy wolt, a za jednostkę prądu — amper, to według wzoru $r = \frac{e}{i}$ otrzymamy jednostkę oporu **om** (oznaczenie Ω). Według powyżej wskazanych zależności:

$$\text{jeden om} = \frac{10^8}{10^{-1}} = 10^9 \text{ bezwzględnych jednostek elektromagnetycznych.}$$

P o j e m n o ś ć. Wyrażając ilość elektryczności w kulombach, a napięcie w woltach, otrzymamy na podstawie wzoru $C = \frac{q}{e}$ pojemność w faradach (oznaczenie F). W praktyce stosujemy zwykle jednostkę milion razy mniejszą — mikrofarad (oznaczenie μF):

$$\text{Jeden } \mu F = 10^{-6} \text{ farada.}$$

Według wyżej podanych zależności:

$$\text{jeden mikrofarad} = 10^{-6} \frac{10^{-1}}{10^8} = 10^{-15} \text{ bezwzględnych jednostek elektromagnetycznych.}$$

Obliczenia pojemności przeprowadzają się niekiedy w jednostkach bezwzględnych elektrostatycznych, z tego więc względu należy jeszcze wyprowadzić zależność jednostek praktycznych od elektrostatycznych.

Oznaczmy pojemność pewnego kondensatora w jednostkach bezwzględnych elektrostatycznych przez C_s, a w jednostkach bezwzględnych elektromagnetycznych

przez C_m, wtedy uwzględniając, że zdolność elektryczna ośrodka w jednostkach elektrostatycznych wyraża się za pomocą liczby, stanowiącej stałą dielektryczną, a w jednostkach elektromagnetycznych za pomocą tej samej liczby pomnożonej przez $1{,}11 \,.\, 10^{-21}$, otrzymamy:

$$\frac{C_s}{C_m} = \frac{1}{1{,}11 \,.\, 10^{-21}} = 9 \,.\, 10^{20}.$$

Z tego stosunku wynika, że jednostka elektrostatyczna jest mniejsza od elektromagnetycznej.

Jednostka bezwzgl. elektromagn. pojemności $= 9 \,.\, 10^{20}$ jednostek bezwzgl. elektrost. pojemności.

Więc:

$$1\,\mu F = 10^{-15} \,.\, 9 \,.\, 10^{20} = 9 \,.\, 10^{5} \text{ jedn. bezwzgl. elektrost.}$$

Spółczynnik samoindukcji. Jeżeli za jednostkę siły elektromotorycznej przyjmiemy wolt, za jednostkę prądu amper, a za jednostkę czasu sekundę, to spółczynnik samoindukcji otrzymamy według wzoru $L = \frac{-E}{\frac{di}{dt}}$, wyrażony w **henry** (oznaczenie H). Z podanych powyżej zależności wynika, że:

jeden **henry** $= \frac{10^8}{10^{-1}} = 10^9$ bezwzględnych jednostek elektromagnetycznych czyli centymetrów.

10^9 *cm* wynosi czwartą część południka geograficznego, z tego więc powodu praktyczną jednostkę spółczynnika samoindukcji nazywamy niekiedy **kwadrantem**.

Moc prądu. Iloczyn siły prądu, wyrażonej w amperach, i napięcia w woltach daje moc prądu w watach. Wynika to ze wzoru następującego:

$$e\,(V) \times i\,(A) = e \,.\, 10^8 \times i \,.\, 10^{-1} \text{ (c. g. s.)} = e \,.\, i \,.\, 10^7 \text{ ergów na sekundę} = e \,.\, i \text{ watów.}$$

Praca prądu. Iloczyn siły prądu, wyrażonego w amperach, napięcia w woltach i czasu w sekundach daje pracę prądu w dżaulach. Określa to wzór następujący:

$$e\,(V) \times i\,(A) \times t\,(s) = e \,.\, 10^8 \times i \,.\, 10^{-1} \times t \text{ (c. g. s.)} =$$
$$= eit\ 10^7 \text{ ergów} = eit \text{ dżauli} = eit \text{ watsekund.}$$

Częściej jednak za jednostkę pracy używa się kilowatgodzinę. Obliczenie pracy w kilowatgodzinach przeprowadza się w sposób następujący. Załóżmy, że siła prądu wynosi 5 A, napięcie 120 V, i że prąd jest stały; obliczyć należy jego pracę w ciągu 36 minut.

Na zasadzie wzorów poprzednich, moc prądu:

$$W = 5 \times 120 = 600 \text{ watów} = 0{,}6 \text{ kilowata,}$$

a praca prądu:

$$A = 0{,}6 \,.\, \frac{36}{60} = 0{,}36 \text{ kilowatgodzin.}$$

11. Zestawienie ważniejszych jednostek elektromagnetycznych, mechanicznych i cieplnych. Aby ułatwić korzystanie z wiadomości podanych powyżej, przytaczam zestawienie jednostek praktycznych łącznie z oznaczeniami i liczbami, wyrażającemi ważniejsze stosunki między temi jednostkami.

Jednostki praktyczne:		Jednostka praktyczna zawiera jednostek bezwzględnych:	
nazwa.	oznaczenie.	elektromagnetycznych.	elektrostatycznych.
Kulomb	C	10^{-1}	$3 \cdot 10^{9}$
Amper	A	10^{-1}	$3 \cdot 10^{9}$
Miliamper [1]	mA	10^{-4}	$3 \cdot 10^{6}$
Wolt	V	10^{8}	$\frac{1}{300}$
Miliwolt	mV	10^{5}	$\frac{1}{3} \cdot 10^{-5}$
Kilowolt [2]	kV	10^{11}	$\frac{1}{3} \cdot 10$
Om	Ω lub O	10^{9}	$\frac{1}{9} \cdot 10^{-11}$
Megom [3]	$M\Omega$	10^{15}	$\frac{1}{9} \cdot 10^{-5}$
Farad	F	10^{-9}	$9 \cdot 10^{11}$
Mikrofarad [4]	μF	10^{-15}	$9 \cdot 10^{5}$
Henry	H	10^{9}	—

Koń mechaniczny (MK) = 736 watów.

Wat (W) = 1 dżaul na sekundę = 10^7 ergów na sekundę.

Kilowat (kW) = 10^3 watów = 1,36 konia mechanicznego = 0,24 kalorji kilogramowej na sekundę.

Dżaul (J) = 10^7 ergów = 1 watsekundzie = 0,24 kalorji gramowej.

Kilowatgodzina (kWh) = 3600000 dżauli = 1,36 koniogodzin = = 857 kalorji kilogramowych.

Amperogodzina (Ah) = 3600 kulombów.

---

[1] Miliamper = 0,001 ampera.
[2] Kilowolt = 1000 woltów.
[3] Megom = 10^6 omów.
[4] Mikrofarad = 10^{-6} farad.

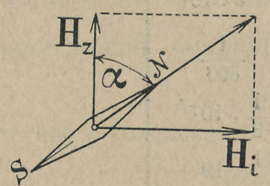
12. **Wyznaczenie bezwzględnej jednostki elektromagnetycznej siły prądu.** Istnieją dwa sposoby wyznaczenia wartości bezwzględnej jednostki elektromagnetycznej siły prądu.

Pierwszy polega na zastosowaniu wzoru, podanego w rozdziale I:

$$i = \frac{H_i \, . \, R}{2\pi}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

który określa siłę prądu, przepływającego po przewodniku kołowym o promieniu R, gdy w środku koła, utworzonego przez przewodnik, natężenie pola magnetycznego wynosi H_i.

Natężenie pola H_i wyznacza się przez porównanie z poziomą składową natężenia pola magnetycznego ziemskiego.[1] W środku przewodnika kołowego, po którym przebiega prąd, umieszcza się zawieszoną na włókienku jedwabnym, lub też podpartą na ostrzu igłę magnesową. Gdy prąd nie płynie, igła ustawia się swoją osią magnetyczną w kierunku poziomej składowej natężenia pola ziemskiego. Płaszczyznę koła, stanowiącego przewodnik, ustawiamy równolegle do kierunku natężenia pola ziemskiego, a więc równolegle do osi magnetycznej igły przy prądzie równym zeru. Pod wpływem prądu, igła magnesowa odchyla się o kąt α (rys. 298) w ten sposób, że w nowym położeniu równowagi igły wypadkowa natężeń pól: H_z od ziemi i H_i[2] od prądu przechodzi wzdłuż osi magnetycznej igły. Wtedy z trójkąta prostokątnego, wskazanego na rysunku, będzie:



Rys. 298.

$$H_i = H_z \, . \, \text{tg}\,\alpha. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

Podstawiając wyraz dla H_i z równania (b) we wzór (a), otrzymamy:

$$i = \frac{H_z \, . \, R}{2\pi} \, . \, \text{tg}\,\alpha. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (c)$$

Pozioma składowa magnetyzmu ziemskiego H_z wyznacza się np. sposobem Gauss'a[3] przez mierzenie odległości pomiędzy magnesami, kąta odchylenia igły magnesowej i okresu wahnięć magnesu swobodnie zawieszonego. Że wzoru, w którym wszystkie te wielkości są wyrażone w jednostkach zasadniczych, centymetrach, gramach i sekundach, oblicza się natężenie pola H_z. Tym sposobem wzór (c) pozwala obliczyć prąd w bezwzględnych jednostkach elektromagnetycznych.

Przyrząd służący do wykonania odpowiednich pomiarów nazywa się busolą stycznych (tangensbusolą) (rys. 299). Mamy tu dwa układy zwojów. Obręcz zewnętrzna stanowi przewodnik miedziany dla prądów silnych. Na wewnętrznej obręczy drewnianej są nawinięte zwojnice z cieńszego drutu dla prądów słabszych. W środku widzimy tarczę z podziałkami dla odczytywania kątów i cienką

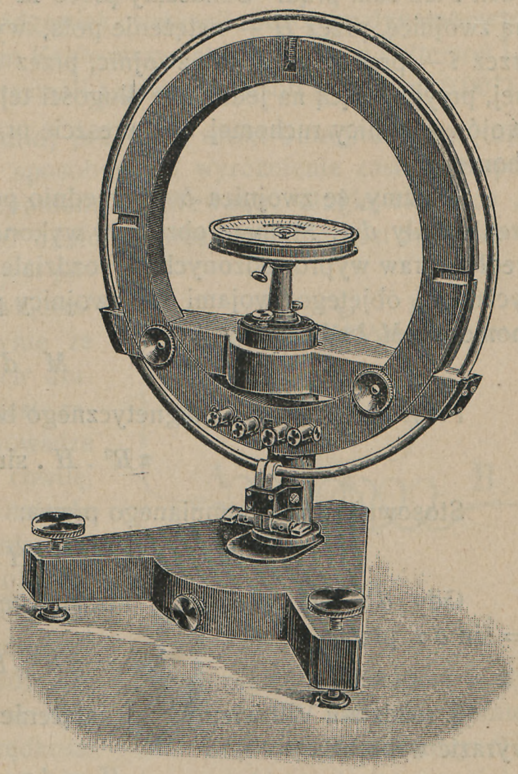
[1]) Patrz prof. A. Witkowskiego „Zasady fizyki" t. III, str. 481.

[2]) H_i jest prostopadłe do płaszczyzny przewodnika kołowego, a więc i do H_z.

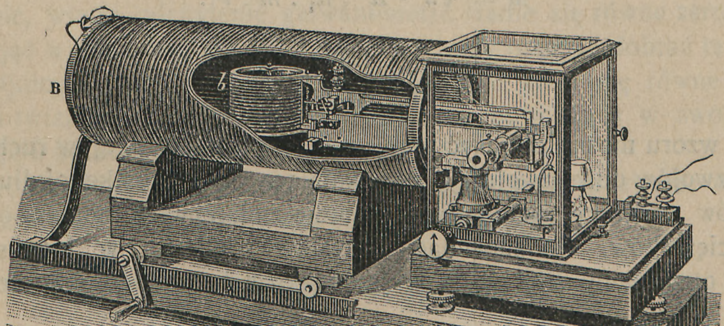
[3]) Szczegóły znajdzie czytelnik w tomie III „Zasad fizyki" prof. A. Witkowskiego, str. 479.

wskazówkę, przymocowaną do krótkiego magnesu, opartego na ostrzu w środku tarczy.

Drugi, odrębny sposób, tak zwany dynamometryczny, polega na zastosowaniu wzorów, wyrażających działanie prądów na prądy. W celu wykonania odpowiednich doświadczeń, stosowano rozmaite układy zwojnic. Zwykle jedna zwojnica jest nieruchoma, a druga ruchoma. Na rys. 300 widzimy przyrząd stosowany przez Pellat'a; przyrząd ten nazywa się elektrodynamometrem bezwzględnym. Zwojnica *B* jest nieruchoma, a zwojnica *b* ruchoma, umocowana na belce wagi, zaopatrzonej w szalkę *p*. Za pomocą mikroskopu, umieszczonego w szklanej ściance pudełka, obserwujemy położenie wagi. Nieruchoma zwojnica wywołuje wewnątrz pole magnetyczne, którego linje sił w środku są poziome, a natężenie pola prawie jednostajne. Zwojnica ruchoma ustawia się, jak widzimy na rysunku, w ten sposób, że płaszczyzny jej zwojów są



Rys. 299.



Rys. 300.

poziome. Korzystając z reguły pamięciowej trzech palców lewej ręki, łatwo spostrzec, że pole zwojnicy nieruchomej wywiera na zwojnicę ruchomą pewien moment obrotowy, który przechyla wagę. Ten moment obrotowy równoważymy za po-

mocą ciężarków, umieszczanych na szalce. Przez obie zwojnice przepuszczamy jeden i ten sam prąd. Oznaczmy przez M moment obrotowy działający na ruchomą zwojnicę, przez H — natężenie pola, wywołanego przez zwojnicę nieruchomą, przez i — prąd w każdej ze zwojnic, przez n_1 — liczbę zwojów zwojnicy nieruchomej, przypadającą na jednostkę długości tej zwojnicy, przez m—liczbę wszystkich zwojów zwojnicy ruchomej b i wreszcie przez R — promień zwojów zwojnicy ruchomej.

Załóżmy, że zwojnica b poprzednio pozioma, przechyliła się o kąt nieskończenie mały $d\alpha$. Moment obrotowy wykona wtedy pracę, która będzie się równała, według praw wyprowadzonych w rozdziale XVIII, przyrostowi strumienia magnetycznego, objętego zwojami tej zwojnicy pomnożonemu przez siłę prądu. Praca momentu M będzie:

$$M \,.\, d\alpha.$$

Przyrost strumienia magnetycznego będzie:

$$\pi R^2 \,.\, H \,.\, \sin d\alpha \,.\, m\,.$$

Stosownie do wspomnianego prawa:

$$M \,.\, d\alpha = \pi R^2 \,.\, H \,.\, \sin d\alpha \,.\, m \,.\, i.$$

Gdy $d\alpha$ jest wielkością nieskończenie małą, możemy napisać, że $d\alpha = \sin d\alpha$, przeto

$$M = \pi R^2 \,.\, H \,.\, m \,.\, i.$$

Z rozdziału VIII wiemy, że natężenie pola w środku długiej zwojnicy można wyrazić wzorem:

$$H = 4\pi \,.\, n_1 \,.\, i.$$

Przeto:

$$M = 4\pi^2 \cdot R^2 \,.\, n_1 \,.\, m \,.\, i^2.$$

Stąd:

$$i = \frac{M}{2\pi \,.\, R \,.\, \sqrt{n_1 \,.\, m}}.$$

Z tego wzoru można obliczyć prąd, znając promień zwojów ruchomej zwojnicy, liczbę zwojów dużej zwojnicy, przypadającą na jednostkę jej długości i całą liczbę zwojów zwojnicy ruchomej, a pozatem zmierzywszy moment obrotowy M zapomocą ciężarków. Podstawiając wszystkie wielkości w jednostkach bezwzględnych, otrzymamy siłę prądu w jednostkach bezwzględnych elektromagnetycznych.

Przy dokładnych obliczeniach w powyższym wzorze wprowadzamy jeszcze poprawkę dla usunięcia niedokładności, którą popełniamy zakładając, że nieruchoma zwojnica jest nieskończenie długa [1]).

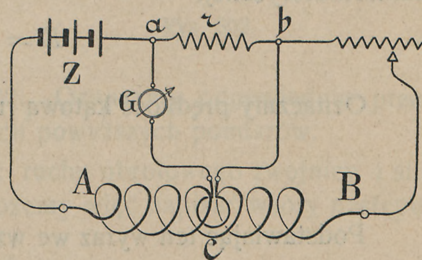
P. p. Potier i Pellat przepuszczali prąd elektryczny, mierzony za pomocą powyższego przyrządu, przez azotan srebra i wyznaczyli w ten sposób równoważnik elektrochemiczny srebra; według tych pomiarów prąd o sile jednego ampera w cią-

---

[1]) Sposób wprowadzania tej poprawki może być taki sam, jaki się stosuje przy pomiarze oporu, opisanym w paragrafie następnym.

gu jednej sekundy wydziela 0,0011192 *gr* srebra. Inni badacze otrzymali liczby, różniące się niewiele od powyższej. Według książki Dr. A. Winkelmann'a, p. t. „Handbuch der Physik", Raylegh i Sindgewick otrzymali sposobem dynamometrycznym 0,0011179, tym samym sposobem Kahle otrzymał 0,0011183, a Petterson i Guthe 0,0011192; F. i W. Kohlrausch otrzymali zapomocą busoli stycznych 0,0011183.

13. Wyznaczenie bezwzględnej jednostki elektromagnetycznej oporu przewodników. Z pomiędzy kilku sposobów na wyróżnienie zasługuje sposób Lorenz'a, udoskonalony przez M. Lippmann'a. Wewnątrz długiej zwojnicy AB, rys. 301, obraca się płaska zwojnica C około osi prostopadłej do osi zwojnicy AB. Przez galwanometr G [1]) zwojnica C jest połączona z punktami a i b, stanowiącemi końcówki oporu r, przez który płynie ze źródła Z ten sam prąd co i w zwojach długiej zwojnicy AB. Zwojnica C jest zaopatrzona w przerywacz, który ją wprowadza w obwód galwanometru tylko na chwilę, gdy płaszczyzna zwojnicy jest równoległa do linji sił magnetycznych, wywołanych przez prąd w zwojnicy AB. Przy obracaniu zwojnicy C powstaje w niej siła elektromotoryczna indukcji; wyżej wspomniany



Rys. 301.

przełącznik ustawia się w ten sposób, aby łączył zwojnicę z obwodem w chwili gdy ta siła elektromotoryczna jest skierowana przeciw napięciu pomiędzy punktami a i b; przez zmianę prędkości ruchu obrotowego zwojnicy C możemy osiągnąć równowagę pomiędzy napięciem na końcach oporu r i siłą elektromotoryczną w zwojnicy C. Gdy to nastąpi, prąd w galwanometrze płynąć nie będzie, wtedy odchylenie galwanometru stanie się równe zeru. Należy więc, utrzymując w obwodzie $ZabBAZ$ pewien stały prąd i, dobrać taką prędkość ruchu zwojnicy C, aby odchylenie galwanometru stało się równe zeru, możemy wówczas twierdzić, że siła elektromotoryczna, powstająca w zwojnicy C, równa się napięciu na końcówkach ab.

Z rozdziału XVIII [str. 192] [2]) wiemy, że w jednym zwoju, obracającym się tak, jak zwojnica C, powstaje siła elektromotoryczna:

$$E_t = H \cdot S \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \sin \frac{2\pi t}{T} .$$

Jeżeli założymy, że zwojnica C ma m zwojów, połączonych w szereg, to cała siła elektromotoryczna zwojnicy będzie:

$$E_t = m \cdot H \cdot S \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot \sin \frac{2\pi t}{T} .$$

---

[1]) Lippman używał przyrządu specyalnego, tak zwanego włoskowatego elektrometru rtęciowego własnego pomysłu. Patrz „Zasady fizyki" pr. A. Witkowskiego T. III, str. 406.

[2]) Ponieważ w rozważanym tu przypadku zwojnica C obraca się w powietrzu, przeto zamiast B, możemy pisać H w jednostkach bezwzględnych elektromagnetycznych.

Przełącznik wprowadza w obwód zwojnicę, gdy płaszczyzna zwojów jest równoległa do linji sił magnetycznych pola; wtedy zwojnica przecina w jednostkę czasu najwięcej linij, E_t osiąga więc w tej chwili wartość maksymalną. Zresztą widać to i z powyższego wzoru, gdy bowiem $t =$ np. $\frac{T}{4}$,

$$\sin \frac{2\pi \frac{T}{4}}{T} = \sin \frac{\pi}{2} = 1.$$

Z napięciem na końcówkach ab równoważy się maksymalna wartość siły elektromotorycznej:

$$\overline{E} = m \,.\, H \,.\, S \,.\, \frac{2\pi}{T}.$$

Oznaczmy prędkość kątową ruchu zwojnicy przez ω, wtedy:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Podstawiając ten wyraz we wzór dla $\overline{E}$, otrzymamy:

$$\overline{E} = m \,.\, H \,.\, S \,.\, \omega.$$

Z rozdziału VIII wiemy, że natężenie pola w środku bardzo długiej zwojnicy wyraża się wzorem:

$$H = 4\pi n_1 i,$$

gdzie n_1—liczba zwojów na jednym centymetrze długości zwojnicy.

Uwzględniając ten wyraz dla H, otrzymamy:

$$\overline{E} = 4\pi \,.\, m \,.\, n_1 \,.\, S \,.\, i \,.\, \omega.$$

Napięcie na końcówkach ab według prawa Ohma wyraża się iloczynem:

$$i \,.\, r.$$

Gdy więc nastąpi równowaga pomiędzy $\overline{E}$ i powyższym napięciem, możemy napisać:

$$i \,.\, r = 4\pi \,.\, m \,.\, n_1 \,.\, S \,.\, i \,.\, \omega,$$

albo:

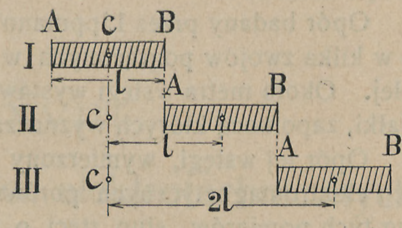
$$r = 4\pi m \,.\, n_1 \,.\, S \,.\, \omega.$$

Znając liczbę zwojów zwojnicy C, liczbę zwojów zwojnicy AB, przypadającą na centymetr jej długości, pole zwojów C i prędkość kątową ruchu obrotowego zwojnicy C, znajdziemy z powyższego równania opór r wyrażony w bezwzględnych jednostkach elektromagnetycznych, o ile S i ω są wyrażone w jednostkach bezwzględnych.

Dla otrzymania wyników dokładnych, ze względu na skończoną długość zwojnicy AB, jest rzeczą konieczną wprowadzić poprawkę. P. Lippmann uskutecznił to w ten sposób, że wykonał trzy pomiary. Przedstawmy sobie, że w punkcie C rys. 302 znajduje się stale obracająca się zwojnica, zaś zwojnica AB zajmuje róż-

ne położenia. Oznaczmy natężenie pola w punkcie C w I-ym położeniu zwojnicy przez H_0, w drugim położeniu przez H_1, a w trzecim przez H_2. Gdyby zwojnica AB była pięć razy dłuższa, to można sobie przedstawić, że do zwojnicy AB w I położeniu dodano jeszcze po dwie takie same zwojnice z lewej i z prawej strony, wtedy całe natężenie pola w punkcie C będzie:

$$H_0 + 2H_1 + 2H_2.$$



Rys. 302.

P. Lippmann, dobierając odpowiednio wartość oporu r, równoważył napięcie na końcówkach tego oporu z siłą elektromotoryczną, powstającą w obracającej się zwojnicy we wszystkich trzech przypadkach położenia zwojnicy AB, wskazanych na rys. 302. Oznaczmy odpowiednio przez r_0, r_1 i r_2 wartości oporu r otrzymane z trzech powyższych pomiarów.

We wszystkich doświadczeniach prędkość ruchu obrotowego zwojnicy i siła prądu w obwodzie pozostawały niezmienne, możemy więc napisać wzory następujące:

$$i \,.\, r_0 = m \,.\, H_0 \,.\, S \,.\, \omega,$$

$$i \,.\, r_1 = m \,.\, H_1 \,.\, S \,.\, \omega,$$

$$i \,.\, r_2 = m \,.\, H_2 \,.\, S \,.\, \omega.$$

Pomnóżmy drugie i trzecie równanie przez dwa i dodajmy wszystkie trzy równania, otrzymamy wtedy.

$$i\,(r_0 + 2r_1 + 2r_2) = m \,.\, S \,.\, \omega \,.\, (H_0 + 2H_1 + 2H_2)\,.$$

Możnaby wprawdzie w podobny sposób wyznaczyć jeszcze r_3, przy H_3, gdy zwojnica AB jest odsunięta od punktu C na odległość $3l$ (rys. 302), lecz wtedy r_3 wypada zbyt małe, aby można było wyznaczyć je dość dokładnie.

Nie wychodząc z granic błędów nieuniknionych przy pomiarach tego rodzaju, możemy przyjąć, że natężenie pola w środku zwojnicy pięć razy dłuższej niż stosowana przy doświadczeniach[1]) równa się natężeniu pola w środku zwojnicy nieskończenie długiej, wtedy

$$H_0 + 2H_1 + 2H_2 = 4\pi \,.\, n_1 \,.\, i,$$

$$i\,(r_0 + 2r_1 + 2r_2) = m \,.\, S \,.\, \omega \,.\, 4\pi \,.\, n_1 i,$$

a stąd:

$$r_0 + 2r_1 + 2r_2 = 4\pi \,.\, m \,.\, n_1 \,.\, S \,.\, \omega.$$

Oznaczmy sumę $r_0 + 2r_1 + 2r_2$ przez r, a długości przewodnika, odpowiadające powyższym oporom, przez L_0, L_1, L_2 i L, wtedy:

$$L = L_0 + 2L_1 + 2L_2.$$

W ten sposób wyznaczymy opór przewodnika długości L w jednostkach bezwzględnych elektromagnetycznych. Zaznaczyć należy, że zamiast przeprowadze-

[1]) Lippman stosował zwojnicę AB długości 2 m.

nia powyższych trzech pomiarów, można wyprowadzić wzór dokładny, wyrażający natężenie pola w środku zwojnicy AB, określonej długości; wzór ten przedstawia się w postaci szeregu zbieżnego, w którym można przyjąć pod uwagę odpowiednią liczbę składników.

Opór badany przez Lippmann'a stanowiła wstęga metalowa zwinięta częściowo w kilka zwojów pogrążonych w nafcie dla utrzymania określonej temperatury stałej. Około metra wstęgi wystawało z nafty i na tej części znajdowały się podziałki, zapomocą których wyznaczano odcinki L_1 i L_2.

Opór tej wstęgi, wymierzony w powyższy sposób w jednostkach bezwzględnych elektromagnetycznych porównywano z oporem rtęci w rurce szklanej. Według tych pomiarów, słup rtęci o przekroju 1 mm^2 posiada opór jednego oma, gdy długość tego słupa wynosi 106,27 centymetra w 0° C. Według innych pomiarów Mr. F. E. Smith'a opór słupa rtęci, którego długość równa się 106,3 *cm*, wynosi $(1{,}00052 \pm 0{,}00004) \cdot 10^9$ bezwzględnych jednostek elektromagnetycznych.

ROZDZIAŁ XXVIII.

Wzorce stosowane przy pomiarach elektrotechnicznych.

W miernictwie elektrotechnicznym są dwie jednostki określone ściśle przez prawa państwowe: amper i om.

Amper międzynarodowy jest to jednostka siły prądu określona w sposób następujący: siłę jednego ampera ma prąd stały, który w ciągu jednej sekundy wydziela 0,001118 *gr* srebra z roztworu azotanu srebra w najdogodniejszych warunkach rozkładu.

Om międzynarodowy jest to jednostka oporu określona w sposób następujący: opór jednego oma ma słup rtęci w temperaturze 0° C., którego długość przy jednostajnym przekroju wynosi 106,3 *cm*, a masa 14,4521 *gr*, w tych warunkach przekrój mało różni się od 1 mm^2.

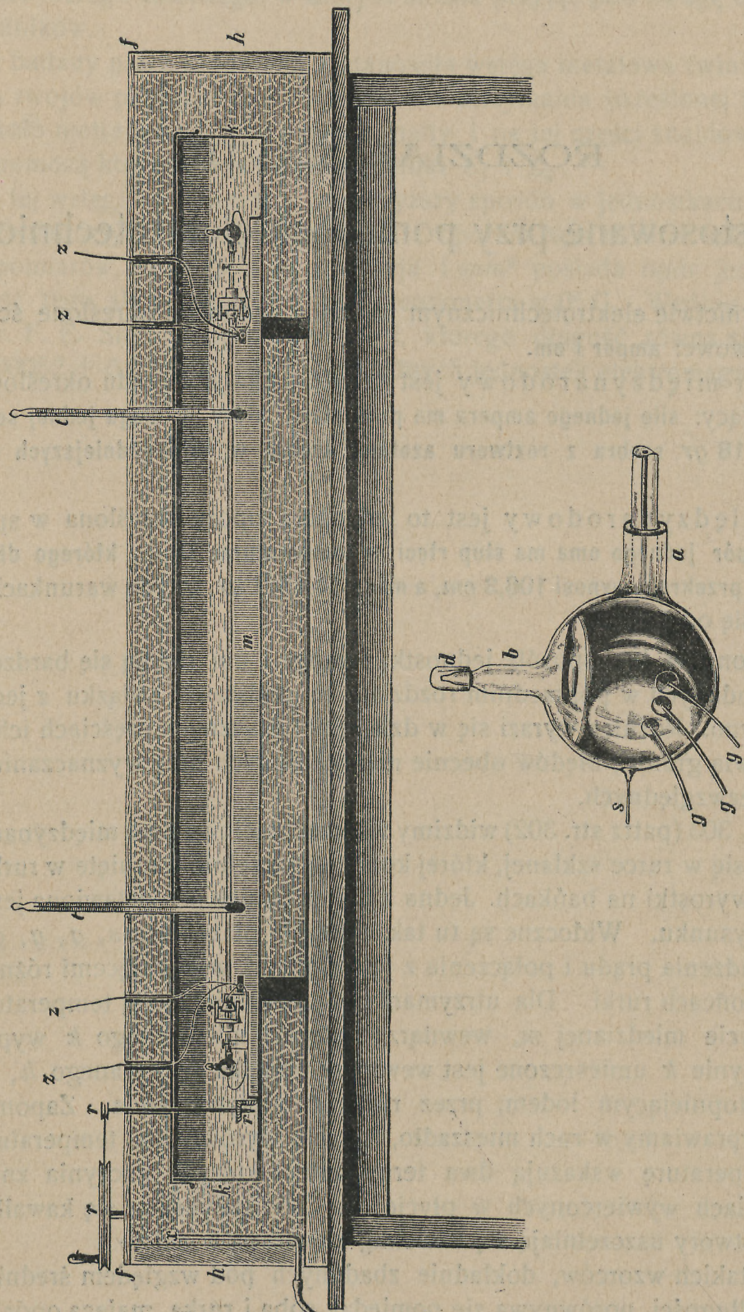
Określone w ten sposób jednostki: amper i om różnią się bardzo mało od jednostek podanych w poprzednim rozdziale na podstawie związku z jednostkami bezwzględnymi. Różnica wyrazi się w dziesięciotysiącznych częściach ich wartości, które stanowią granicę błędów obecnie nieuniknionych przy wyznaczaniu wartości jednostek bezwzględnych.

Na rys. 303 (patrz str. 302) widzimy wzorzec rtęciowy oma międzynarodowego. Rtęć mieści się w rurce szklanej, której końce są szczelnie wsunięte w rurki szersze, stanowiące wyrostki na bańkach. Jedna z takich baniek przedstawiona jest oddzielnie u dołu rysunku. Widoczne są tu także druciki platynowe s, g, g, g, służące dla doprowadzenia prądu i połączenia z przyrządami, wskazującemi różnicę potencjałów na końcach rurki. Dla utrzymania odpowiedniej stałej temperatury, rurka leży na płycie miedzianej m, wewnąrz naczynia miedzianego k wypełnionego naftą. Naczynie k umieszczone jest wewnątrz pudełka drewnianego h, które wypełnia się topniejącym lodem; przez rurkę x odpływa woda. Zapomocą krążków r, r wprawiamy w ruch mieszadło, w celu wyrównania temperatury wzdłuż rurki. Temperaturę wskazują dwa termometry, których naczynia znajdują się w zagłębieniach wywierconych w płycie m. Lód przykrywa się kawałkiem filcu. Wszystkie otwory uszczelniają się bawełną, umaczaną w nafcie.

Kilka takich wzorców, dokładnie zbadanych pod względem średnicy otworu rurek i ich długości, porównywa się pomiędzy sobą i rurka, mająca opór najbliższy przeciętnego, uważa się za normalną.

Przyrządem wzorcowym dla wyznaczenia ampera jest odpowiednio zbudowany przyrząd elektrolityczny, służący do elektrolizy azotanu srebra.

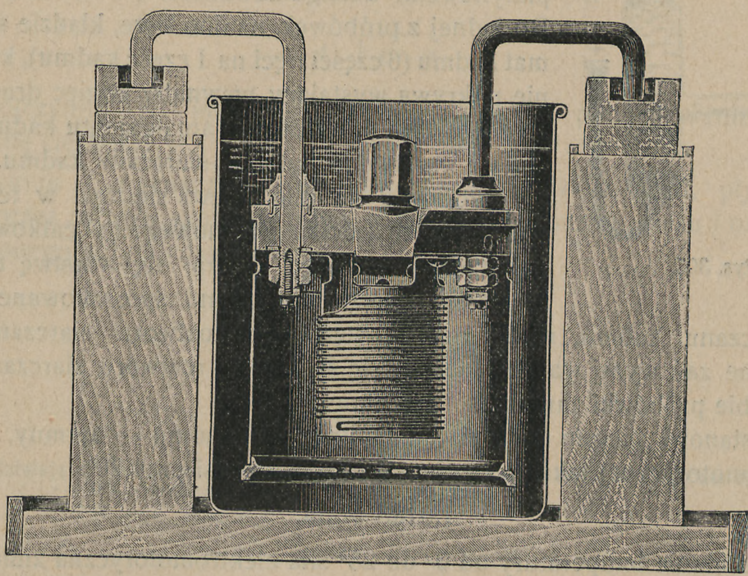
Wzorce zasadnicze ampera i oma są używane do pomiarów prawie wyłącznie w centralnych izbach państwowych miar i wag. W innych zaś pracowniach,



Rys. 303.

sprawdzających przyrządy miernicze i wykonywujących dokładne pomiary, używane są zwykle wzorce wtórne. Wzorce te są następujące:

W z o r z e c o m a. Sporządza się on najczęściej ze stopu miedzi z manganem, tak zwanego manganinu [1]) przez porównanie ze wzorcem zasadniczym. Widzimy go częściowo w przekroju na rys. 304. Drut manganinowy izolo-



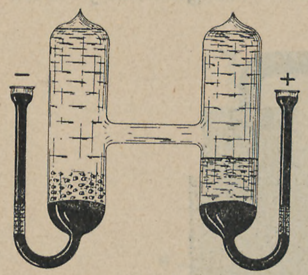
Rys. 304.

wany nawinięty jest na cylinder z cienkiej blachy, a końce tego drutu przymocowane do dwuch grubych haków miedzianych. Prąd doprowadzamy przez miseczki z rtęcią, w których zanurzone są końce haków. Cały opornik pogrąża się w nafcie, ażeby ułatwić jego ochładzanie się. Wyjąwszy korek w środku, można wstawić termometr. Opory wzorcowe są sporządzane różnych wielkości. Najczęściej od 100000 Ω do 0,0001 Ω. Budowa ich jest zwykle taka, że w nafcie wytrzymują one następujące obciążenie prądem bez obawy o ich uszkodzenie i bez ujmy dla dokładności pomiarów:

O p ó r:	P r ą d:	
	przy pomiarach bardzo dokładnych:	przy pomiarach technicznych:
100000 Ω	0,003 A.	0,01 A.
10000 „	0,01 „	0,03 „
1000 „	0,03 „	0,1 „
100 „	0,1 „	0,3 „
10 „	0,3 „	1 „
1 „	1 „	3 „
0,1 „	3 „	10 „
0,01 „	10 „	100 „
0,001 „	30 „	300 „
0,0001 „	100 „	1000 „

[1]) Metal o bardzo małym spółczynniku cieplnym zmiany oporu.

Wzorzec siły elektromotorycznej stanowi ogniwo normalne Westona (rys. 305) sporządzone w sposób następujący. W dna dwuch próbówek, połączonych rurką poprzeczną, wtopione są rurki z drucikami platynowemi amalgamowanemi (∾ 0,4 *mm* grubości). Do jednej z próbówek, na dno tejże, kładzie się amalgamat kadmu (6 części rtęci na 1 część kadmu), ktory zupełnie pokrywa wystający wewnątrz koniec drucika platynowego. Na powierzchni amalgamatu kadmu umieszcza się warstwę kryształów siarczanu kadmu. Do drugiej próbówki na dno nalewa się rtęci w ten sposób, ażeby koniec drucika platynowego był całkowicie w niej zanurzony. Na rtęć kładzie się warstwę mieszaniny siarczanu rtęciawego drobno sproszkowanego, kryształów siarczanu kadmu, nieco rtęci i stężonego roztworu siarczanu kadmu. Na wskazane zaś wyżej warstwy nalewa się stężonego roztworu siarczanu kadmu. Wreszcie obie próbówki zamyka się szczelnie.



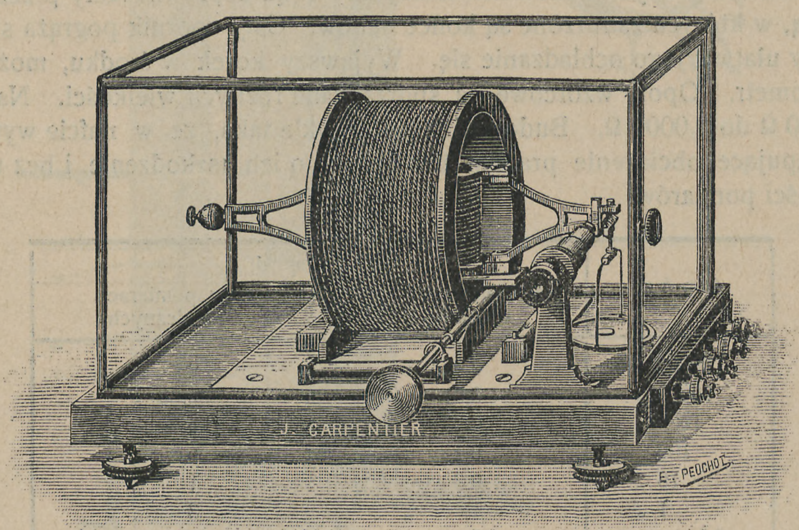
Rys. 305.

Rtęć stanowi biegun dodatni, amalgamat zaś kadmu — ujemny. Wielkość siły elektromotorycznej takiego ogniwa Westona wynosi przy 20°:

1,0186 wolta.

Przy zmianie temperatury od 0° do 25° siła elektromotoryczna zmienia się od 1,0191 do 1,0184 wolta.

Wzorzec ampera. Zamiast jednego z powyższych wzorców, stosowane są niekiedy elektrodynamiczne wzorce ampera, sporządzone przez Lorda Kelvina



Rys. 306

w Anglii i Pellat'a we Francji. Wzorzec Pellat'a (rys. 306) składa się z dwuch zwojnic, połączonych w szereg, tak, że przez obie zwojnice przebiega ten sam prąd.

Zewnętrzna zwojnica jest nieruchoma, a wewnętrzna umocowana na belce wagi. Siła działania elektrodynamicznego zwojnicy nieruchomej na ruchomą [1]) równoważy się ciężarkami, umieszczonemi na szalce. Ponieważ siła ta jest proporcjonalna do kwadratu siły prądu, więc stosuje się tu wzór następujący:

$$i = A \, . \sqrt{p \, . \, g} \, .$$

A — stały spółczynnik, p — masa ciężarków na szalce, g — przyśpieszenie wywoływane przez siłę ciężkości.

Spółczynnik A wyznaczymy dokładnie, przepuszczając prąd, płynący po zwojnicach, przez roztwór azotanu srebra w ciągu określonego czasu i oznaczając ilość wydzielonego w tym czasie srebra.

---

[1]) Siły działają tu podobne, jak w przyrządzie p. Pellat'a, opisanym w rozdziale XXVII § 12.

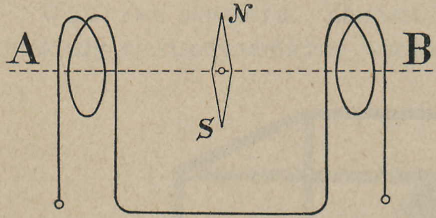
ROZDZIAŁ XXIX.

Mierzenie siły prądu.

Do mierzenia siły prądu, zależnie od wielkości i rodzaju samego prądu, a także zależnie od wymaganej ścisłości pomiarów, stosowane są rozmaite przyrządy zwane galwanoskopami, galwanometrami i amperomierzami; nadto przy pomiarach najbardziej ścisłych stosowana jest metoda pośrednia mierzenia siły prądu przez wyznaczenie napięcia na końcach znanego oporu.

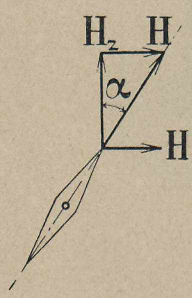
1. Galwanoskopy. Przyrządy niedokładne, za pomocą których zwykle spostrzegamy tylko obecność prądu, noszą nazwę galwanoskopów.

Najczęściej używane galwanoskopy mają dwie zwojnice: *A* i *B* (rys. 307), połączone w szereg; pomiędzy niemi znajduje się krótki magnes, oparty na ostrzu lub zawieszony na cienkiej niteczce; do tego magnesu przymocowana jest wskazówka, której położenie wyznacza się na skali (nie wskazanej na rysunku). Przy użyciu takiego galwanoskopu, oś *AB* zwojnic należy ustawić prostopadle do południka magnetycznego, wtedy oś magnetyczna magnesu będzie prostopadła do osi *A B*.



Rys. 307.

Pod wpływem prądu magnes odchyli się i zajmie takie położenie, w którym oś magnetyczna magnesu będzie skierowana wzdłuż natężenia wypadkowego dwuch pól magnetycznych: poziomej składowej magnetyzmu ziemskiego H_z i pola prądu H (rys. 308). Kąt α odchylenia magnesu będzie tem większy, im większe wypadnie H w porównaniu z H_z.



Rys. 308.

Przy zmianie kierunku prądu zmienia się również kierunek odchylenia magnesu, ponieważ H zwraca się w stronę przeciwną.

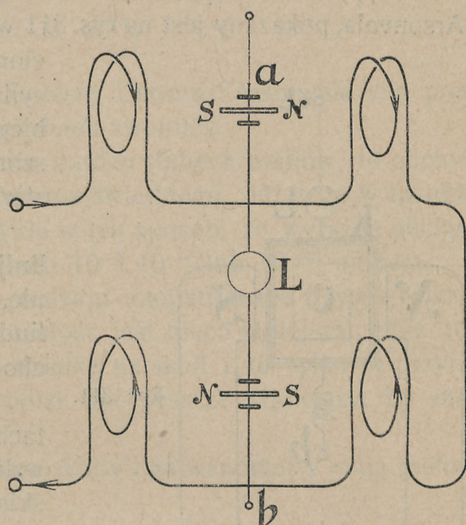
2. Galwanometry. Tego samego rodzaju przyrząd, jak opisany wyżej, lecz wykonany staranniej i dokładniej, nosi nazwę **galwanometru** i jest stosowany do mierzenia siły prądów bardzo słabych.

Chcąc używać galwanoskopu lub galwanometru jako amperomierza, wypada przez porównanie z innym przyrządem pomiarowym wyznaczyć wartość każdej podziałki na skali tych przyrzą-

dów. Wyznaczenie wartości każdej podziałki jest rzeczą konieczną ze względu na to, iż trudno jest podać ścisłą, wzorem matematycznym wyrażoną zależność pomiędzy siłą prądu a kątem wychylenia. Pamiętać także należy, że wartość podziałek jest zależna od wielkości poziomej składowej magnetyzmu ziemskiego w tym miejscu, gdzie znajduje się przyrząd; wszystkie więc czynniki (żelazo), wpływające na wielkość natężenia pola ziemskiego w danym miejscu, zmieniają wartość wskazań takiego przyrządu. Nadto wskazania te zależą w znacznym stopniu od dokładności ustawienia przyrządu względem południka magnetycznego.

Przy bardzo dokładnych pomiarach prądów nadzwyczaj słabych stosuje się galwanometr astatyczny.

Przyrząd ten (rys. 309) składa się z dwuch par zwojnic, połączonych w szereg w ten sposób, że para górna wytwarza pole magnetyczne w jednym kierunku, para zaś dolna — w odwrotnym. Na sztywnym druciku ab przymocowane są dwa układy cienkich i lekkich magnesów. Magnesy górne zwrócone są biegunami północnemi w jedną stronę, a dolne—w stronę przeciwną. W środku drucika ab, zawieszonego na cienkim jedwabnym lub kwarcowym włókienku, przymocowane jest lusterko L.

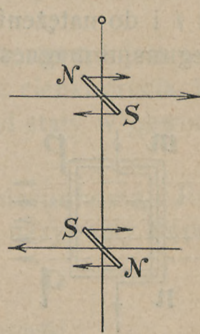


Rys. 309.

Na taki podwójny układ magnesów, zwany astatycznym, pole ziemskie prawie wcale nie działa, ponieważ momenty skręcające, które działają na magnesy dolne i górne, zwrócone są w strony przeciwne, a więc prawie znoszą się, gdyż są one sobie niemal równe. Wykonanie zupełnie jednakowych magnesów co do długości i co do masy magnetycznej jest oczywiście niemożliwe.

Haczyk, na którym zawieszony jest układ magnesów, można obracać około osi pionowej i ustawiać w ten sposób, by podczas nieobecności prądu osi magnetyczne magnesów stały prostopadle do osi zwojnic.

Pod wpływem prądu wywiązują się tu dwa pola magnetyczne, jedno u góry, drugie u dołu, w kierunkach przeciwnych. Działanie tych pól na magnesy wyraża się dwoma momentami skręcającemi, które obracają ruchomą część galwanometru w jednę stronę, jak to widać z rysunku 310. Temu momentowi skręcającemu przeciwdziała inny moment, powstający wskutek skręcenia włókienka, na którym jest zawieszony drucik ab.



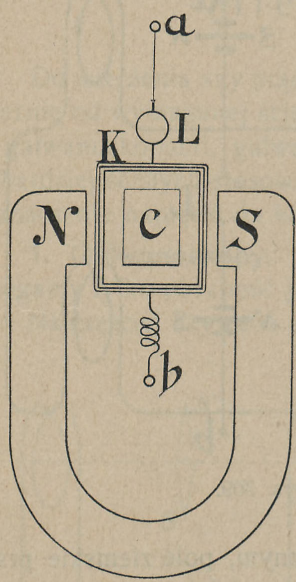
Rys. 310.

Gdy moment spężystości włókienka zostanie zrównoważony przez moment skręcający prądu, nastąpi równowaga, i układ ruchomy zatrzyma się. Kąt, o który odchyli się układ

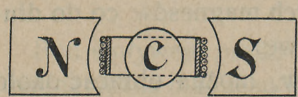
ruchomy, daje się zmierzyć za pomocą promienia świetlnego, odbitego w lusterku L. Na położenie magnesów takiego galwanometru wywiera oczywiście także pewien niewielki wpływ pole magnetyczne ziemskie.

Czułość galwanometrów tego rodzaju jest tak wielką, że prądy, wynoszące zaledwie 10^{-10} część ampera, wywołują odchylenie, dające się łatwo zauważyć za pomocą promienia świetlnego, odbitego w lusterku.

Inny, bardzo często stosowany galwanometr, zbudowany według Deprez-d'Arsonvala, pokazany jest na rys. 311 w rzucie pionowym i na rys. 312 w rzucie poziomym. Składa się on ze stałego magnesu NS, cylindra żelaznego C, umieszczonego między biegunami tego magnesu i zwojnicy K, zawieszonej na cienkiej wstążeczce metalowej. Lusterko L przymocowane jest do zwojnicy.



Rys. 311.



Rys. 312.

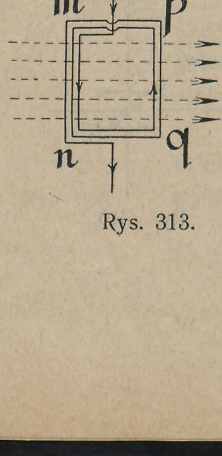
Cylinder żelazny C służy do skupienia linij sił magnetycznych i nadania im w szczelinie, znajdującej się pomiędzy biegunami a cylindrem, kierunku zbliżonego do promieni, wychodzących z osi cylindra.

Prąd doprowadza się do zwojnicy w punktach a i b (rys. 311); przepływa on tak, jak to wskazano na rys. 313. Pole magnetyczne, skierowane poziomo na prawo, działa na stronę mn zwojnicy z siłą skierowaną do czytelnika, na stronę zaś pq — odwrotnie; taka para sił obraca zwojnicę w kierunku odwrotnym względem kierunku ruchu wskazówek zegarka, jeżeli widzimy ruch zwojnicy, patrząc na nią zgóry. Przy obracaniu się zwojnicy wstążeczka metalowa skręca się, skutkiem czego wywiązuje się moment, skręcający sprężystości tej wstążeczki. Przy pewnym kącie odchylenia zwojnicy następuje równowaga.

Siła działania pola magnetycznego na prąd jest proporcjonalna do siły prądu i i do natężenia pola magnetycznego H, które w wąskiej szczelinie pomiędzy biegunami magnesu a cylindrem żelaznym C jest prawie jednostajne.

Oznaczmy przez M moment obrotowy, który powstaje skutkiem działania pola magnetycznego na zwojnicę, a przez C — spółczynnik stały, zależny od wymiarów zwojnicy i liczby zwojów, wtedy:

$$M = C \, . \, i \, . \, H.$$



Rys. 313.

Moment skręcający, wywołany sprężystością wstążeczki metalowej, na której zawieszona jest zwojnica, oznaczymy przez M'; jest on proporcjonalny do kąta obrotu zwoj-

nicy. [1]) Przez C' oznaczymy stały czynnik, zależny od własności sprężystych wstążeczki, kąt zaś obrotu zwojnicy przez α, wtedy:

$$M' = C' \cdot \alpha.$$

Jeżeli zaś zwojnica odchylona znajduje się w równowadze, to:

$$M = M'$$

$$C i H = C' \alpha,$$

skąd:

$$i = \frac{C'}{CH} \cdot \alpha = K \cdot \alpha. \; ^{2})$$

Z tego wzoru widzimy, że w galwanometrze Deprez-d'Arsonvala siła prądu w zwojnicy jest proporcjonalna do kąta odchylenia zwojnicy.

Jeżeli galwanometr zbudowany jest dla bardzo słabych prądów, to odchylenie zwojnicy obserwuje się za pomocą promienia świetlnego, odbitego w lusterku. Tego rodzaju galwanometry buduje się zwykle w ten sposób, że wyraźne odchylenie może być zauważone przy sile prądu około 10^{-6}, 10^{-8} lub 10^{-10} ampera.

Zamiast lusterka galwanometry tego rodzaju zaopatrywane bywają również częstokroć we wskazówkę i skalę; wtedy czułość jest nieco mniejsza, gdyż 10^{-7} ampera daje odchylenie, wynoszące jedną działkę na skali i to tylko w przyrządach najczulszych; w innych zaś prąd musi być jeszcze silniejszy, by mógł wywołać takie odchylenie.

Wszystkie omawiane dotychczas galwanoskopy i galwanometry mają zastosowanie tylko przy prądzie stałym.

Jeżeli prąd jest zmienny, to zwojnica nie obróci się; będzie ona drgać, ponieważ przy zmianie kierunku prądu zmienia się również kierunek sił, działających na zwojnicę.

Na tej zasadzie oparte są galwanometry wibracyjne, w których pętlica, zrobiona z cienkiego drutu, umieszczona jest w polu magnetycznym magnesu silnego. Pod wpływem przebiegającego po niej prądu pętlica drga. Wychylenia tych drgań zależą od siły prądu. Za pomocą lusterka malutkiego, przymocowanego do pętlicy, można mierzyć amplitudę drgań.

Do mierzenia słabych prądów zmiennych stosuje się jeszcze przyrządy, w których magnes stały zastąpiony jest przez elektromagnes nieruchomy; w zwojnicy tego elektromagnesu przepływa ten sam prąd, co w zwojnicy ruchomej, albo też inny, lecz o tej samej liczbie okresów, co i poprzedni.

Do urządzenia czułych galwanometrów prądu zmienego stosowane jest także działanie cieplne prądu zmiennego. Prąd przepuszczamy przez cienki drucik, który ogrzewa ogniwo termoelektryczne; ogniwo to wywołuje prąd stały w obwodzie zwojnicy zwykłego galwanometru Deprez-d'Arsonvala.

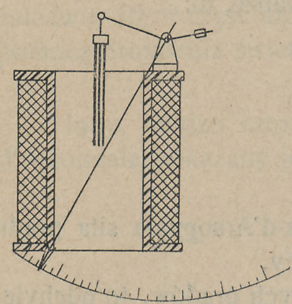
3. **Amperomierze elektromagnetyczne ze zwojnicą nieruchomą.** Przyrządy, wskazujące bezpośrednio na skali siłę prądu w amperach, nazywamy amperomierzami. Istnieje kilka zasad budowy tych przyrządów.

---

[1]) Twierdzenie to jest ścisłe, o ile kąt skręcenia wstążeczki jest niewielki.

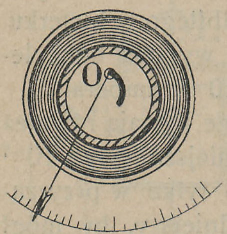
[2]) Jeżeli H dla wszystkich kątów α jest to samo, to K jest wielkością stałą.

Najprostszy ustrój mają amperomierze t. zw. elektromagnetyczne, składające się ze zwojnicy nieruchomej i z żelaza ruchomego. Najbardziej charakterystyczne rodzaje takich amperomierzy są następujące. Rys. 314 wyobraża zasadę ustroju amperomierza, w którym zwojnica wciąga pęczek drucików żelaznych, zawieszonych na drążku, obracającym się około osi poziomej; do tego drążka przymocowana jest również wskazówka. Siłę działania pola magnetycznego zwojnicy na druty żelazne równoważy ciężarek.



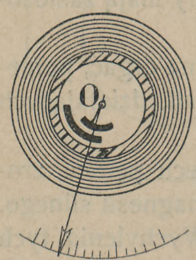
Rys. 314.

Na rys. 315 mamy inny ustrój amperomierza. Wewnątrz zwojnicy umieszcza się kawałek wygiętej blaszki żelaznej, obracającej się około osi O; wskazówka zaś przymocowana jest do tej samej osi, do której przylutowano blaszkę. Pod wpływem pola magnetycznego, blaszka ta przechyla się na prawo, dążąc do ustawienia się w tym miejscu pola magnetycznego, gdzie jest największa gęstość linji magnetycznych; przeciwdziała temu ciężar blaszki.



Rys. 315.

Na rys. 316 wewnątrz zwojnicy znajduje się jedna blaszka stała, druga zaś ruchoma, obracająca się około osi O; do blaszki ruchomej przymocowana jest wskazówka. Obie blaszki, ruchoma i stała, magnesują się w polu magnetycznym zwojnicy jednoznacznie i wskutek tego odpychają się; siłę odpychającą równoważy siła ciężkości.



Rys. 316.

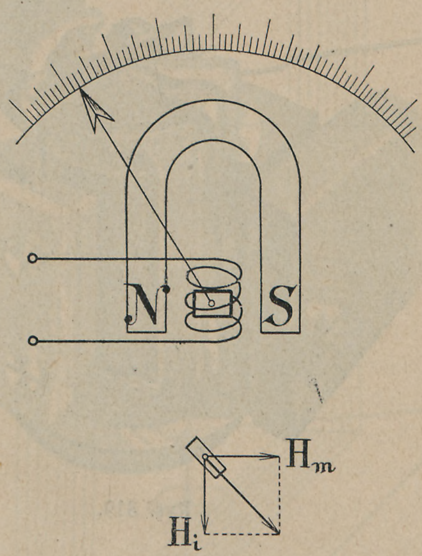
Wszystkie amperomierze elektromagnetyczne zaopatrzone są w tłumiki powietrzne, których celem jest ustawienie się wskazówki bez wahań, czyli, mówiąc językiem naukowym, osiągnięcie odchyleń aperjodycznych. Tłumik składa się z pudełeczka i blaszki osadzonej na pręciku, przymocowanym do ruchomej części przyrządu; blaszkę ustawia się w taki sposób, ażeby kierunek jej ruchu był prostopadły do jej powierzchni. W tych warunkach blaszka, poruszając się wewnątrz pudełka, ściska i rozrzedza powietrze, wobec czego odchylająca się wskazówka nie wykonywa wahnięć okresowych, lecz odrazu staje na podziałce, która odpowiada sile prądu, przepływającego przez zwojnicę.

Wszystkie przyrządy elektromagnetyczne mogą być stosowane do prądów zmiennych i stałych, lecz skale dla obu prądów nie są jednakowe, a to z powodu histerezy, istniejącej w żelazie, oraz prądów wirowych, które zachodzą przy prądzie zmiennym. Wskazania przy prądzie zmiennym zależą od liczby okresów prądu na sekundę i od kształtu krzywej prądu. Różnica wartości wskazań przy prądzie zmiennym i stałym jest w różnych przyrządach dość rozmaita; niekiedy dosięga ona kilku procent.

Wogóle przyrządy elektromagnetyczne, jakkolwiek najprostsze i najwytrzymalsze na przeciążenie prądem, są jednak najmniej dokładne.

Oprócz wyżej opisanych, są jeszcze przyrządy elektromagnetyczne ze stałemi magnesami. Zasada budowy takiego przyrządu wskazana jest na rys. 317.

Pomiędzy biegunami magnesu stałego znajduje się kawałek podłużny żelaza, obracający się około osi poziomej; nadto jest tu jeszcze nieruchoma zwojnica, umieszczona również pomiędzy biegunami magnesu. Jeżeli prądu niema, to żelazo ustawia się swoją dłuższą osią wzdłuż linji sił pola magnesu stałego. Prąd w zwojnicy wytwarza pole magnetyczne, którego linje są pionowe i — zależnie od kierunku prądu — skierowane do góry lub na dół. Skoro natężenie pola prądu skieruje się na dół, natężenie wypadkowe będzie takie, jak wskazane na rys. 317.



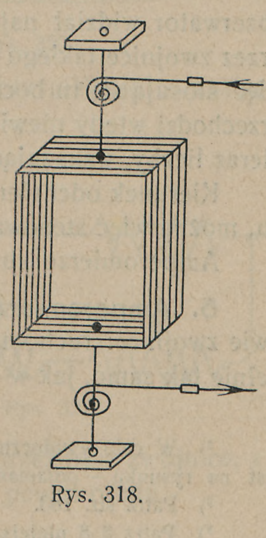
Rys. 317.

Żelazo ustawia się dłuższą swą osią w kierunku natężenia wypadkowego, wskazówka więc przymocowana do tego kawałka żelaza przesunie się o pewien kąt. Wielkość tego kąta będzie oczywiście zależną od natężenie pola H_i, a więc od siły prądu.

Przyrządy elektromagnetyczne z magnesami stałemi odchylają się w rozmaite strony, zależnie od kierunku prądu, nie mogą więc być stosowane przy prądzie zmiennym.

4. **Amperomierze ze zwojnicą ruchomą.** Według ustroju Deprez d'Arsonvala [1]) urządzają się również amperomierze ze skalą, na której wypisane są liczby, wskazujące ampery. Zwojnica ruchoma jest tu zawieszona inaczej, niż w galwanometrach.

Zwojnicę taką (rys. 318) wyrabia się zwykle z cienkiego drutu miedzianego, izolowanego jedwabiem. Drut ten nawijamy na ramkę aluminjową, do której przymocowane są dwie osi, u góry i u dołu. Osi te opierają się na twardych kamieniach, oprawionych w płytki mosiężne. Do każdej osi przymocowana jest jednym końcem sprężyna spiralna, której drugi koniec umocowuje się nieruchomo.


Rys. 318.

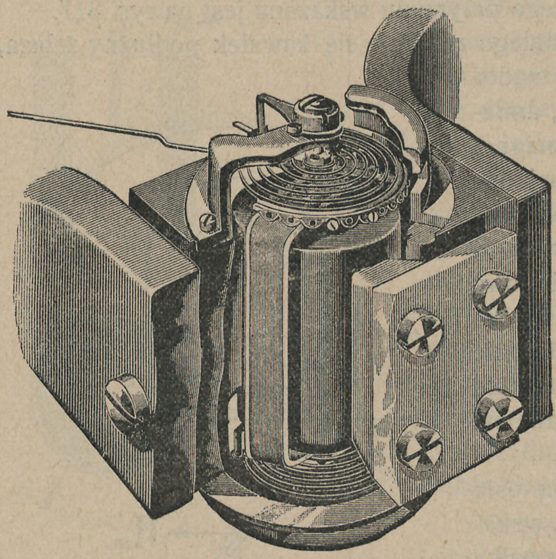
Końce zwojnicy przylutowane są do odpowiednich osi, które muszą być od siebie izolowane; przez te osi i sprężyny doprowadza się do zwojnicy prąd. Wskutek

---

[1]) Patrz § 2 niniejszego rozdziału.

sprężystości sprężyn, przy obracaniu się zwojnicy powstaje moment skręcający, równoważący się z momentem działania pola magnetycznego na zwojnicę z prądem.

Na rys. 319 widzimy niektóre szczegóły wykonania takiego przyrządu. Są tu bieguny magnesu stalowego, [1]) cylinder żelazny nieruchomy i ramka, ze zwojami drutu. U góry i u dołu widoczne są sprężyny spiralne.



Rys. 319.

Przez nasadki biegunowe odpowiedniego kształtu osiągamy w szczelinie pomiędzy biegunami a cylindrem wewnętrznym pole magnetyczne wszędzie prawie o jednakowym natężeniu, skutkiem czego skala amperomierza jest jednostajna — działki równe. Kąt obrotu zwojnicy jest tu, jak widzieliśmy poprzednio, proporcjonalny do siły prądu.

Ramka aluminjowa odgrywa rolę tłumika, przy szybkim bowiem ruchu zwojnicy w polu magnetycznym powstają w ramce prądy indukcyjne; według prawa Lenz'a, działanie pola magnetycznego na te prądy hamuje ruch zwojnicy. [2])

Wskazówka w tych amperomierzach przymocowuje się do osi górnej; przyrządy, stosowane w pracowniach, zaopatrują się we wskazówki z cienkiemi blaszkami na końcach, tudzież w skalę z lustrem. Przy odczytywaniu wskazań należy wzrok skierować w ten sposób, aby wskazówka pokrywała swój obraz w lustrze i by obserwator widział najcieńszy rzut blaszki, stanowiącej zakończenie wskazówki. Przez zwojnice takiego przyrządu można przepuszczać tylko słabe prądy; zwykle więc stosują się tu boczniki, włączone równolegle do zwojnicy. Przez zwojnicę przechodzi wtedy niewielka zaledwie część prądu mierzonego [3]), skala jednak ma nieraz liczby, wskazujące siłę całego prądu przed jego rozgałęzieniem.

Kierunek odchylenia w tych przyrządach zależy, jak wiemy, od kierunku prądu, można więc stosować je tylko do prądu stałego.

Amperomierze zbudowane podług powyższej zasady są najdokładniejsze.

5. Amperomierze elektrodynamiczne. Amperomierze tego rodzaju mają dwie zwojnice: ruchomą i stałą (rys. 320). Zwojnica ruchoma urządzona jest zupełnie tak samo, jak w przyrządach, opisanych poprzednio. Oś tej zwojnicy opie-

---

[1]) W celu uwidocznienia urządzenia wewnętrznego, część bieguna lewego przedstawiona jest na rysunku — odłamana.

[2]) Patrz str. 183.

[3]) Patrz § 8 niniejszego rozdziału.

ra się czopami o twarde kamienie. Do górnej i dolnej części osi przymocowane są sprężyny spiralne, których drugie końce przylutowano do nieruchomych części przyrządu. Zwojnica stała bywa większa albo mniejsza od zwojnicy ruchomej i stosownie do tego umieszcza się zewnątrz lub wewnątrz niej.

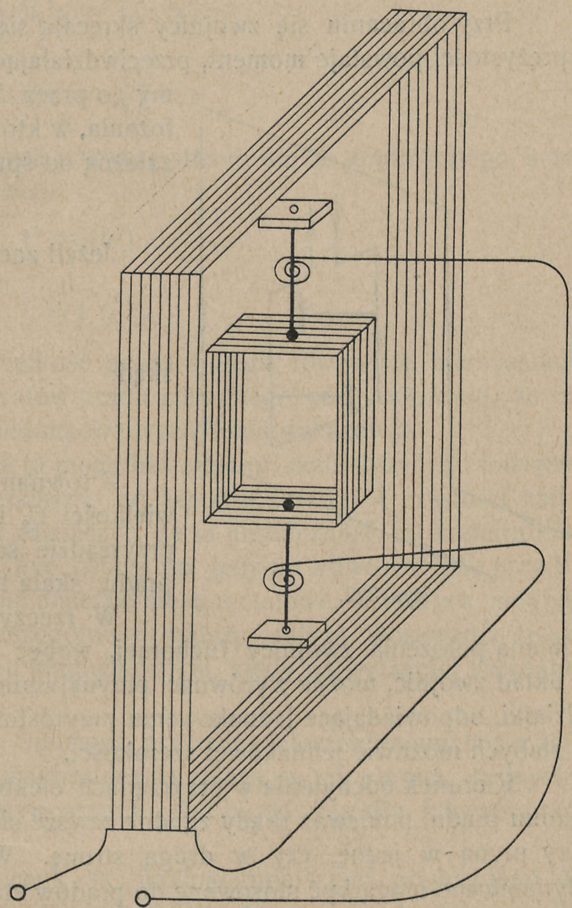
Tłumiki w tych przyrządach stosują się powietrzne.

Połączenie zwojnic między sobą bywa różne: obie zwojnice łączą się w szereg (rys. 320), albo też równolegle, jak to wskazuje rys. 321; *K* i *k* są to zwojnice, *r* i *r'* — opory dodatkowe, służące do odpowiedniego ustosunkowania siły prądów w zwojnicach.

Zwojnice ustawiają się w tych przyrządach zawsze w taki sposób, że płaszczyzny zwojów są względem siebie prostopadłe lub pochylone pod pewnym kątem, o ile prąd przez nie nie przebiega.

Pod wpływem prądu zwojnica ruchoma przekręca się o kąt, zależny od siły tego prądu.

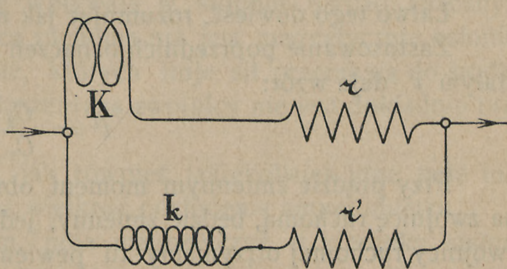
Moment obracający powstaje tu skutkiem oddziaływania prądów zwojnicy ruchomej na nieruchomą. [1])



Rys. 320.

W ten sposób powstają siły *ff*, wskazane na rys. 322, gdzie dla uproszczenia obrazu zwojnice zastąpiono przez zwoje pojedyńcze.

Para sił *ff* obraca zwojnicę ruchomą w takim kierunku, że dąży ona do zajęcia położenia równoległego względem zwojnicy nieruchomej, przy którym kierunki prądów w obu zwojnicach będą zgodne. Wielkość momentu obrotowego jest tu proporcjonalna do sił prądów w zwojnicy ruchomej i stałej.



Rys. 321.

Jeżeli założymy, że zwojnice połączone są w szereg, to ten sam prąd *i* będzie przebiegał przez obie zwojnice, a więc moment obrotowy *M* będzie proporcjonalny do drugiej potęgi prądu.

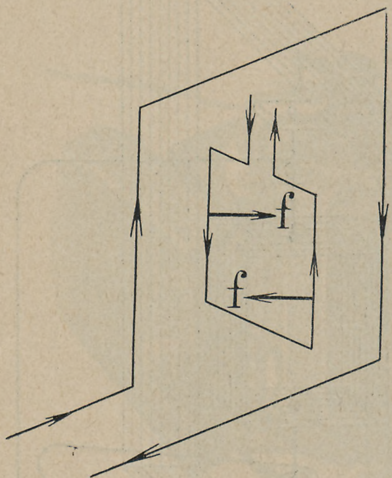
---

[1]) Patrz rozdział XVIII § 7.

Oznaczmy stałą, zależną od ustroju i wzajemnego położenia zwojnic przez C_1, wtedy:

$$M = C_1 \, . \, i^2.$$

Przy obracaniu się zwojnicy skręcają się sprężyny (rys. 320) i wskutek ich sprężystości powstaje moment, przeciwdziałający obracaniu się zwojnicy. Oznaczmy go przez M', odchylenie zaś zwojnicy od położenia, w którem prądu niema, przez α, a stałą, zależną od sprężystości sprężyn, przez C_2; wtedy:



Rys. 322.

$$M' = C_2 \, . \, \alpha.$$

Jeżeli zachodzi równowaga, to:

$$M = M',$$

$$C_1 \, . \, i^2 = C_2 \, . \, \alpha,$$

skąd:

$$i^2 = \frac{C_2}{C_1} \, . \, \alpha.$$

Z równania powyższego widzimy, że, o ile wielkości C_2 i C_1 są stałe, to odchylenia w takim przyrządzie są proporcjonalne do drugiej potęgi prądu; skala będzie przeto bardzo nierówna.

W rzeczywistości C_1 zmienia się wraz ze zmianą położenia zwojnicy ruchomej, wobec czego, stosując odpowiedni kształt i układ zwojnic, można wyrównać przynajmniej część skali w ten sposób, ażeby działki, odpowiadające jednakowemu przyrostowi prądu, były przy prądach silnych i słabych możliwie jednakowej szerokości.

Kierunek odchylenia w przyrządach elektrodynamicznych nie zależy od kierunku prądu, ponieważ prądy zgodne zawsze się przyciągają niezależnie od tego, czy płyną w jednę, czy w drugą stronę. Wobec tego amperomierze elektrodynamiczne mogą być stosowane do prądów stałych i zmiennych.

Jeżeli do prądu zmiennego zastosujemy tę samą skalę, co dla prądu stałego, to przy prądzie zmiennym wskazania amperomierza będą wyrażały pierwiastek kwadratowy z przeciętnej kwadratów prądu, a więc wielkość czynną prądu.

Łatwo tego dowieść, rozumując jak następuje:

Zastosowanie poprzednich oznaczeń dla pewnego odchylenia α, przy prądzie stałym i, daje wzór:

$$i^2 = \frac{C_2}{C_1} \, . \, \alpha \quad \text{(a)}$$

Przy prądzie zmiennym moment obrotowy elektrodynamiczny, który działa na zwojnicę ruchomą, będzie zmienny; jednakże z powodu znacznej bezwładności zwojnicy ruchomej otrzymamy tu pewien kąt odchylenia stały, wywołany przez moment średni.

Oznaczmy dalej przez M_s wielkość średniego momentu obrotowego; wtedy:

$$M_s = M',$$

$$M' = C_2 \, . \, \alpha,$$

$$M_s = C_1 \, (i_t^2)_s,$$

gdzie $(i_t^2)_s$ oznacza przeciętną z kwadratów siły prądu. Podstawiając w równaniu momentów wartości dla M' i M_s, otrzymamy:

$$C_1 (i_t^2)_s = C_2 \,.\, \alpha,$$

skąd:

$$(i_t^2)_s = \frac{C_2}{C_1} \,.\, \alpha \quad \text{. . . . . (b)}$$

Z równań zaś (a) i (b), z których pierwsze stosuje się do prądu stałego, a drugie do prądu zmiennego wypada, że:

$$i^2 = (i_t^2)_s,$$

skąd:

$$i = \sqrt{(i_t^2)_s}\,.$$

Równanie to wskazuje, że wielkość prądu stałego równa się pierwiastkowi kwadratowemu z przeciętnej kwadratów prądu zmiennego, przy założeniu, że oba prądy wywołują w amperomierzu jednakowe wychylenia wskazówki.

Tym sposobem amperomierze te mogą bez zmiany skali służyć do mierzenia dowolnych prądów zmiennych, niezależnie od kształtu krzywej i częstości zmian prądu na sekundę. Należy jednak zaznaczyć, że ta niezależność od kształtu krzywej i częstości zmian prądu może być osiągnięta jedynie wówczas, gdy przy budowie przyrządu nie będą stosowane znaczne masy metalowe, w których mogłyby powstawać prądy wirowe. W szczególności należy unikać stosowania żelaza, zwłaszcza przy znacznym nasyceniu magnetycznym, kiedy najwyraźniej uwydatnia się histereza.

W ostatnich czasach zaczęto budować przyrządy elektrodynamiczne z żelazem; w tych przyrządach warunki magnesowania żelaza są tak obrane, że wychylenia przyrządu w bardzo nieznacznym stopniu zależą od kształtu krzywej prądu i częstości zmian.

Amperomierze elektrodynamiczne są najdokładniejszymi przyrządami dla prądu zmiennego. Ze względu jednak na złożoną budowę są one kosztowne. Pozatym z powodu dodatkowych oporów w obwodzie (rys. 321), straty energji wewnątrz przyrządu są dość znaczne.

Na wskazania tych amperomierzy wpływają w stopniu bardzo znacznym pola magnetyczne postronne. Zwojnica ruchoma nie jest magnetycznie osłonięta, przeto zewnętrzne pola magnetyczne, których linje sił przenikają do środka przyrządu, starają się ją obrócić, o ile płaszczyzna zwojnicy nie jest dokładnie prostopadła do tych linji.

Gdy prąd jest stały, pole ziemskie, jak również jakiekolwiek inne pole magnetyczne o kierunku stałym, wpływa na wielkość odchylenia amperomierza.

Natomiast przy prądzie zmiennym, pola magnetyczne o kierunku stałym wpływu nie mają, ale pola zmienne o tym samym okresie zmienności, co prąd w amperomierzu, wywierają wpływ na równowagę zwojnicy ruchomej.

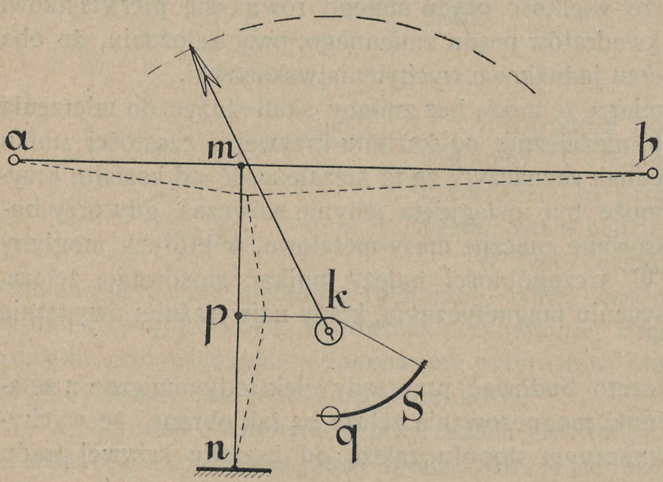
Dla uniknięcia błędów, pochodzących z przyczyn powyższych, należy odczytywać odchylenia przyrządów przy dwuch kierunkach prądu w przyrządzie; odchylenie średnie, obliczone z tych dwuch odczytów, będzie dokładne, ponieważ

przy zmianie kierunku prądu w zwojnicy ruchomej, zmienia się kierunek momentu obrotowego postronnego i przez to wpływy postronne znoszą się.

Na zasadzie przyciągania się i odpychania prądów budowane są rowneż tak zwane wagi elektrodynamiczne, w których siły działające pomiędzy prądami równoważą się ciężarkami, umieszczonemi na drążku posiadającym podziałkę. Przesuwając ciężarek, osiąga się równowagę; z wielkości zaś i z położenia ciężarka można sądzić o sile prądu. Takie wagi są najdokładniejszemi przyrządami do mierzenia prądów zmienych. Wzorcują się one prądem stałym.

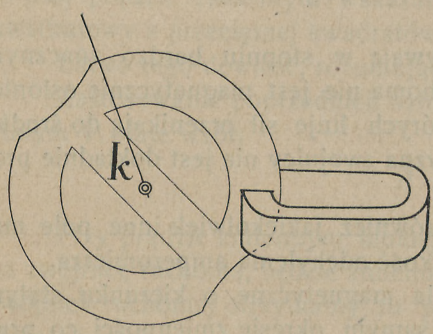
Amperomierze elektrodynamiczne stosują się często tylko w pracowniach elektrotechnicznych, ze względu na znaczne zużycie mocy prądu i kłopotliwą obsługę.

6. **Amperomierze cieplne.** Zasada ustroju amperomierzy tego rodzaju polega na zastosowaniu rozszerzalności ciał pod wpływem ogrzewania. Prąd przepuszcza się przez cienki drut ab (rys. 323), sporządzony ze stopu platyny ze srebrem, lub też platyny z irydem.



Rys. 323.

Do tego drutu w punkcie m przymocowany jest inny cienki drut mn, którego drugi koniec n przyczepia się do nieruchomej części przyrządu. Do drutu mn w punkcie p przyczepiona jest cienka mocna nitka, owinięta koło krążka k i przymocowana drugim końcem do sprężyny S. Sprężyna ta końcem q jest przyśrubowana do nieruchomego słupka.



Rys. 324.

Gdy prąd przepływa przez drut ab, ten ostatni ogrzewa się i wydłuża. Pod wpływem sprężyny S układ drucików po wydłużeniu drutu ab, będzie taki, jak wskazują na rysunku linje przerywane. Krążek k przekręci się przytem, a wraz z nim przesunie się wskazówka przymocowana do niego. Do tłumienia ruchu wskazówki stosuje się tłumik elektromagnetyczny. Na osi krążka k (rys. 324) umocowuje się blaszka aluminiowa, która porusza się w szczelinie pomiędzy biegunami magnesu stałego.

W blaszce, w czasie jej ruchu, powstają prądy indukcyjne wirowe. Działanie hamujące pola magnesu na te prądy tłumi gwałtowne ruchy całego układu ruchomego w tym przyrządzie.

Podany tu ustrój amperomierza cieplnego może służyć jako przykład wykonania takiego przyrządu. Przyrządy stosowane w praktyce mają również najrozmaitsze inne ustroje, zasada jednak pozostaje wszędzie ta sama.

W końcu należy zwrócić uwagę na jeden jeszcze szczegół konstrukcyjny w przyrządach tego rodzaju, szczegół mający na celu zabezpieczenie położenia wskazówki od wpływu zmiany temperatury otaczającego powietrza.

Osiąga się to drogą zastosowania odpowiedniego metalu do sporządzenia płytki, na której przymocowuje się słupki a i b (rys. 323). Metal ten wybiera się z zastrzeżeniem, ażeby spółczynnik rozszerzalności jego był taki sam, jak spółczynnik rozszerzalności drutu ab.

Zależność odchylenia wskazówki amperomierza cieplnego od siły prądu można znaleźć w przybliżeniu w sposób następujący:

Załóżmy, że wydłużenie drutu ab jest proporcyonalne do przyrostu jego temperatury; w takim razie i odchylenie wskazówki będzie oczywiście proporcjonalne do przyrostu tej temperatury. Przyrost zaś temperatury drutu, po którym przebiega prąd, jak wiemy z rozdziału XVI § 1, jest proporcyonalny do drugiej potęgi siły prądu. Wypada więc, że kąt odchylenia wskazówki jest proporcjonalny do kwadratu siły prądu:

$$i^2 = C \cdot \alpha.$$

Jeżeli zaś mamy do czynienia z prądem zmiennym, to odchylenie α będzie proporcyonalne do średniej z kwadratów prądu

$$(i_t^2)_s = C \cdot \alpha.$$

Z tych dwuch równań otrzymujemy:

$$i^2 = (i_t^2)_s$$

$$i = \sqrt{(i_t^2)_s}.$$

Równanie to wskazuje, że gdy prąd zmienny wywołuje to samo odchylenie amperomierza co i prąd stały, to pierwiastek kwadratowy z przeciętnej kwadratów takiego prądu równa się sile prądu stałego. Wobec tego skala amperomierzy cieplnych może służyć do prądów o dowolnym kształcie krzywej i o dowolnej częstości zmian na sekundę.

Wielką zaletę tych przyrządów stanowi zupełna niezależność wskazań ich od pól magnetycznych. Ujemne zaś cechy są to: powolność, z jaką przyrząd odczuwa zmiany w sile prądu i mniejsza dokładność wskazań niż w przyrządach elektrodynamicznych. W technice jednak zastosowanie tych amperomierzy do wszelkich prądów nie nastręcza żadnych wątpliwości. Zwykle są one stosowane do prądów zmiennych, do prądów zaś stałych lepsze są przyrządy z magnesem i zwojnicą ruchomą. Ze względu na proporcjonalność odchylenia do kwadratu prądu, skala amperomierzy cieplnych jest oczywiście niejednostajna.

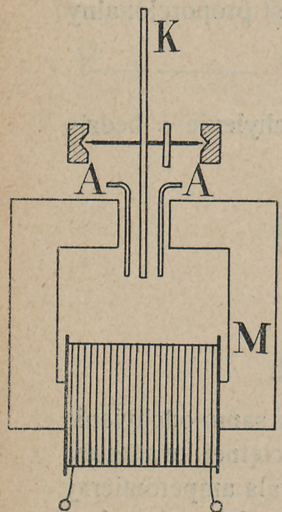
Przez odpowiednie urządzenie przekładni mechanicznej od rozszerzającego się drucika do wskazówki można osiągnąć względnie równe działki na pewnej części skali; w każdym razie jednak działki w pobliżu zera będą zawsze znikomo drobne.

Przez cienki drucik amperomierza cieplnego można przepuścić, bez jego uszkodzenia, tylko nieznaczny prąd; to też amperomierze zaopatrują się zwykle w boczniki, przygotowane z blachy manganinowej, włączone równolegle do drucika.

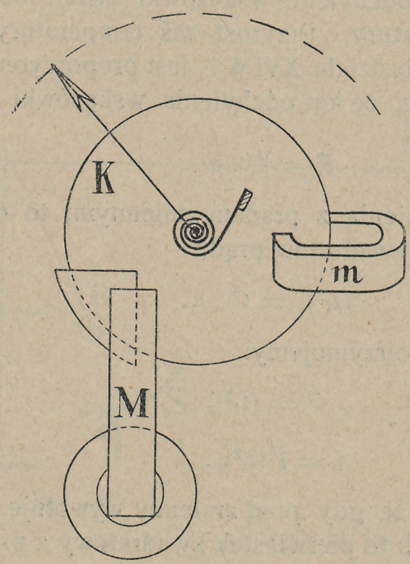
Opór bocznika dobiera się w taki sposób, aby przez niego przechodziła znaczna część prądu, przez drucik zaś — tylko tyle, ile potrzeba do odpowiedniego rozgrzania tegoż.

Przyrządy cieplne zużywają dosyć znaczną moc prądu. Spadek napięcia wewnątrz amperomierza, przy największym wychyleniu wskazówki, wynosi około 0,25 V.

7. **Amperomierze indukcyjne.** Przy pomiarach prądu zmiennego stosuje się przyrządy, których działanie opiera się na spółdziałaniu prądów indukowanych w blaszkach metalowych przez zmienne pole magnetyczne, albo też na działaniu mechanicznem zmiennego pola magnetycznego na prądy wywołane przez to pole w blaszce ruchomej. Ustrój przyrządów pierwszego rodzaju jest następujący (rys. 325 i 326). W szczelinie między biegunami elektromagnesu obraca się krążek (aluminjowy) glinowy albo miedziany K, osadzony na osi zaopatrzonej w sprężynę spiralną. Powierzchnie biegunowe elektromagnesu są częściowo przykryte płytkami metalowemi A.



Rys. 325.



Rys. 326.

Zmienny prąd w zwojnicy wywołuje zmienne pole magnetyczne w szczelinie pomiędzy biegunami. To zmienne pole wzbudza prądy w krążku K i w płytkach A. Prądy te są w fazie, przyciągają się więc i skutkiem tego krążek obraca się w kierunku ruchu wskazówek zegara, jednocześnie jednak skręca się sprężyna spiralna i w pewnym położeniu krążka moment obrotowy, wywołany przez spółdziałanie prądów indukowanych, równoważy się z momentem skręcającym sprężyny.

Wtedy krążek K jest nieruchomy, a wskazówka przymocowana do osi krążka wskazuje na skali kąt obrotu krążka.

Stały magnes stalowy m służy tu do tłumienia wahań krążka K za pomocą działania tego magnesu na prądy wirowe, wzniecane w krążku w czasie jego ruchu.

Kąt obrotu krążka jest tu w przybliżeniu proporcjonalny do drugiej potęgi prądu w zwojnicy. Wynika to z następującego rozumowania.

Moment obrotowy elektrodynamiczny M, działający na krążek, jest proporcjonalny do prądów wznieconych w krążku — i_1 i do prądów wznieconych w płytkach A—i_2.

Jeżeli C jest wielkość stała, to:

$$M_t = C \,.\, i_{1t} \,.\, i_{2t}.$$

Każdy z prądów i_1 i i_2 jest proporcjonalny do prądu, płynącego w zwojnicy i. Jeżeli C_1 i C_2 są wielkościami stałemi, to:

$$i_{1t} = C_1 \,.\, i_t, \quad \text{a} \quad i_{2t} = C_2 \,.\, i_t,$$

a przeto:

$$M_s = C \,.\, C_1 \,.\, C_2 \,.\, (i_t^2)_s = C_3 \,.\, (i_t^2)_s.$$

Moment, wywołany sprężystością sprężyny, oznaczymy przez M', kąt obrotu krążka przez α, a wielkość stałą przez K, wtedy:

$$M' = K \,.\, \alpha.$$

W chwili równowagi:

$$M_s = M',$$

a więc:

$$C_3 \,.\, (i_t^2)_s = K \,.\, \alpha,$$

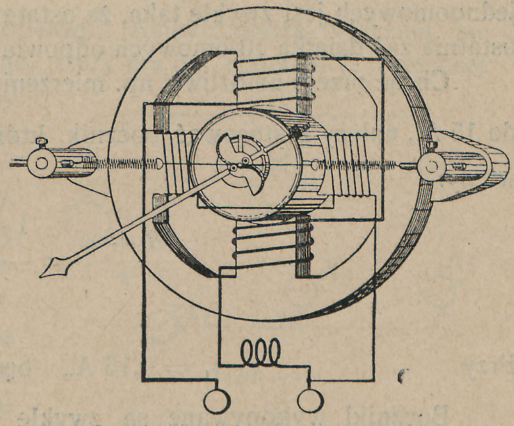
skąd:

$$(i_t^2)_s = C_4 \,.\, \alpha.$$

Wzór ten stwierdza, że kąt obrotu krążka jest proporcjonalny do drugiej potęgi siły prądu, przepływającego przez zwojnicę.

Ponieważ prąd jest szybko zmienny, przeto stałe odchylenie przyrządu otrzymuje się pod wpływem średniej wartości kwadratów siły prądu, czyli kwadratu wartości czynnej siły prądu.

Inny przyrząd tego samego rodzaju widzimy na rys. 327. Pierścień żelazny z czterema występami wewnętrznemi jest zrobiony z cienkich blaszek żelaznych. Na dwuch występach nawinięto niewielką liczbę zwojów drutu grubego, przez który przepływa większa część prądu. Na pozostałych występach nawinięto większą ilość zwojów drutu cieńszego, przez który płynie prąd odgałęziony. Prądy w zwojach grubych i cienkich nie są w fazie, skutkiem czego wytwarzają one pole magnetyczne wirujące. W tym polu umieszczony jest pusty walec glinowy, umocowany na osi opartej na dwuch łożyskach. Do osi przytwierdzona jest również wskazówka i końce sprężyn spiralnych, których drugie końce są zamocowane nieruchomo.



Rys. 327.

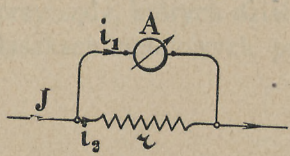
Pole magnetyczne wirujące wytwarza w walcu glinowym prądy indukcyjne. Według prawa Lenza, prądy te mają taki kierunek, że pole pociąga za sobą walec.

Ten moment obrotowy elektromagnetyczny odchyla wskazówkę przyrządu o pewien kąt i równoważy się z momentem skręcającym sprężyn spiralnych.

Zależność odchylenia wskazówki od siły prądu w tym przyrządzie jest taka sama, jak powyżej wyprowadzona dla przyrządu z krążkiem.

Wskazania tych amperomierzy są ścisłe tylko dla prądu zmiennego o takiej postaci linji krzywej, wyrażającej zmienność prądu w czasie, i o takiej częstości zmian, jakie miał prąd użyty do wzorcowania.

8. Rozszerzenie skali amperomierzy. W razie potrzeby rozszerzenia skali amperomierza przy prądzie stałym, stosuje się zwykle t. zw. boczniki czyli opory dokładne, włączane równolegle do amperomierza. Oznaczmy opór bocznika (rys. 328) przez r, a opór amperomierza przez R, siłę prądu, przed rozgałęzieniem tegoż przez J, a prądy w amperomierzu i w boczniku przez i_1 i i_2.



Rys. 328.

Według pierwszego prawa Kirchhoffa:

$$J = i_1 + i_2.$$

Drugie zaś prawo Kirchhoffa dla obwodu zamkniętego daje:

$$i_1 . R - i_2 . r = 0.$$

Z tych dwuch równań, po wyrugowaniu i_2, otrzymamy:

$$J = i_1 . \frac{(R + r)}{r}.$$

Wzór ten wskazuje, że za pomocą bocznika możemy zwiększyć wartość wskazań amperomierza w stosunku $\frac{R + r}{r}$.

Często stosuje się amperomierze jednoomowe lub dziesięcioomowe. Skala jednoomowych jest zwykle taka, że ostatnia działka odpowiada sile prądu 0,15 A., ostatnia zaś działka 10-omowych odpowiada sile prądu 0,0045 A.

Chcąc przeto umożliwić np. mierzenie amperomierzem jednoomowym prądów do 15 A., należy zastosować bocznik, którego opór wynosi: $r = \frac{1}{99}$ Ω, ponieważ wtedy:

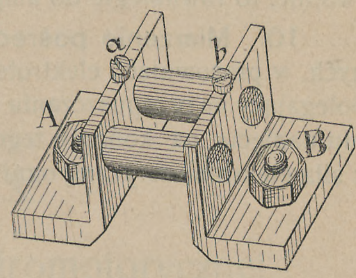
$$\frac{R + r}{r} = \frac{1 + \frac{1}{99}}{\frac{1}{99}} = 100.$$

Przy $i_1 = 0{,}15$ A., będzie $J = 15$ A.

Boczniki wykonywane są zwykle z manganinu dla uniknięcia znacznego wpływu temperatury na ich opór.

W celu osiągnięcia dobrego chłodzenia takich boczników przez otaczające powietrze, robi się je zwykle z płaskiej blachy manganinowej lub też z rurek manganinowych.

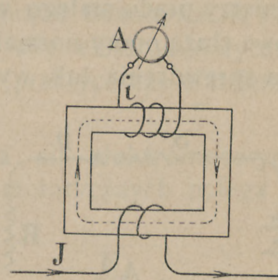
Na rys. 329 widzimy bocznik dziesięcioomowego amperomierza dla prądu do 750 A. Przez śruby A i B doprowadza się i odprowadza prąd, a zapomocą śrub a i b bocznik łączy się z amperomierzem.



Rys. 329.

Przy prądzie zmiennym, w razie potrzeby rozszerzenia skali amperomierzy, stosuje się transformatory pomiarowe. Zasada ustroju takich transformatorów jest następująca:

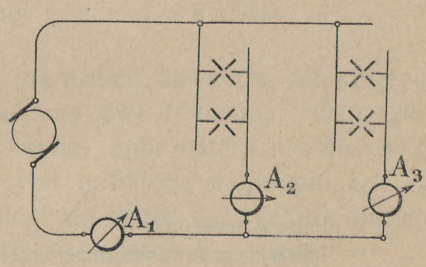
Na ramkę żelazną, składającą się z blaszek (rys. 330) (dla uniknięcia prądów wirowych) nawija się jeden lub kilka zwojów przewodnika, z prądem J, który mamy zmierzyć. Prąd ten wywołuje w żelazie ramki zmienny strumień magnetyczny, który przez indukcję wznieca w zwojnicy połączonej z amperomierzem prąd wtórny i, wywołujący odchylenie amperomierza. Na skali takiego amperomierza z transformatorem znajdują się zwykle liczby, wskazujące wprost wielkość prądu J.



Rys 330.

Wskazania każdego amperomierza, zaopatrzonego w transformator, zależą do pewnego stopnia od kształtu krzywej prądu i od częstości zmian na sekundę. Wobec tego, dla otrzymania wskazań całkiem ścisłych, stosować należy taki zespół tylko przy tym prądzie, zapomocą którego był on wzorcowany. Transformatory pomiarowe zawsze stosują się przy prądach wysokiego napięcia, wynoszących ponad 1000 V. W ten sposób unikamy doprowadzania przewodników niebezpiecznych o wysokim napięciu prądu do tablic rozdzielczych, na których są umieszczone przyrządy pomiarowe.

9. **Włączanie amperomierzy w obwód.** Amperomierze włączają się zawsze w taki sposób, ażeby całkowity prąd, który ma być zmierzony, przeszedł przez amperomierz. Na rys. 331 wskazany jest przykład włączenia trzech amperomierzy, z których A_1 mierzy całkowity prąd, dostarczany przez prądnicę, A_2 i A_3 mierzą prądy, płynące do poszczególnych grup lamp. Aby uniknąć znacznych strat energji w amperomierzach, opór ich musi być **możliwie jaknajmniejszy**; wtedy moc $J^2 r$, zamieniająca się na ciepło, będzie niewielka. Im większą jest siła prądu, do mierzenia której przeznaczony jest amperomierz, tem mniejszy jest jego opór. Dokładne amperomierze budowane są często w ten sposób, że napięcie na końcówkach amperomierza nigdy nie przewyższa 0,045 V; opór więc tych przyrządów, dla prądów od 1 do 1000 A., waha się w granicach od 0,045 Ω do $45 \cdot 10^{-6}$ Ω. Dla osiągnięcia małego oporu zwojnice amperomierzy wyrabiane są z grubego drutu miedzianego, który



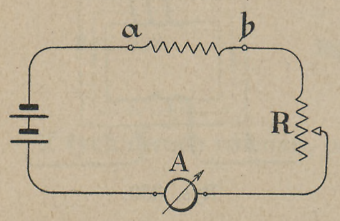
Rys. 331.

nawija się zaledwie kilku zwojami, a przy bardzo silnych prądach nawet jednym tylko zwojem. O ile zaś budowa przyrządu nie pozwala na stosowanie takich zwojnic, to równolegle do amperomierza włączają się odpowiednie boczniki.

10. Mierzenie pośrednie siły prądu. Przy pomiarach bardzo dokładnych, w pracowniach elektrotechnicznych, stosuje się sposób mierzenia siły prądu, polegający na przepuszczaniu mierzonego prądu przez dokładny opór r i wyznaczaniu napięcia na końcach tego oporu metodą kompensacyjną[1]) przez porównanie z siłą elektromotoryczną ogniwa normalnego Westona. Prąd oblicza się ze wzoru:

$$J = \frac{e}{r}.$$

11. Wzorcowanie amperomierzy [2]). Przy sprawdzaniu dokładnych amperomierzy prądu stałego w pracowniach elektrotechnicznych za wielkości podstawowe służą opory normalne i siła elektromotoryczna normalnego ogniwa Westona. Dla sprawdzenia lub wywzorcowania dokładnego amperomierza zestawiamy obwód wskazany na rys. 332, a składający się z baterji akumulatorów, normalnego dokładnie znanego oporu ab, opornika regulacyjnego R i amperomierza A, podlegającego sprawdzeniu. Zmieniając opór R, ustawiamy wskazówkę amperomierza na różne działki, a jednocześnie mierzymy napięcie na końcówkach oporu ab; podług tego napięcia obliczamy siłę prądu, wywołującą zanotowane odchylenia amperomierza.



Rys. 332.

Amperomierze prądu zmiennego wzorcuje się przez porównanie z amperomierzami elektrodynamicznemi, które mają skalę wyznaczoną zapomocą prądu stałego.

Mniej dokładne amperomierze elektromagnetyczne i inne wzorcujemy przez porównanie ich z amperomierzami dokładnemi, w tym celu włącza się je w jeden obwód w ten sposób, aby przez oba amperomierze przechodził jeden i ten sam prąd.

---

[1]) Patrz § następny.
[2]) Inaczej: cechowanie amperomierzy.

ROZDZIAŁ XXX.

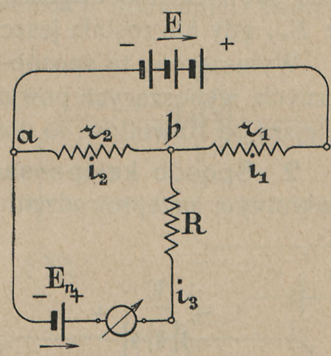
Mierzenie napięcia i siły elektromotorycznej.

Mierzenie napięcia i siły elektromotorycznej źródeł prądu dokonywa się przy dokładnych pomiarach przez porównanie napięcia lub siły elektromotorycznej z siłą elektromotoryczną normalnego ogniwa Westona; w praktyce zaś codziennej mierzenie to uskutecznia się za pomocą woltomierzy.

1. Sposób kompensacyjny prosty porównania sił elektromotorycznych. [1]) Zasada tego sposobu porównywania sił elektromotorycznych polega na dobraniu takich oporów r_1 i r_2 w układzie wskazanym na rys. 333, by prąd równał się zeru w tym odgałęzieniu, gdzie znajduje się siła elektromotoryczna E_n. Dla przekonania się o tym, służy galwanometr, włączony w to odgałęzienie. Prąd w galwanometrze równa się zeru wtedy, gdy rozkład potencjałów wzdłuż oporów r_1 i r_2 czyni zadość równaniu:

$$V_b - V_a = E_n,$$

gdzie przez V_a i V_b oznaczone są potencjały w punktach a i b. Słowami warunek ten da się wyrazić, jak następuje: napięcie na punktach a, b równoważyć się winno z siłą elektromotoryczną E_n.



Rys. 333.

Na podstawie drugiego prawa Kirchhoffa, dla dwuch obwodów zamkniętych w układzie, wskazanym na rys. 333, ułożyć możemy dwa równania. Oznaczmy prądy przez i_1, i_2, i_3 w kolei wskazanej na rysunku, opór baterji o sile elektromotorycznej E, wraz z przewodnikami, łączącymi tę baterję z oporami r_1 i r_2, przez R_1, cały zaś opór odgałęzienia równoległego do oporu r_2, a zawierającego ogniwo o sile elektromotorycznej E_n i galwanometr — przez R_2; wtedy:

$$E = i_1 . (r_1 + R_1) + i_2 . r_2 ,$$

$$E_n = i_2 . r_2 - i_3 . R_2 .$$

Zakładając, że opory r_1 i r_2 zostały tak dobrane, że $i_3 = 0$, otrzymamy według pierwszego prawa Kirchhoffa:

$$i_1 = i_2 .$$

[1]) Podany przez Poggendorffa.

Załóżmy teraz, że:

$$i_1 = i_2 = i.$$

Wtedy, mając na względzie, że $i_3 = 0$, powyższe dwa równania przybiorą postać:

$$E = i . (r_1 + R_1 + r_2),$$

$$E_n = i . r_2 .$$

Z tych dwuch równań otrzymamy:

$$E = E_n . \frac{r_1 + R_1 + r_2}{r_2} .$$

Opory r_1 i r_2 stosujemy przytym tak duże, ażeby w porównaniu z nimi można było opuścić mały opór R_1.

Opuszczając tedy opór R_1, otrzymamy:

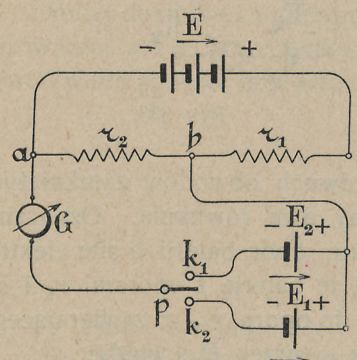
$$E = E_n . \frac{r_1 + r_2}{r_2} .$$

Ogniwo o sile elektromotorycznej E_n jest zwykle normalnym ogniwem Westona; wielkość E_n jest więc znana.

Znając zaś wartości oporów r_1 i r_2, obliczymy z powyższego równania nieznaną siłę elektromotoryczną E. Opór R służy dla osłabienia prądu w ogniwie E_n, gdy nie została jeszcze osiągnięta zupełna równowaga w układzie.

Wyłuszczony tu sposób stosuje się zwykle do wyznaczenia sił elektromotorycznych, wynoszących powyżej 10 woltów. Jeżeli zaś siła elektromotoryczna jest mniejsza od 10 woltów, to dogodniej stosować sposób kompensacji podwójnej.

2. **Sposób kompensacji podwójnej.** [1]) Zasada tego sposobu polega na dwukrotnym przeprowadzeniu czynności, opisanych przy sposobie poprzednim.



Rys. 334.

Układ połączeń na rys. 334 wskazuje, że za pomocą przełącznika p w obwód galwanometru wprowadzić można ogniwo o sile elektromotorycznej E_1, lub też E_2.

Jeżeli wyłącznik p znajduje się na kontakcie k_1, to, dobierając odpowiednio opory r_1 i r_2, osiągamy zrównoważenie siły elektromotorycznej E_2 przez napięcie na punktach ab; nastąpi to wtedy, gdy prąd w obwodzie galwanometru będzie równać się zeru. Oznaczmy wartości oporów r_1 i r_2, które będą wtedy, przez r_1' i r_2'. W takim razie na podstawie powyżej wyprowadzonego wzoru otrzymamy:

$$E = E_2 . \frac{r_1' + r_2'}{r_2} .$$

Jeżeli zaś przełącznik p znajduje się na kontakcie k_2, to dobieramy opory r_1, r_2 w taki sposób, ażeby zrównoważyć siłę elektromotoryczną E_1 napięciem

[1]) Według Du Bois-Reymond'a

na ab, zachowując jednak sumę obu oporów stałą. Oznaczmy przez r_1'' i r_2'' takie wartości tych oporów, przy których w tym drugim przypadku prąd w obwodzie galwanometru równa się zeru. Wtedy na tej samej zasadzie, co i poprzednio, otrzymamy wzór:

$$E = E_1 \cdot \frac{r_1'' + r_2''}{r_2''} .$$

Z powyższych dwuch równań, wprowadzając warunek, że $r_1' + r_2' = r_1'' + r_2''$, otrzymujemy:

$$\frac{E_2}{r_2'} = \frac{E_1}{r_2''} ,$$

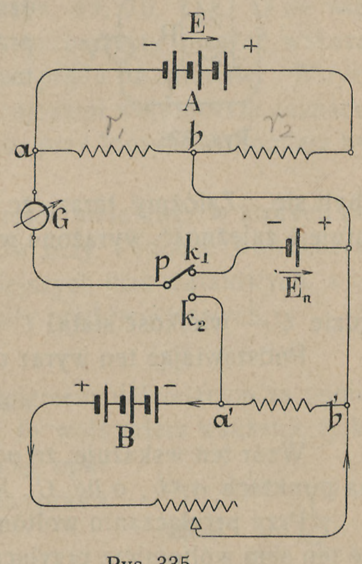
czyli:

$$E_1 = E_2 \cdot \frac{r_2''}{r_2'} .$$

Znając zaś siłę elektromotoryczną E_2 i stosunek oporu r_2'' do oporu r_2', możemy obliczyć z tego równania niewiadomą wartość siły elektromotoryczuej E_1.

Oba sposoby kompensacyjne nadają się również do wyznaczania napięcia na jakichkolwiek dwuch punktach obwodu, po którym przebiega prąd. Najczęściej jednak stosuje się w tym przypadku sposób kompensacji podwójnej, ponieważ do układu kompensacyjnego nie odgałęzia się żaden prąd.

Układ połączeń przy pomiarze napięcia sposobem kompensacji podwójnej wskazany jest na rys. 335. Chodzi tu o zmierzenie napięcia na punktach $a'b'$ obwodu B; otóż przyłączamy te punkty do obwodu A w taki sposób, jak to wskazuje rysunek, przestawiając przełącznik p na kontakt k_2. Dobieramy opory r_1 i r_2 w obwodzie A w ten sposób, aby osiągnąć równowagę pomiędzy napięciem na punktach ab i $a'b'$. Prąd w obwodzie galwanometru będzie wtedy równać się zeru.



Rys. 335.

Załóżmy, że równowaga powyższych napięć została już osiągnięta, i oznaczmy siłę prądu w obwodzie A przez i, wartość oporu r_2 pomiędzy punktami a i b — przez r_2', napięcie zaś na punktach $a'b'$, równe napięciu na punktach ab, przez e; wtedy na zasadzie prawa Ohma będzie:

$$e = i \cdot r_2' .$$

Przestawiając przełącznik p na kontakt k_1, włączamy ogniwo z siłą elektromotoryczną E_n. Opory r_2 i r_1 dobieramy w taki sposób, ażeby, zachowując wartość poprzednią ich sumy, otrzymać w obwodzie galwanometru prąd równy zeru. Wtedy z napięciem na punktach a, b równoważy się siła elektromotoryczna E_n, która tym sposobem równać się będzie temu napięciu.

Prąd w obwodzie A został poprzedni, ponieważ sumę oporów r_1 i r_2 zachowaliśmy bez zmiany.

Oznaczmy teraz nową wartość oporu r_2, przy którym prąd w galwanometrze równa się zeru, przez r_2''; wtedy na zasadzie prawa Ohma będzie:

$$E_n = i \, . \, r_2'' .$$

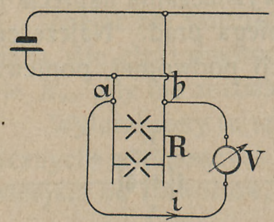
Zestawiając powyższe dwa równania, otrzymamy:

$$e = E_n \, . \, \frac{r_2'}{r_2''} .$$

Z tego wzoru obliczyć można wartość napięcia e, o ile znane są siła elektromotoryczna E_n ogniwa normalnego i stosunek oporów r_2' do r_2''.

3. Woltomierze. Do mierzenia napięć i sił elektromotorycznych posługujemy się jednak najczęściej woltomierzami. Są dwa rodzaje tych przyrządów: woltomierze urządzone tak samo, jak amperomierze i woltomierze elektrostatyczne.

Woltomierze działające prądem. Pomiar napięcia za pomocą woltomierzy pierwszego rodzaju opiera się na zasadzie następującej: Jeżeli mamy zmierzyć napięcie pomiędzy dwoma punktami a i b pewnego obwodu, to przyłączamy woltomierz w sposób, wskazany na rysunku 336. Część prądu obwodu głównego odgałęzia się do woltomierza i, jeżeli siłę prądu w woltomierzu oznaczymy przez i, opór obwodu woltomierza $a\,V b$ przez R i napięcie pomiędzy punktam a, b przez e, to na zasadzie prawa Ohma będzie:



Rys. 336.

$$e = i \, . \, R .$$

Pod wpływem prądu i wskazówka woltomierza odchyli się. Załóżmy teraz, że pomiędzy prądem i a odchyleniem woltomierza α istnieje zależność, wyrażona wzorem:

$$i = C \, . \, \alpha ,$$

gdzie C — wielkość stała.

Podstawiając ten wyraz dla i w równanie poprzednie, otrzymamy:

$$e = C \, . \, \alpha \, . \, R = C \, . \, R \, . \, \alpha .$$

Wzór ten wskazuje, że odchylenia woltomierza są proporcjonalne do napięcia na punktach a, b, o ile $C \, . \, R$ jest wielkością stałą.

Przy przełączaniu woltomierza z jednego miejsca na drugie zdarza się nieraz, że ten sam woltomierz przyłącza się za pomocą rozmaitych drutów, skutkiem czego opór całkowity R będzie za każdym razem inny. Jednakże różnice w tych oporach są zwykle bardzo małe. Jeżeli np. do przyłączenia woltomierza zastosujemy druty miedziane o przekroju 1 mm^2 i długości ogólnej 2 m, to opór takich drutów wyniesie około 0,0351 Ω, opór zaś woltomierza wynosi np. około 1000 Ω. Tym sposobem opór tych drutów stanowi zaledwie drobną część procentu oporu całkowitego. W takich wypadkach można przyjmować, że napięcie w punktach ab równa się napięciu na zaciskach woltomierza.

W innych warunkach, np. w tym razie, jeżeli druty, doprowadzajace prąd do woltomierza, są bardzo długie, należy uwzględnić opór tychże przy wyznaczaniu wartości wskazań woltomierza.

Ważną jest również rzeczą baczyć, ażeby opór R nie zmieniał się pod wpływem zmian temperatury. Osiąga się to w przybliżeniu, stosując w woltomierzach opory dodatkowe, łączone w szereg ze zwojnicami, a zrobione z drutu manganinowego, lub też z innego stopu, mającego możliwie najmniejszy spółczynnik cieplny oporu. Jeżeli drut manganinowy stanowi większą część oporu woltomierza, to opór ogólny zmienia się bardzo mało pod wpływem temperatury; to też praktycznie opór R możemy uważać za stały.

Przy prądzie zmiennym odgrywa także rolę samoindukcja; całkowity opór woltomierza wyraża się wzorem:

$$R = \sqrt{r^2 + (z\pi L)^2},$$

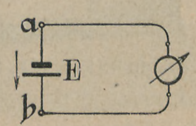
gdzie r — opór omiczny woltomierza, L — spółczynnik samoindukcji, a z — liczba zmian prądu w ciągu sekundy.

Z tego wzoru wynika, że opór całkowity woltomierza zależy od liczby zmian prądu na sekundę, a więc wartość wskazań woltomierza będzie różna dla rozmaitych prądów.

Chcąc uniknąć tej niedogodności, należy zmniejszyć wpływ składnika $z\pi L$ przez nadanie dużej wartości składnikowi r. W tym celu w obwodach woltomierzy wstawia się duże opory bezindukcyjne (patrz rys. 69, 70, 71). O ile więc $z\pi L$ stanowi małą część procentu całego oporu R, to możemy uważać wskazania takiego woltomierza za niezależne od liczby zmian prądu na sekundę. W tych przypadkach, gdy to jest niemożliwe do osiągnięcia, na skali woltomierza zaznacza się liczbę zmian lub okresów na sekundę tego prądu, przy którym woltomierz był wzorcowany.

Na wielkość L wpływają również rozmaite części metalowe, w których powstają prądy wirowe. Dla uniknięcia tych wpływów przy budowie woltomierzy prądu zmiennego należy unikać stosowania znaczniejszych mas metalowych, a te, które są nieuniknione, rozdzielać dla zmniejszenia siły prądów wirowych.

Przy mierzeniu sił elektromotorycznych woltomierzem działającym za pomocą prądu, należy mieć na względzie tę okoliczność, że woltomierz wskazuje tylko napięcie e na końcówkach a, b (rys. 337). Jeżeli więc opór wewnętrzny źródła prądu jest r, to na podstawie prawa Ohma wzór dla siły elektromotorycznej E będzie:



Rys. 337.

$$E = e + i \cdot r.$$

Ponieważ zaś prąd płynący do woltomierza jest zwykle mały, a opór wewnętrzny źródeł prądu niewielki, przeto w przybliżeniu:

$$E = e.$$

Pozatym należy mieć na uwadze, że wielkość siły elektromotorycznej, np. w ogniwach, zmienia się nieco pod wpływem prądu, przepływającego przez ogniwo.

Z tego wynika wniosek ogólny, że mierzenie siły elektromotorycznej woltomierzami biorącymi prąd jest nieścisłe; w technice jednak, mianowicie w tych przypadkach, gdzie nie chodzi o wielką ścisłość, takie pomiary niejednokrotnie bywają stosowane.

Co się tyczy szczegółów ustroju woltomierzy działających prądem, to typów tych przyrządów jest tyleż, co i amperomierzy, a ustrój ich różni się od ustroju amperomierzy tem tylko, że zwojnice wykonane są z cienkiego drutu i że daje się w nich spory opór nawinięcia, a w razie potrzeby włącza się w szereg opory dodatkowe.

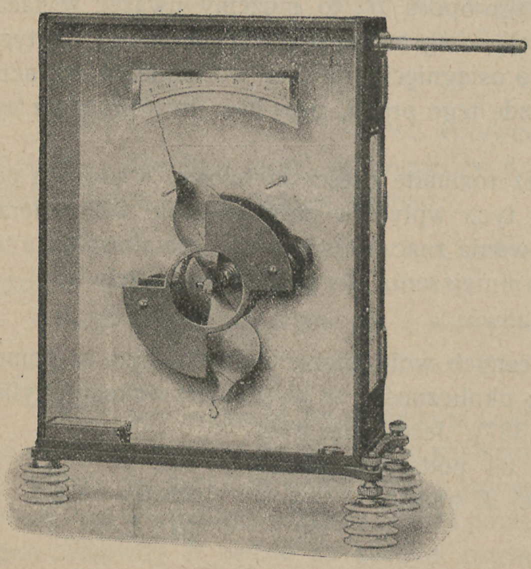
Przyrządy dla prądu zmiennego wzorcują się według wartości czynnej napięcia (pierwiastek kwadratowy z przeciętnej kwadratów).

Woltomierze cieplne i elektrodynamiczne mogą służyć przy zachowaniu tej samej skali do mierzenia napięcia dowolnie zmiennego [1]) i stałego.

Woltomierze elektrostatyczne. Zasada urządzenia i działania woltomierzy elektrostatycznych polega na własności przyciągania się wzajemnego okładek naładowanych kondensatorów. Na str. 222 wyprowadzony był dla tej siły wzór:

$$F = \frac{e^2 \cdot S \cdot \mathbf{k}}{8\pi \cdot d^2},$$

z którego widzimy, że siła ta jest proporcjonalną do drugiej potęgi napięcia, czyli różnicy potencjałów pomiędzy okładkami; wobec tego woltomierze zbudowane na tej zasadzie mogą służyć zarówno do prądu zmiennego, jak i do stałego. Wartości podziałek, wyznaczone przy prądzie stałym, będą stanowiły przy prądzie zmiennym pierwiastki kwadratowe z przeciętnej kwadratów wartości chwilowych napięcia.



Rys. 338.

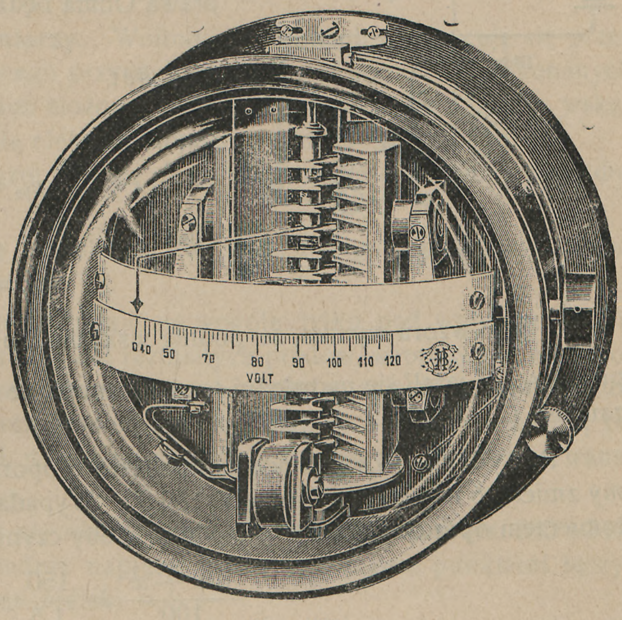
Z pomiędzy rozmaitych ustrojów stosowanych w praktyce, najważniejsze są dwa. Dla napięć dość wysokich, wynoszących od kilkuset do kilkudziesięciu tysięcy woltów, stosuje się woltomierz, składający się z czterech nieruchomych płytek mosiężnych (rys. 338) i listka glinowego między niemi, obracającego się około osi poziomej. U dołu listka zawieszamy ciężarek; dobiera się on w ten sposób, ażeby, przy równych potencjałach układów ruchomego i nieruchomego, wskazówka znajdowała się na zerze skali, a przy połączeniu układu nieruchomego z jednym, a ruchomego z drugim punktem, gdzie mierzymy

---

[1]) Aby tylko zmienność nie była zbyt powolna.

różnicę potencjałów, wskazówka stanęła na działce właściwej. Gdy pomiędzy układami ruchomym i nieruchomym istnieje pewna różnica potencjałów, listek jest wciągany pomiędzy płytki nieruchome skutkiem przyciągania elektrostatycznego. Listek ten będzie w równowadze wtedy, gdy siła, wciągająca listek, zrównoważy się z siłą ciężkości, działającą na układ ruchomy.

W odmienny sposób urządzony jest woltomierz, przystosowany do mierzenia napięć od kilkudziesięciu do stukilkudziesięciu woltów. Układ najważniejszych części tego przyrządu widzimy na rys. 339.



Rys. 339.

Dwa [1]) rzędy płytek nieruchomych, ustawionych poziomo, stanowią jedną okładkę kondensatora, drugą okładkę tworzy szereg płytek, przymocowanych do pręta, zawieszonego na cienkiej wstążeczce metalowej.

Pod wpływem sił przyciągania elektrostatycznego, płytki ruchome zostają wciągnięte pomiędzy płytki nieruchome; przeciwdziała temu siła sprężystości powyższej wstążeczki, która podczas obrotu układu ruchomego skręca się.

Najważniejszą zaletą woltomierzy elektrostatycznych jest to, że przy napięciu stałym nie biorą one całkiem prądu, a przy napięciu zmiennym z powodu małej pojemności woltomierzy, prąd płynący do nich jest tak słaby, że może być w praktyce uważany za równy zeru.

Ujemną zaś cechą tych przyrządów jest znaczna ich wrażliwość na wpływy elektrostatyczne postronne i potrzeba starannej obsługi; ze względu bowiem na małe siły, poruszające wskazówki tych przyrządów, jest rzeczą konieczną, by części ruchome były zawieszone bardzo delikatnie.

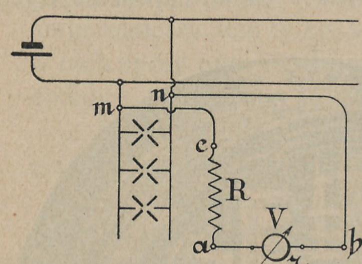
4. Rozszerzenie skali woltomierzy. Jeżeli chodzi o zmierzenie napięcia, przekraczającego skalę danego woltomierza, to przy zwykłych woltomierzach, działających prądem, stosuje się opory dodatkowe, włączone w szereg. Układ połączeń wypada wtedy taki, jak wskazuje rys. 340. Woltomierz o oporze własnym r z oporem dodatkowym R zastosowany tu jest do mierzenia napięcia na punktach mn obwodu lampek.

[1]) Jeden rząd jest widoczny z prawej strony przyrządu, drugi znajduje się z lewej strony, na rysunku przykryty płytką pionową.

Załóżmy, że skala woltomierza stosuje się do napięcia e_{ab}; wtedy wskazania woltomierza α z napięciem na ab związane są wzorem:

$$e_{ab} = C \,.\, \alpha,$$

gdzie C jest stała. Przy napięciu danym e_{ab}, napięcie na punktach cb znajdziemy łatwo na podstawie następującego rozumowania.



Rys. 340.

Oznaczmy prąd w obwodzie woltomierza przez i; wtedy napięcie na punktach ab według prawa Ohma będzie:

$$e_{ab} = i \,.\, r,$$

a na bc:

$$e_{bc} = i \,.\, (r + R),$$

skąd:

$$e_{bc} = e_{ab} \,.\, \frac{r + R}{r},$$

albo:

$$e_{bc} = \frac{r + R}{r} \,.\, C \,.\, \alpha.$$

Z tego wzoru wynika, że podług wskazań woltomierza α, można określić napięcie e_{bc},[1]) jeżeli się uwzględni tę okoliczność, że stała przyrządu jest $\frac{r + R}{r} \,.\, C$ zamiast C.

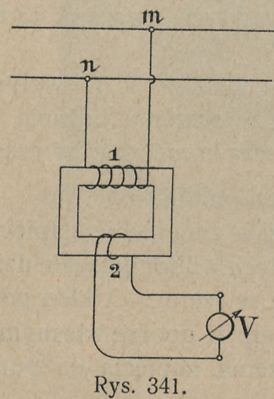
P r z y k ł a d. Za pomocą woltomierza o oporze 100 Ω ze skalą do 1,5 V mamy zmierzyć napięcie, wynoszące 150 V. Wypada więc włączyć do szeregu z woltomierzem opór dodatkowy — x, taki, ażeby czynił zadość równaniu:

$$\frac{100 + x}{100} = \frac{150}{1{,}5},$$

skąd:

$$x = 9900\ \Omega.$$

Jeżeli chodzi o rozszerzenie skali woltomierza elektrostatycznego, stosowane są kondensatory, włączane w szereg z woltomierzem: napięcie mierzone rozkłada się wtedy pomiędzy woltomierz i kondensator dodatkowy odwrotnie proporcjonalnie do pojemności. [2])



Rys. 341.

Przy prądzie zmiennym, zamiast oporów i kondensatorów, stosuje się przeważnie transformatory, obniżające napięcie.

Jeżeli mamy zmierzyć wysokie napięcie pomiędzy punktami m i n (rys. 341) za pomocą woltomierza, mającego skalę, przystosowaną do napięcia niższego, to woltomierz włącza się w obwód wtórny transformatora, którego obwód pierwotny łączy się z punktami m i n.

---

[1]) Wobec małego oporu drutów, łączących przyrządy z punktami m i n, możemy przyjąć $e_{bc} = e_{mn}$.

[2]) Patrz rozdział IX § 6.

Zwojnica pierwotna ma dużo zwojów, wtórna zaś mało; obie zwojnice osadzone są na wspólnej ramie żelaznej. Za pośrednictwem strumienia magnetycznego, przenikającego tę ramę, w zwojnicy wtórnej powstaje siła elektromotoryczna, tyle razy mniejsza od napięcia pierwotnego, ile razy mniej zwojów ma wtórna zwojnica w porównaniu z pierwotną. [1]) Na skali woltomierza zazwyczaj wskazane są liczby, wyrażające napięcie na końcówkach zwojnicy pierwotnej.

Tego rodzaju transformatory stosują się również wtedy, gdy chodzi o uniknięcie doprowadzenia prądu wysokiego napięcia wprost do przyrządu mierniczego.

5. Wzorcowanie woltomierzy. Woltomierze dokładne wzorcuje się przez porównanie wskazań wzorcowanego przyrządu z wynikami pomiarów, dokonanych sposobem kompensacji prostej lub złożonej, t. j. przez porównanie napięcia, wskazywanego przez woltomierz z siłą elektromotoryczną ogniwa normalnego.

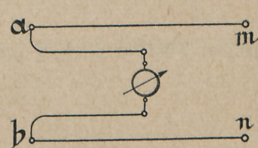
Woltomierze techniczne wzorcuje się przez porównanie z woltomierzami dokładnemi.

Woltomierze, mające skalę jednakową dla prądu stałego i zmiennego, wzorcowane są zazwyczaj prądem stałym.

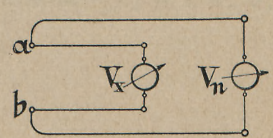
Inne zaś woltomierze, które odchylają się wogóle tylko pod wpływem prądu zmiennego lub też mają skalę różną dla rozmaitych prądów, wzorcowane są odpowiednim prądem zmiennym przez porównanie ich odchyleń ze wskazaniami woltomierzy dokładnych, wzorcowanych prądem stałym i mających skalę niezależną od rodzaju prądu. W tenże sposób należy wzorcować wszystkie woltomierze z transformatorami.

Przy wzorcowaniu stosuje się układy połączeń wskazane na rys. 342 i 343. Na punktach ab mamy odpowiednie napięcie zmienne i z tymi punktami łączymy badany woltomierz, a przez zaciski $m\ n$ — przyrząd kompensacyjny. Jeżeli wzorcuje się woltomierz techniczny V_x, to, zamiast przyrządu kompensacyjnego, włącza się woltomierz dokładny V_n (rys. 343). Gdy zaś mamy woltomierz z transformatorem, to punkty $a\,b$ łączą się ze zwojnicą pierwotną transformatora, połączonego z woltomierzem.

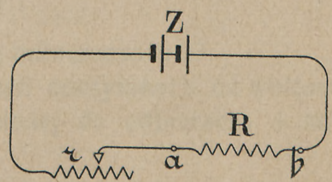
Rys. 342.



Rys. 343.



Dla otrzymania stopniowo zmiennego napięcia na punktach $a\ b$, stosowane bywają różne układy przyrządów. Na rys. 344 Z — źródło prądu, r — opór regulacyjny, R — opór stały. Przy zmianie wielkości oporu r, zmienia się siła prądu w obwodzie, a więc i napięcie na zaciskach ab, które wynosi iR.



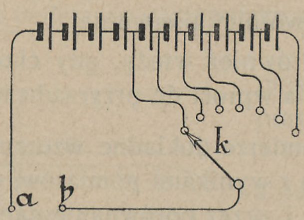
Rys. 344.

Na rys. 345 mamy znów baterję małych akumulatorów, zwykle o pojemności kilku ampero-

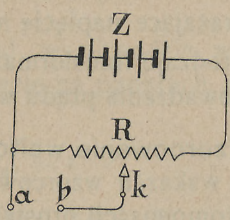
[1]) Patrz rozdział XX.

godzin, połączonych w taki sposób, że przesuwając rączkę *k*, możemy zmieniać liczbę ogniw włączonych pomiędzy punktami *a* i *b*, a przez to i napięcie na tych punktach.

Wreszcie na rys. 346 ze źródłem prądu *Z* włączony jest w szereg opór sta-



Rys. 345.



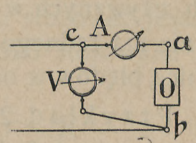
Rys. 346.

ły *R*; punkt *a* łączy się nastałe z jednym końcem oporu, a drugi *b* z rączką *k*, za pomocą której punkt ten można połączyć w różnych miejscach z oporem *R* i stosownie do tego otrzymać różne napięcia na punktach *ab*, od zera do napięcia, istniejącego na końcówkach źródła prądu.

ROZDZIAŁ XXXI.

Mierzenie mocy prądu.

1. Mierzenie mocy prądu amperomierzem i woltomierzem. Moc prądu elektrycznego stałego mierzymy zazwyczaj za pomocą amperomierzy i woltomierzy. Mnożąc przez siebie **jednoczesne** wskazania tych przyrządów, otrzymujemy moc prądu. Należy jednak przy tem zdawać sobie sprawę z nieuniknionych błędów i wiedzieć, jak w danym razie można je poprawić.



Rys. 347.

Rozważmy przedewszystkim wypadek mierzenia mocy prądu, pochłanianego przez odbieracz O (rys. 347). Moc tego prądu obliczymy podług wzoru:

$$e_{ab} \cdot J.$$

Amperomierz, włączony w obwód tak, jak to wskazuje rysunek, mierzy zupełnie ściśle prąd, płynący do odbieracza, woltomierz zaś wskazuje napięcie nie na końcówkach odbieracza, lecz na punktach cb; napięcie to jest większe od napięcia na końcówkach ab.

Oznaczmy opór amperomierza przez r; wówczas według prawa Ohma napięcie na końcówkach ca będzie:

$$e_{ca} = J \cdot r,$$

napięcie zaś na punktach c, b równa się sumie napięć na punktach: c, a i a, b, czyli:

$$e_{cb} = e_{ca} + e_{ab},$$

a więc:

$$e_{cb} = J \cdot r + e_{ab}.$$

Mnożąc to równanie przez J, otrzymamy:

$$e_{cb} \cdot J = J^2 \cdot r + e_{ab} \cdot J,$$

gdzie iloczyn $e_{ab} \cdot J$ stanowi moc prądu, dostarczoną odbieraczowi O.

Powyższe równanie wskazuje, że iloczyn wskazań odczytanych na woltomierzu i amperomierzu większy jest od mocy, dostarczonej do odbieracza o stratę mocy, zużytej na ogrzewanie amperomierza.

Jeżeli opór amperomierza jest znany, to niedokładność tę łatwo można sprostować, odejmując moc prądu $J^2 \cdot r$ od mocy, otrzymanej przez pomnożenie wskazań amperomierza i woltomierza.

W razie pomiaru mocy prądu, wynoszącej kilka kilowatów, poprawki tej się nie robi, gdyż jest ona mniejszą od błędów, popełnianych przy odczytywaniu przyrządów.

Przykład 1. Załóżmy, że przy mierzeniu mocy pochłanianej przez silnik, wskazanie amperomierza wynosi 15 *A*., a woltomierza — 110 *V*., opór zaś amperomierza do 15 *A*. stanowi około 0,01 Ω. Moc zamieniająca się w amperomierzu na ciepło wynosi zatem:

$$15^2 . 0{,}01 = 2{,}25\ W.$$

Iloczyn wskazań na amperomierzu i woltomierzu będzie wtedy 110 × 15 = = 1650 *W*. Moc prądu, pochłonięta przez odbieracz, będzie więc 1650 — 2,25 = = 1647,75 *W*. Poprawka, którą tu wprowadziliśmy, wynosi zaledwie:

$$\frac{2{,}25 . 100}{1650} = 0{,}1365\%.$$

Dokładność odczytywanych wskazań nawet na bardzo dokładnych przyrządach używanych w technice, nie przewyższa 0,25%; wobec tego poprawka powyższa nie ma żadnego praktycznego znaczenia, gdyż wartość jej znajduje się po za granicą błędów w odczytywaniu.

Przykład 2. Załóżmy, że przy tym samym układzie przyrządów (rys. 347). mierzymy moc prądu pochłanianą przez lampkę elektryczną. Woltomierz wskazuje napięcie 10 *V*, a amperomierz — prąd 1,5 *A*., opór zaś amperomierza wynosi 1 Ω. W takim razie moc prądu według wskazań odczytanych na przyrządach wypadnie 15 *W*., a strata mocy na ciepło w amperomierzu:

$$1{,}5^2 . 1 = 2{,}25\ W.$$

Rzeczywista moc prądu, pochłonięta przez lampkę, będzie:

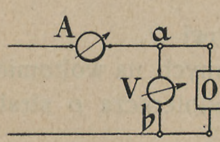
$$15 - 2{,}25 = 12{,}75\ W.$$

W tym przypadku poprawka wynosi:

$$\frac{2{,}25 . 100}{15} = 15\%.$$

Tak znacznej poprawki pominąć oczywiście nie można, — jest ona znacznie większa od błędów, jakie wynikają przy odczytywaniu przyrządów.

Układ połączeń woltomierza i amperomierza można jeszcze wykonać w inny sposób, wskazany na rys. 348. Wtedy napięcie, wskazywane przez woltomierz, jest rzeczywistym napięciem na końcówkach odbieracza, lecz prąd, przepływający przez amperomierz, równa się wtedy sumie prądów płynących przez odbieracz i przez woltomierz. Oznaczmy prąd w amperomierzu przez J, w odbieraczu przez J_0 i w woltomierzu przez i; wtedy według pierwszego prawa Kirchhoffa wypadnie:



Rys. 348.

$$J = J_0 + i.$$

Mnożąc zaś to równanie przez e_{ab}, otrzymamy:

$$e_{ab} \,.\, J = e_{ab} \,.\, J_0 + e_{ab} \,.\, i$$

albo:

$$e_{ab} \,.\, J_0 = e_{ab} \,.\, J - e_{ab} \,.\, i.$$

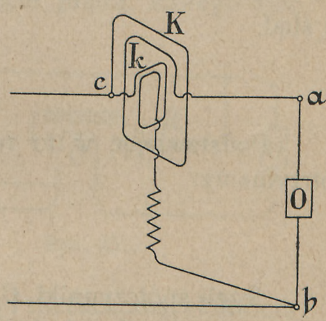
$e_{ab} \,.\, i$ stanowi moc, która wytwarza ciepło w woltomierzu.

Przy układzie połączeń, podanym na rys. 348, należy więc od iloczynu wskazań amperomierza i woltomierza odjąć moc prądu, płynącego do woltomierza.

I tu zachodzić mogą dwa przypadki: błąd względny może być duży lub mały. Z dwuch układów, wskazanych na rys. 347 i 348 należy oczywiście stosować ten, przy którym popełniamy błąd mniejszy.

Gdy napięcie jest znaczne, a prąd w odbieraczu niewielki, to odpowiedniejszy jest układ według rys. 347, natomiast przy znacznym prądzie i małym napięciu należy stosować układ, wskazany na rysunku 348.

2. **Watomierz.** Do mierzenia mocy prądu zmiennego, wskazania woltomierza i amperomierza wogóle nie wystarczają, gdyż moc takiego prądu zależy jeszcze od różnicy faz napięcia i prądu. Należałoby tu zatym stosować jeszcze trzeci przyrząd — fazomierz. Jednakże fazomierze bardzo rzadko stosowane bywają w praktyce. Zazwyczaj moc prądu zmiennego mierzy się jednym tylko przyrządem, mianowicie watomierzem.



Rys. 349.

Najdokładniejsze watomierze urządzone są na podstawie elektrodynamicznego oddziaływania na siebie dwuch zwojnic.

W obwód, wskazany na rys. 349, włącza się dwie zwojnice: jednę nieruchomą K, jak amperomierz, a drugą ruchomą k z oporem dodatkowym, jak woltomierz. Zwojnica ruchoma zawieszona jest tak samo, jak w amperomierzach elektrodynamicznych i zaopatrzona w sprężyny spiralne. Pod wpływem siły, wywieranej przez zwojnicę nieruchomą na zwojnicę ruchomą, ta ostatnia obraca się, dopóki moment obrotowy elektrodynamiczny nie zrównoważy się z przeciwnym momentem skręcającym sprężyn spiralnych zwojnicy ruchomej.

Oznaczmy moment obrotowy elektrodynamiczny przez M, moment skręcający sprężyn przez M', stałą — przez C, a kąt odchylenia zwojnicy ruchomej — przez α. Wtedy:

$$M = M' = C \,.\, \alpha,$$

a więc:

$$M = C \,.\, \alpha.$$

Moment obrotowy elektrodynamiczny przy prądzie zmiennym będzie zmienny, więc odchylenie α nastąpi tu pod wpływem momentu obrotowego średniego. Oznaczmy ten średni moment przez M_s; wtedy przy prądzie zmiennym:

$$M_s = C \,.\, \alpha. \qquad \text{(a)}$$

Siła oddziaływania zwojnicy nieruchomej na zwojnicę ruchomą jest propor-

cjonalna do prądów w obu zwojnicach. Oznaczmy prąd w zwojnicy nieruchomej w chwili t przez J_t, w ruchomej przez i_t, a stałą przez C', wtedy:

$$M_s = C' \cdot (J_t \cdot i_t)_s.$$

$(J_t \cdot i_t)_s$ oznacza tu średnią wartość iloczynu prądów.

Jeżeli opór zwojnicy ruchomej oznaczymy przez r, opór dodatkowy przez R, a napięcie w chwili t na punktach c, b przez e_t, to, pomijając nieznaczną samoindukcję w obwodzie zwojnicy ruchomej, możemy napisać wzór:

$$i_t = \frac{e_t}{R + r},$$

a zatem:

$$M_s = C' \cdot \frac{1}{R + r} \cdot (e_t \cdot J_t)_s.$$

$(e_t \cdot J_t)_s$ wyraża średnią moc prądu, o którą zwykle nam chodzi przy pomiarach; oznaczmy ją przez W.

Wtedy otrzymamy:

$$M_s = C' \cdot \frac{1}{R + r} \cdot W,$$

a stąd:

$$W = \frac{R + r}{C'} \cdot M_s.$$

Podstawiając w to równanie znalezione poprzednio wyrażenie (a) dla M_s, otrzymamy:

$$W = \frac{R + r}{C'} \cdot C \cdot \alpha.$$

Jeżeli spółczynniki C' i C nie zależą od wielkości kąta α, to moc prądu będzie proporcjonalna do kąta α. Przez odpowiedni kształt i układ zwojnic można osiągnąć prawie dokładnie niezależność wielkości C' od kąta α. Przy odpowiednich sprężynach wielkość C jest również stała; wobec tego podziałkę na skali otrzymać możemy zupełnie jednostajną.

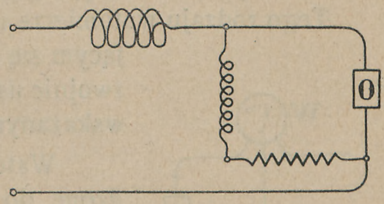
Wskazania watomierza elektrodynamicznego są ścisłe dla wszelkich prądów, albowiem przy powyższym rozumowaniu nie czyniliśmy żadnych założeń co do funkcji, wyrażającej zależność prądu lub napięcia od czasu.

Wzorcować więc można watomierz prądem stałym, mierząc moc za pomocą amperomierza i woltomierza. Jeżeli chodzi o pomiary bardzo ścisłe, to należy uwzględnić, że, mierząc watomierzem moc prądu pochłanianą przez odbieracz O (rys. 349), i włączając watomierz, jak to wskazuje rysunek 349, popełniamy błąd taki sam, jak przy mierzeniu mocy za pomocą amperomierza i woltomierza, włączonych w obwód według rys. 347. Prąd do zwojnicy ruchomej płynie bowiem od napięcia nieco wyższego, i w mocy wskazywanej przez watomierz mieści się także moc, przetwarzająca się na ciepło w zwojnicy nieruchomej.

Jeżeli natomiast włączymy watomierz inaczej, jak to wskazuje rys. 350, to wówczas popełnimy inny błąd; prąd w zwojnicy nieruchomej będzie zbyt wiel-

ki, ponieważ przez tę zwojnicę, oprócz prądu płynącego do odbieracza, przepływa również prąd zwojnicy ruchomej.

W tym przypadku wskazania watomierza, oprócz mocy, pochłanianej przez odbieracz, zawierać będą jeszcze moc, przetwarzającą się na ciepło w zwojnicy ruchomej.

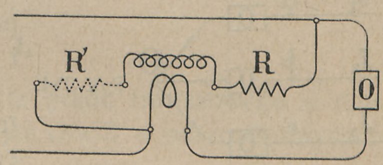


Rys. 350.

Znając opory zwojnic, nieruchomej i ruchomej, jak również napięcie i siłę prądu, zasilającego odbieracz, łatwo obliczyć poprawki, jakie należy wprowadzic do wskazań watomierza.

Niektóre watomierze zaopatrywane bywają w uzwojenie kompensacyjne, które usuwa wyżej wspomniany błąd przy pomiarach watomierzem. Takie uzwojenie włącza się w szereg ze zwojnicą ruchomą i umieszcza się nieruchomo w ten sposób, aby osłabić pole magnetyczne, wywoływane przez zwojnicę nieruchomą.

Watomierze, stosowane w pracowniach, najczęściej zaopatrzone są w cztery zaciski, z których dwa stanowią końcówki zwojnicy nieruchomej, a dwa inne — końcówki zwojnicy ruchomej. Zwojnica ruchoma przystosowana jest do prądu o względnie niewielkim napięciu, np. 30 *V*. Jeżeli napięcie prądu, którego moc mierzymy, jest większe od 30 *V*., to stosujemy opory dodatkowe, łącząc je w szereg ze zwojnicą ruchomą.

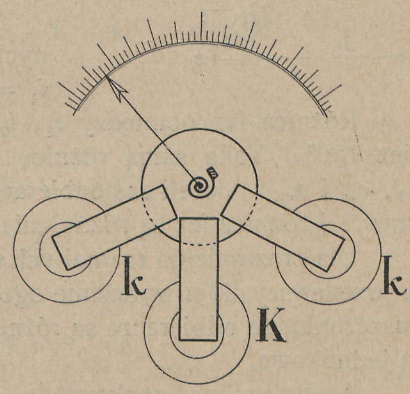


Rys. 351.

Przy wykonaniu połączenia należy uważać, ażeby opór dodatkowy przed zwojnicą ruchomą był włączony w miejscu *R*, a nie w *R'* (rys. 351).

Włączając opór w *R'*, wytworzylibyśmy znaczną różnicę potencjałów pomiędzy zwojnicami ruchomą i nieruchomą, skutkiem czego wewnątrz przyrządu mogłoby w pewnych okolicznościach powstać krótkie zwarcie, [1]) powodujące uszkodzenie przyrządu.

Obok watomierzy elektrodynamicznych na szczególną uwagę zasługują jeszcze watomierze indukcyjne.



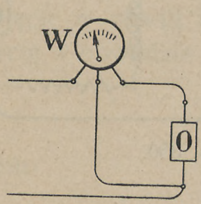
Rys. 352.

Ustrój tych przyrządów oparty jest na tej samej zasadzie, co i ustrój amperomierzy indukcyjnych, z tą tylko różnicą, że tutaj na krążek glinowy działają trzy elektromagnesy (rys. 352). Zwojnica elekromagnesu *K* ma uzwojenie z grubego drutu, po którym przepływa cały prąd; natomiast przez zwojnice *k* i *k* przepływa prąd odgałęziony. Na biegunach

[1]) Krótkim zwarciem lub, poprostu, zwarciem nazywamy zetknięcie się dwuch przewodników o znacznej różnicy potencjałów, lub też połączenie tych przewodników przez mały opór.

elektromagnesów *k* i *k* umieszczone są blaszki, przykrywające częściowo te bieguny. Moment obrotowy, działający na krążek, zależy tu od napięcia i siły prądu, jak również od różnicy faz pomiędzy napięciem i siłą prądu; odchylenie wskazówki osadzonej na osi będzie więc zależało od mocy prądu.

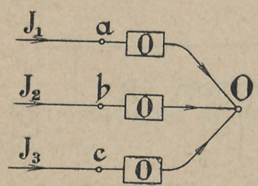
Tego rodzaju watomierze urządzają się również z walcem glinowym, obracającym się w polu magnetycznym, wywołanym przez szereg zwojnic ustawionych wokoło, podobnie jak w amperomierzu, wskazanym na rys. 327.



Rys. 353.

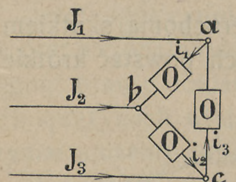
Watomierze indukcyjne albo elektrodynamiczne, urządzone do ustawienia na tablicach rozdzielczych, mają niekiedy tylko trzy zaciski do doprowadzania prądu. Dwa większe przeznaczone są do wprowadzania prądu głównego, a mniejszy do przyłączania drugiego końca zwojnicy ruchomej, której pierwszy koniec przyłączony jest wewnątrz przyrządu do zwojnicy nieruchomej. Układ połączeń w tym przypadku podany jest na rys. 353.

3. **Zastosowanie watomierzy do mierzenia prądu trójfazowego.** Prąd trójfazowy płynie trzema przewodnikami w ten sposób, że fazy prądów są różne, i jeżeli wszystkie odbieracze, włączone w poszczególne fazy, zupełnie są jednakowe, to wielkości czynne prądów i napięć we wszystkich fazach są jednakowe i przesunięte względem siebie o trzecią część okresu.



Rys. 354.

Celem wyzyskania wszystkich trzech faz prądu trójfazowego, odbieracze prądu włączają się zazwyczaj w sposób, wskazany na rys. 354 i 355. Połączenie według rys. 354 nazywa się połączeniem w gwiazdę, połączenie zaś według rys. 355 — połączeniem w trójkąt. Odbieraczami, wskazanymi na tych rysunkach, mogą być np. lampki elektryczne albo też poszczególne zwoje silnika trójfazowego.



Rys. 355.

Jeżeli opory omiczne i indukcyjne poszczególnych odbieraczy są jednakowe, to $J_1 = J_2 = J_3$, $i_1 = i_2 = i_3$, $e_{ao} = e_{bo} = e_{co}$, a $e_{ab} = e_{bc} = e_{ca}$.

Różnica faz pomiędzy i_1, i_2 i i_3 wynosi 120°, pomiędzy J_1, J_2 i J_3 również 120°. Taką samą różnicę faz mamy pomiędzy e_{ao}, e_{bo} i e_{co} i pomiędzy e_{ab}, e_{bc} i e_{ca}. Jeżeli zaś odbieracze nie są jednakowe, to niema powyższych równości i różnice faz są różne, mianowicie większe lub mniejsze od 120°.

Dla zrozumienia rozmaitych sposobów włączania watomierzy, wyprowadzimy tu przedewszystkim wyrażenie ogólne całkowitej mocy prądu trójfazowego, w przypuszczeniu, że odbieracze są różne, czyli że i prądy w poszczególnych fazach nie są jednakowe.

Ażeby uniknąć znakowania zbyt złożonego, oznaczamy tu chwilowe wartości prądów i napięć przez $\mathbf{J}_1$, $\mathbf{J}_2$, $\mathbf{J}_3$, $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$, $\mathbf{e}_{ab}$, $\mathbf{e}_{bc}$, $\mathbf{e}_{ca}$, $\mathbf{e}_{ao}$, $\mathbf{e}_{bo}$, $\mathbf{e}_{co}$, a to stosownie do rys. 354 i 355. Strzałkami na tych rysunkach oznaczone są kierunki dodatnie prądów i napięć.

W razie połączenia w gwiazdę (rys. 354), moc całkowita prądu trójfazowego w danej chwili — W_t będzie równa sumie mocy w tejże chwili w poszczególnych fazach:

$$W_t = e_{ao} \cdot J_1 + e_{bo} \cdot J_2 + e_{co} \cdot J_3 .$$

Według pierwszego prawa Kirchhoffa:

$$J_1 + J_2 + J_3 = 0,$$

skąd:

$$J_3 = -J_1 - J_2 ;$$

wprowadzając zaś to znaczenie J_3 w równanie mocy, otrzymamy:

$$W_t = (e_{ao} - e_{co}) \cdot J_1 + (e_{bo} - e_{co}) \cdot J_2 .$$

Oznaczając przez literę V z odpowiednim znaczkiem potencjał w danym punkcie, otrzymamy:

$$e_{ao} = V_a - V_o, \quad e_{bo} = V_b - V_o \quad i \quad e_{eo} = V_c - V_o,$$

skąd:

$$e_{ao} - e_{co} = (V_a - V_o) - (V_c - V_o) = V_a - V_c = e_{ac},$$

$$e_{bo} - e_{co} = (V_b - V_o) - (V_c - V\ ) = V_b - V_c = e_{bc} .$$

Możemy więc napisać:

$$W_t = e_{ac} \cdot J_1 + e_{bc} \cdot J_2 .$$

W razie połączenia w trójkąt, moc całkowita prądu trójfazowego w danej chwili — W_t będzie także równa sumie mocy w tejże chwili w poszczególnych fazach, czyli:

$$W_t = e_{ab} \cdot i_1 + e_{bc} \cdot i_2 + e_{ca} \cdot i_3 ,$$

oraz:

$$e_{bc} + e_{ca} = (V_b - V_c) + (V_c - V_a) = -(V_a - V_b) = -e_{ab} .$$

Podstawiając zaś powyższy wyraz dla e_{ab} w równanie dla mocy, otrzymamy:

$$W_t = e_{bc} \cdot (i_2 - i_1) + e_{ca} \cdot (i_3 - i_1).$$

Według pierwszego prawa Kirchhoffa:

$$i_2 - i_1 = J_2 ,$$

$$i_3 - i_1 = -J_1 ,$$

a zatem:

$$W_t = e_{bc} \cdot J_2 - e_{ca} \cdot J_1 .$$

Ponieważ jednak:

$$e_{ca} = V_c - V_a = -(V_a - V_c) = -e_{ac} ,$$

przeto:

$$W_t = e_{ac} \cdot J_1 + e_{bc} \cdot J_2 .$$

Widzimy więc, że moc prądu trójfazowego w obu przypadkach wyraża się tym samym wzorem.

W praktyce ma przedewszystkiem znaczenie nie moc w danej chwili, ale moc średnia, którą będziemy nazywali krótko mocą prądu trójfazowego, oznaczając ją przez W. Mamy zatem:

$$W = (\mathbf{e}_{ac} \cdot \mathbf{J}_1)_s + (\mathbf{e}_{bc} \cdot \mathbf{J}_2)_s,$$

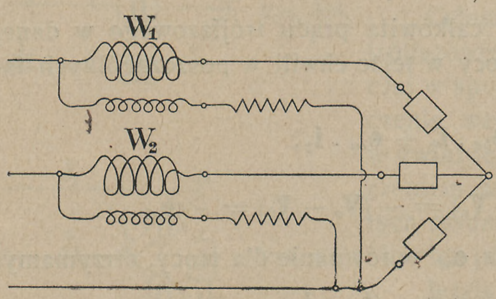
gdzie nawiasy i znaczek s oznaczają, że są to wartości średnie z iloczynów odpowiednich wielkości.

Załóżmy teraz, że napięcia i prądy zmieniają się tu w zależności od czasu dokładnie według sinusoidy, i oznaczmy różnicę faz pomiędzy napięciem $\mathbf{e}_{ac}$ i prądem $\mathbf{J}_1$ przez φ_1, a różnicę faz pomiędzy napięciem $\mathbf{e}_{bc}$ i prądem $\mathbf{J}_2$ przez φ_2. Wtedy, na zasadzie wywodów, podanych w rozdziale XXV, otrzymamy:

$$W = e_{ac} \cdot J_1 \cdot \cos \varphi_1 + e_{bc} \cdot J_2 \cdot \cos \varphi_2 \quad \ldots\ldots \quad (a)$$

Litery e_{ac}, e_{bc}, J_1 i J_2 oznaczają tu **wartości czynne** prądów i napięć. Kąt φ_1 lub φ_2 może tu wypaść większy od 90°, a wtedy odpowiedni wyraz staje się ujemnym; pamiętać więc należy, że mamy tu do czynienia z sumą algebraiczną.

Układ dwuch watomierzy. Celem wyznaczenia dwuch mocy składowych, trzeba oczywiście zastosować dwa wątomierze, włączone w taki sposób, jak to wskazuje rys. 356. Według wywodów paragrafu 2 rozdziału niniejszego, watomierz wskazuje średni iloczyn prądu, przepływającego przez zwojnicę nieruchomą, przez napięcie na końcówkach obwodu zwojnicy ruchomej, przeto w rozważanym przypadku watomierz W_1 wskaże średni iloczyn: [1])



Rys. 356.

$$(\mathbf{e}_{ac} \cdot \mathbf{J}_1)_s = e_{ac} \cdot J_1 \cdot \cos \varphi_1.$$

Watomierz W_2 wskaże średni iloczyn:

$$(\mathbf{e}_{bc} \cdot \mathbf{J}_2)_s = e_{bc} \cdot J_2 \cdot \cos \varphi_2.$$

Jeżeli przy jednakowym połączeniu zwojnic watomierzy [2]) wychylenia wskazówek otrzymują się w jednę stronę, to wskazania watomierzy wypadnie dodać, gdy zaś wychylenia będą w różne strony — to odjąć.

Można również zastosować jeden watomierz, włączając go najpierw w jedną fazę, a potem w drugą, jeżeli tylko rozkład napięć i prądów jest trwały.

Układ z jednym watomierzem. Jeżeli obciążenie poszczególnych faz jest jednakowe, to do zmierzenia całej mocy prądu trójfazowego wystarcza jeden watomierz.

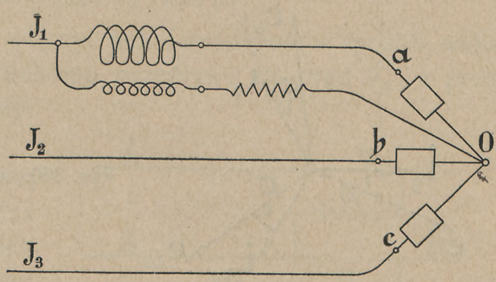
W razie połączenia odbieraczy w gwiazdę z dostępnym punktem zerowym O,

---

[1]) Patrz oznaczenia na rys. 354 i 355.

[2]) W przypadkach wątpliwych należy włączyć na próbę oba watomierze w jeden obwód; gdy połączenia są zgodne, odchylenia w obu przyrządach będą w jednę stronę.

najdogodniej będzie włączyć watomierz w taki sposób, jak to wskazano na rys. 357. Prąd jednej fazy przechodzi tu przez zwojnicę nieruchomą watomierża a na końcówkach zwojnicy ruchomej mamy napięcie, tak zwane fazowe albo przewodowe.

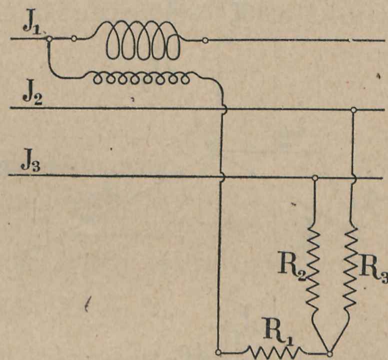


Rys. 357.

W tych warunkach watomierz wskazuje oczywiście moc w jednej tylko fazie; należy więc wskazania jego potroić, ażeby otrzymać moc całkowitą prądu trójfazowego.

Jeżeli watomierz urządzony jest do mierzenia całej mocy prądu trójfazowego, to na jego skali podane są zazwyczaj cyfry potrojone, wyrażające odrazu całkowitą moc prądu trójfazowego.

Jeżeli punkt zerowy jest niedostępny, albo też niema go wcale, bo odbieracze połączone są w trójkąt, to za pomocą trzech oporników można wytworzyć punkt zerowy. Oporniki R_1, R_2, R_3 łączą się wtedy tak, jak to wskazuje rys. 358.



Rys. 358.

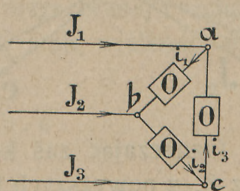
Jeżeli opór zwojnicy ruchomej jest r, to opory należy tak dobrać, ażeby

$$r + R_1 = R_2 = R_3 .$$

Stała watomierza zależy oczywiście od wielkości $r + R_1$.

Można stosować jeszcze układ połączeń nieco uproszczony, opuszczając opór R_1. Ten sposób mierzenia opiera się na wywodach następujących:

Jeżeli mamy układ odbieraczy połączonych w trójkąt (rys. 359), to, stosownie do przeprowadzonych wyżej rozumowań, całkowita moc prądu trójfazowego wyraża się wzorem:



Rys. 359.

$$W = e_{ac} \cdot J_1 \cdot \cos \varphi_1 + e_{bc} \cdot J_2 \cdot \cos \varphi_2 .$$

Wzór ten możemy napisać inaczej, jeżeli rozważymy wykresy wektorowe prądów i napięć.

Zakładamy, że obciążenie faz jest jednakowe, czyli że:

$$i_1 = i_2 = i_3 ,$$

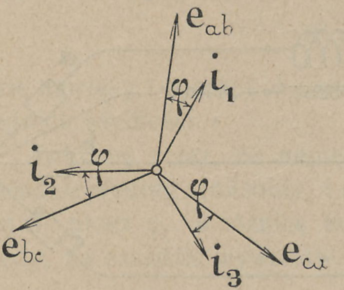
a skutkiem tego:

$$J_1 = J_2 = J_3 ,$$

jak również:

$$e_{ab} = e_{bc} = e_{ca} .$$

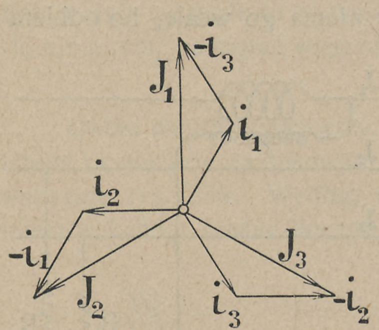
Napięcia są przesunięte względem siebie o kąt 120°, wykres więc odpowiednich wektorów będzie taki, jak wskazuje rys. 360. Prądy i_1, i_2, i_3 przesunięte są tu o kąt φ względem odpowiednich napięć z powodu samoindukcji w odbieraczach. Prądy J_1, J_2, J_3 są odpowiednio wypadkowymi prądów (i_1, i_3) (i_1, i_2) i (i_2, i_3). Gieometrycznie prąd:



Rys. 360.

$$J_1 = i_1 - i_3,$$
$$J_2 = i_2 - i_1,$$
$$J_3 = i_3 - i_2.$$

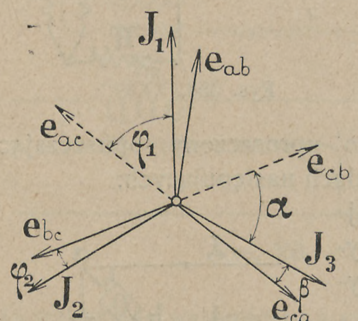
Te odejmowania wykonane są na wykresie, wskazanym na rys. 361.



Rys. 361.

Z rys. 361 widzimy, że prądy J_1, J_2 J_3 przesunięte są odpowiednio względem prądów i_1, i_2, i_3 o kąt = 30°, ponieważ wszystkie trójkąty są tu równoramienne, a kąty rozwarte w tych trójkątach wynoszą po 120°.

Wykreślając na jednym rysunku wektory J_1, J_2 i J_3 razem z wektorami e_{ab}, e_{bc} i e_{ca}, otrzymamy wykres wskazany na rys. 362, gdzie mamy podane jeszcze dwa wektory e_{ac} i e_{cb}, które wyrażać będą wielkości odwrotne co do swego znaku względem e_{ca} i e_{bc}.



Rys. 362.

We wzorze mocy prądu, φ_1 stanowi kąt pomiędzy e_{ac} i J_1, a φ_2—kąt pomiędzy e_{bc} i J_2.

Zestawiając trzy rysunki wektorów (rys. 360, 361 i 362), łatwo zauważyć, że:

$$\varphi_1 = 60^0 - (30 - \varphi) = 30^0 + \varphi,$$

a $$\varphi_2 = 30^0 - \varphi.$$

Oznaczając zaś kąt pomiędzy e_{cb} i J_3 przez α, a kąt pomiądzy e_{ca} i J_3 przez β, z powyższych trzech wykresów wypada:

$$\alpha = 60^0 - (30^0 - \varphi) = 30^0 + \varphi = \varphi_1,$$
$$\beta = 30^0 - \varphi = \varphi_2.$$

Mając teraz na uwadze, że:

$$e_{ab} = e_{bc} = e_{ca},$$
$$J_1 = J_2 = J_3,$$

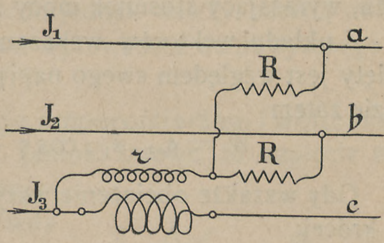
otrzymamy:

$$e_{ac} \cdot J_1 \cdot \cos\varphi_1 = e_{cb} \cdot J_3 \cdot \cos\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(b)}$$
$$e_{bc} \cdot J_2 \cdot \cos\varphi_2 = e_{ca} \cdot J_3 \cdot \cos\beta \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(b)}$$

Tym sposobem moc całkowitą prądu trójfazowego, przy równym obciążeniu faz prądem, możemy wyrazić wzorem:

$$W = e_{cb} \cdot J_3 \cdot \cos\alpha + e_{ca} \cdot J_3 \cdot \cos\beta.$$

Opierając się na tym wzorze, można włączyć jeden watomierz w sposób, wskazany na rys. 363. Przez uzwojenie nieruchome przepływa tu prąd J_3, a przez uzwojenie ruchome suma dwuch prądów płynących od napięć e_{cb} i e_{ca}.



Rys. 363.

Oznaczmy przez R opory dodatkowe, przez r — opór zwojnicy ruchomej, przez $\mathbf{e}_{ca}$, $\mathbf{e}_{cb}$ — wartości chwilowe odpowiednich napięć, przez $\mathbf{i}_1$ i $\mathbf{i}_2$ — wartości chwilowe prądów, przepływających w oporach R, wreszcie przez $\mathbf{J}_3$ — wartość chwilową prądu w zwojnicy nieruchomej. W takim razie przyjmując, że samoindukcja zwojnicy ruchomej może być pominięta, otrzymamy na zasadzie praw Ohma i Kirchhoffa:

$$\mathbf{e}_{ca} = (\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2) \cdot r + \mathbf{i}_1 \cdot R,$$

$$\mathbf{e}_{cb} = (\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2) \cdot r + \mathbf{i}_2 \cdot R.$$

Dodając te równania odpowiedniemi stronami, otrzymamy:

$$\mathbf{e}_{ca} + \mathbf{e}_{cb} = (\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2) \cdot (2r + R).$$

Pomnóżmy obie strony tego równania wrzez $\mathbf{J}_3$, wtedy otrzymamy:

$$\mathbf{e}_{ca} \cdot \mathbf{J}_3 + \mathbf{e}_{cb} \cdot \mathbf{J}_3 = \mathbf{J}_3 \cdot (\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2) \cdot (2r + R).$$

Przechodząc zaś od wartości iloczynów chwilowych do wartości iloczynów średnich, otrzymamy:

$$(\mathbf{e}_{ca} \cdot \mathbf{J}_3)_s + (\mathbf{e}_{cb} \cdot \mathbf{J}_3)_s = [\mathbf{J}_3 \cdot (\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2)]_s \cdot (2r + R) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (c)$$

Prawa strona równania jest proporcjanalna do wskazań watomierza, mamy bowiem tu średni iloczyn prądów, płynących w zwojnicach nieruchomej i ruchomej.

Oznaczając przez δ wskazanie watomierza, a przez C stałą wielkość, możemy napisać równanie:

$$[\mathbf{J}_3 \cdot (\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2)]_s \cdot (2r + R) = C\,(2r + R) \cdot \delta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (d)$$

Z wywodów, podanych w rozdziale XXV wypada, że:

$$(\mathbf{e}_{ca} \cdot \mathbf{J}_3)_s = e_{ca} \cdot J_3 \cdot \cos\alpha,$$

$$(\mathbf{e}_{cb} \cdot \mathbf{J}_3)_s = e_{cb} \cdot J_3 \cdot \cos\beta,$$

gdzie e_{ca}, e_{cb} i J_3 oznaczają wartości czynne odpowiednich wielkości.

Mając na względzie równania powyższe, a także wzór (a) na str. 340, wzory (b) na str. 342 i wzory (c) i (d) na str. 343, możemy napisać równanie:

$$W = C \cdot (2r + R) \cdot \delta,$$

według którego, znając C i $2r + R$, obliczymy W.

Jeżeli watomierz ma być używany stale w takim układzie, to na skali jego podane być winny cyfry, wyrażające całkowitą moc prądu trójfazowego.

4. Wyznaczanie spółczynnika mocy za pomocą watomierza. Na podstawie powyższych wywodów łatwo wykazać, że przy równym obciążeniu trzech faz, za pomocą wskazań dwuch watomierzy, włączonych według rys. 356, można obliczyć przesunięcie fazy prądu względem napięcia, a więc i spółczynnik mocy prądu, wyrażający stosunek mocy rzeczywistej do pozornej.

Z układu wektorów wskazanego na rys. 360 widzimy, że każdy prąd przesunięty jest względem swego napięcia o kąt φ; rzeczywista moc całkowita prądu będzie zatem:

$$W = e_{ab} \cdot i_1 \cdot \cos\varphi + e_{bc} \cdot i_2 \cdot \cos\varphi + e_{ca} \cdot i_3 \cdot \cos\varphi .$$

Gdy wszakże obciążenie wszystkich trzech faz jest jednakowe, możemy napisać krócej:

$$W = 3 \cdot e \cdot i \cdot \cos\varphi .$$

Moc pozorna będzie $3 \cdot e \cdot i$, a więc:

$$\frac{W}{3 \cdot e.\, i} = \cos\varphi .$$

Kąt φ znajdziemy ze wskazań dwuch watomierzy w sposób następujący: Oznaczmy wskazania tych watomierzy (rys. 356) przez W_1 i W_2; w takim razie z poprzednio podanych wzorów mamy:

$$W_1 = e_{ac} \cdot J_1 \cdot \cos\varphi_1 ,$$

$$W_2 = e_{bc} \cdot J_2 \cdot \cos\varphi_2 .$$

Ponieważ zaś rozważamy tutaj wypadek równego obciążenia wszystkich trzech faz, a więc przy $e_{ac} = e_{bc}$ i $J_1 = J_2$ otrzymamy:

$$\frac{W_1 - W_2}{W_1 + W_2} = \frac{\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2}{\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2} .$$

Z poprzednich wywodów (str. 342) wiemy, że:

$$\varphi_1 = 30^0 + \varphi , \quad \text{a} \quad \varphi_2 = 30^0 - \varphi ,$$

a zatem:

$$\frac{W_1 - W_2}{W_1 + W_2} = \frac{\cos(30^0 + \varphi) - \cos(30^0 - \varphi)}{\cos(30^0 + \varphi) + \cos(30^0 - \varphi)} = - \frac{\sin 30^0 \cdot \sin\varphi}{\cos 30^0 \cdot \cos\varphi}$$

a ponieważ $\sin 30^0 = \frac{1}{2}$, a $\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, otrzymamy:

$$\frac{W_2 - W_1}{W_1 + W_2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{tg}\varphi ,$$

skąd:

$$\operatorname{tg}\varphi = \sqrt{3} \cdot \frac{W_2 - W_1}{W_1 + W_2} .$$

Mając tg φ, łatwo znaleźć cos φ z tablic trygonometrycznych, lub też obliczyć go ze wzoru:

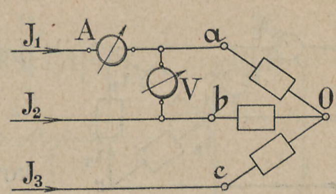
$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 \varphi}}.$$

Jest to względnie dość dokładny sposób wyznaczania spółczynnika mocy przy prądzie trójfazowym, o ile krzywe prądów i napięcia nie różnią się znacznie od sinusoid, i obciążenie faz jest równe. Zwracać tu jednak należy baczną uwagę na znak wskazań watomierzy, i wskazania ujemne wprowadzać do powyższego wzoru ze znakiem minus.

5. **Mierzenie mocy prądu trójfazowego amperomierzem i woltomierzem.** Jeżeli odbieracze prądu są bezindukcyjne, np. lampki żarowe, to napięcie na każdym z odbieraczy jest w fazie z prądem, przepływającym przez odpowiedni odbieracz. Wtedy przy równym obciążeniu we wszystkich fazach moc całkowita da się wyrazić wzorem:

$$3\, e \,.\, J,$$

gdzie e oznacza wartość czynną napięcia, a J — wartość czynną prądu każdego odbieracza.



Rys. 364.

W rozważanym przypadku (rys. 364):

$$e_{ao} = e_{bo} = e_{co} = e,$$

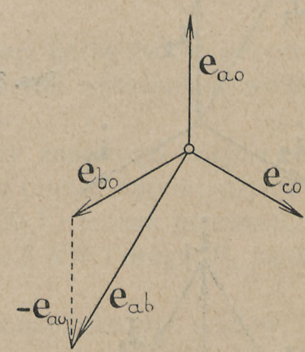
oraz:

$$J_1 = J_2 = J_3 = J.$$

Napięcie e można łatwo wyrazić przez e_{ab}, ponieważ z układu odbieraczy (rys. 364) wypada, że e_{ab} równa się różnicy geometrycznej napięć e_{bo} i e_{ao}, czyli:

$$e_{ab} = e_{bo} - e_{ao}.$$

Napięcia e_{ao}, e_{bo} i e_{co} są odpowiednio przesunięte względem siebie o 120°, a więc w układzie wektorów przedstawiają się one tak, jak to wskazuje rys. 365, wypadkowe zaś napięcie e_{ab} będzie jednym z boków trójkąta, którego dwa inne boki będą e_{bo} i $(-e_{ao})$. Jest to trójkąt równoramienny, kąt rozwarty tego trójkąta wynosi 120°, a zatem kąty ostre tegoż mają po 30°, stąd wynika, że:

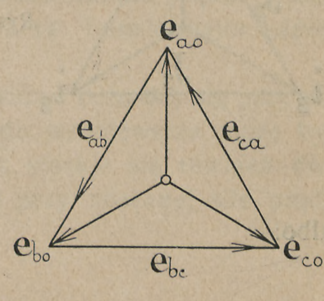


Rys. 365.

$$e_{ab} = e_{ao} \,.\, \cos 30^0 + e_{bo} \,.\, \cos 30^0,$$

ponieważ zaś $e_{ao} = e_{bo} = e$, a $\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, przeto:

$$e_{ab} = \sqrt{3} \,.\, e.$$



Rys. 366.

Z układu wektorów na rys. 365 łatwo spostrzec, że napięcia wypadkowe e_{ab}, e_{bc} i e_{ca} będą bokami trójkąta, otrzymanego przez połączenie końców wektorów e_{ao}, e_{bo} i e_{co} (rys. 366).

Moc całkowita prądu trójfazowego może być przeto wyrażona wzorem:

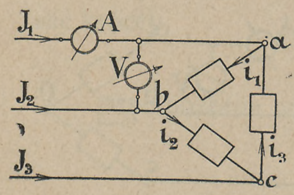
$$3 \,.\, e \,.\, J = 3 \,.\, \frac{e_{ab}}{\sqrt{3}} \,.\, J,$$

albo:

$$\sqrt{3} \,.\, e_{ab} \,.\, J_1 \,.$$

Napięcie e_{ab} i prąd J_1 odczytuje się na woltomierzu i amperomierzu, włączonych tak, jak to wskazuje rys. 364.

Jeżeli mamy połączenie odbieraczy w trójkąt (rys. 367), to przy równym obciążeniu faz wypadnie:



Rys. 367.

$$i_1 = i_2 = i_3 = i,$$

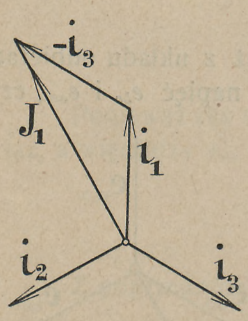
oraz:

$$e_{ab} = e_{bc} = e_{ca} = e' \,.$$

Jeżeli zaś odbieracze są bezindukcyjne, to moc całkowita prądu trójfazowego da się wyrazić wzorem:

$$3 \,.\, e' \,.\, i \,.$$

Prądy i_1, i_2 i i_3 są przesunięte odpowiednio względem siebie o trzecią część okresu; mogą być zatem wyrażone trzema wektorami tak, jak to widzimy na rysunku 368. Według prawa Kirchhoffa, dla punktu a mamy równanie wektorowe:



Rys. 368.

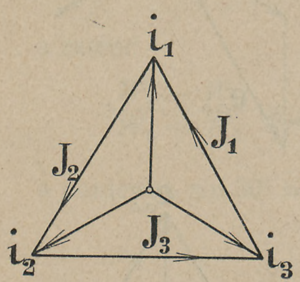
$$J_1 + i_3 - i_1 = 0,$$

a więc:

$$J_1 = i_1 - i_3 \,.$$

Trójkąt na rys. 368 jest równoramienny; jego kąt rozwarty ma 120°, a więc kąty ostre mają po 30°, a $\cos 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}$. W takich warunkach możemy ułożyć równanie:

$$J_1 = i_1 \,.\, \cos 30^0 + i_3 \,.\, \cos 30^0 = i \,.\, \sqrt{3}.$$



Rys. 369.

Prądy J_1, J_2, J_3 będą bokami trójkąta, utworzonego przez połączenie końców wektorów i_1; i_2, i_3 (rys. 369).

Uwzględniając tę zależność pomiędzy prądami J i i w układzie trójfazowym, otrzymamy dla mocy całkowitej prądu trójfazowego wzór następujący:

$$3 \,.\, e' \,.\, i = 3 \,.\, e' \,.\, \frac{J}{\sqrt{3}},$$

albo:

$$\sqrt{3} \,.\, e_{ab} \,.\, J_1 \,.$$

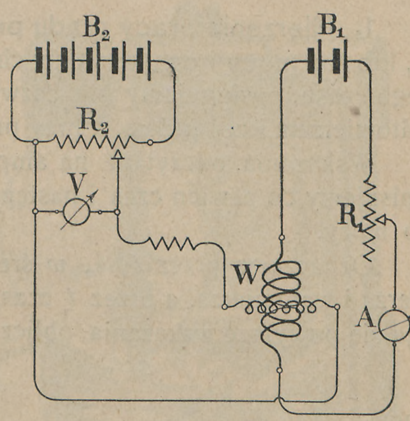
Otrzymujemy tu więc ten sam wzór, jaki znaleźliśmy w przypadku połączenia odbieraczy w gwiazdę.

Stąd wniosek, że niezależnie od rodzaju układu odbieraczy, moc całkowitą prądu trójfazowego można obliczyć według powyższego wzoru ze wskazań amperomierza i woltomierza, jeżeli tylko odbieracze są bezindukcyjne i dają jednakowe obciążenie we wszystkich trzech fazach.

Jeżeli zaś odbieracze są indukcyjne, to moc prądu trójfazowego należy mierzyć za pomocą watomierza tak, jak to wskazanem zostało poprzednio.

6. Wzorcowanie watomierzy. Watomierze elektrodynamiczne wzorcuje się prądem stałym za pomocą dokładnych amperomierzy i woltomierzy.

Układ połączeń stosuje się zwykle taki, jak wskazuje rys. 370. Przez zwojnicę nieruchomą watomierza przepuszcza się prąd ze źródła prądu B_1, utworzonego z kilku akumulatorów. Za pomocą opornika R_1 można siłę prądu nastawiać na odpowiednią wartość, wskazaną przez amperomierz A. Zwojnicę ruchomą watomierza zasila się prądem z baterji B_2, która może składać się z wielkiej liczby ogniw akumulatorowych o małej pojemności, gdyż w obwodzie zwojnicy ruchomej zazwyczaj przebiega prąd słaby, napięcie jednak musi być takie, dla jakiego przeznaczony jest watomierz. Nastawianie odpowiedniego napięcia na zwojnicy ruchomej odbywa się za pomocą opornika R_2. Do mierzenia tego napięcia służy woltomierz V.



Rys. 370.

Iloczyn wskazań woltomierza i amperomierza daje liczbę watów, odpowiadającą odchyleniu watomierza współczesnego z powyższymi wskazaniami woltomierza i amperomierza.

Przez zastosowanie dwuch źródeł prądu unikamy znacznego zużycia energji dla wzorcowania i konieczności rozporządzania mocą prądu, odpowiadającą skali watomierza; np. watomierz do 100 KW (200 A przy 500 V) można przewzorcować, mając np. jedną baterję na 200 A przy 6 V, t. j. na 1,2 KW i drugą B_2 na 500 V przy 0,5 A, t. j. na 0,25 KW.

Przy prądach bardzo silnych albo przy wysokim napięciu tych prądów, zwojnicę nieruchomą watomierzy zasila się prądem przez transformator prądu. Jeżeli w sieci mamy wysokie napięcie, to inny transformator, t. zw. transformator napięcia, służy do zasilania zwojnicy ruchomej.

Wzorcowanie watomierzy z transformatorami powinno odbywać się przy połączeniu watomierza przez te transformatory. Wtedy do wzorcowania może być zastosowany oczywiście tylko prąd zmienny, przyczem stosuje się również dwa źródła prądu zmiennego: jedno — niższego napięcia przy znacznej sile prądu i drugie — wysokiego napięcia przy małej sile prądu.

ROZDZIAŁ XXXII.

Mierzenie pracy prądu.

1. Mierzenie pracy prądu przez pomiar siły prądu, napięcia jego i czasu, lub też mocy i czasu. Gdy chodzi o zmierzenie pracy prądu w ciągu krótkiego czasu, posługujemy się zazwyczaj: przy prądzie stałym — amperomierzem, woltomierzem i zegarkiem, a przy prądzie zmiennym — watomierzem i zegarkiem.

Wskazania, odczytane na amperomierzu i woltomierzu lub na watomierzu, zapisujemy co pewien czas i następnie obliczamy średnią wartość prądu, napięcia lub mocy.

Oznaczając przez e, i, w średnie wartości wskazań woltomierza, amperomierza i watomierza, a przez t czas, w ciągu którego płynął prąd i do którego stosują się powyższe wskazania, obliczamy pracę prądu A ze wzorów:

$$A = e \,.\, i \,.\, t,$$

albo:

$$A = w \,.\, t.$$

Jeżeli napięcie i prąd zmieniają się znacznie, to można otrzymać wyniki dokładniejsze za pomocą przyrządów samopiszących.

Zasada ustroju tych przyrządów polega na tym, że wskazówka zaopatrzona jest w pióro, które kreśli linję na papierze, przesuwanym za pomocą mechanizmu zegarowego; linja w ten sposób otrzymana wyraża w odpowiednich spółrzędnych: e, i lub W w zależności od czasu.

Przykłady ustroju takich przyrządów podaję na rys. 371 i 372. Na rysunku 371 widzimy woltomierz samopiszący z podłużnym ruchem wstążki papierowej z góry na dół i z ruchem piórka wzdłuż prostej linji poziomej. Taki ruch osiąga się za pomocą odpowiedniego mechanizmu drążkowego, przekształcającego obrotowy ruch zwojnicy amperomierza na prostolinijny ruch piórka.

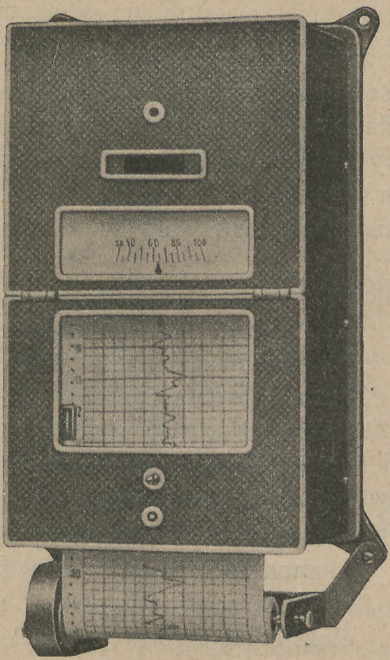
Linja krzywa, wyrażająca zmienność napięcia lub prądu w czasie, otrzymuje się w bardzo dogodnych współrzędnych prostokątnych.

Nieco prostsza jest budowa amperomierza samopiszącego, podanego na rys. 372. W tym przyrządzie prąd przebiega w zwojnicy nieruchomej, która wciąga rdzeń żelazny, utworzony ze zwiniętej stożkowato blaszki żelaznej. Wskazówka i piórko, przytwierdzone do rdzenia żelaznego, przesuwają się w kierunku pionowym, a papier, w kształcie krążka, obraca się około osi poziomej. Krzywa, wy-

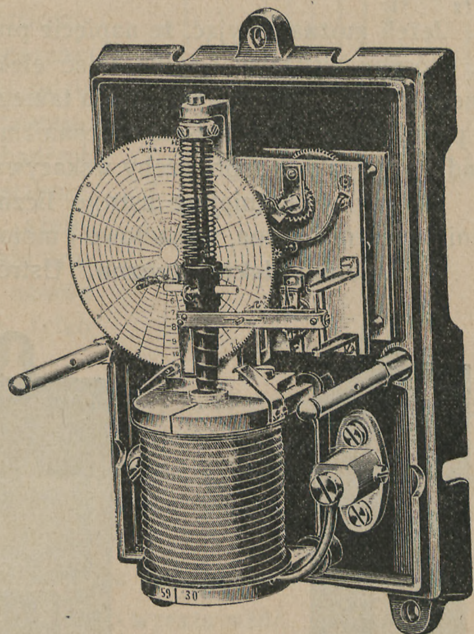
rażająca zależność siły prądu od czasu, otrzymuje się we współrzędnych biegunowych.

Szczegóły ustroju przyrządów samopiszących różnią się od zwykłych przedewszystkiem zastosowaniem układów, wytwarzających momenty obrotowe większe niż w przyrządach zwykłych, chodzi tu bowiem o pokonanie oporów przy tarciu pióra o papier, jako też o uniknięcie wpływu ciężaru atramentu, którego ilość w piórze jest zmienna.

Dla uniknięcia tarcia pióra o papier stosowane są niekiedy przyrządy samopiszące, w których koniec wskazówki zaopatrzony jest w sztyfcik, nie dotykający stale do papieru, lecz tylko przyciskany co pewien czas do niego przez odpowie-



Rys. 371.



Rys. 372.

dni drążek za pomocą mechanizmu zegarowego. Pod papierem znajduje się taśma nasycona farbą w celu odznaczenia tego miejsca, w którym sztyfcik był przyciśnięty.

Pozatem istnieją jeszcze inne przyrządy, w których znajduje zastosowanie iskra elektryczna. Bieguny małej cewki Rhumkorffa połączone są ze wskazówką i płytką metalową pod papierem. Iskierki, wypadające ze wskazówki do płytki, przepalają papier i w ten sposób kreślą linję na papierze.

Tego rodzaju przyrządy najodpowiedniejsze są w tych przypadkach, kiedy zapisywana wielkość zmienia się bardzo szybko, kiedy zatym wskazówka z piórem nie byłaby w stanie z powodu bezwładności podążyć za temi zmianami.

Mając krzywą, otrzymaną za pomocą przyrządu samopiszącego, łatwo wyzna-

czyć przez planimetrowanie odpowiednich krzywych średnią moc prądu, a więc i pracę, posiłkując się wzorami:

$$A = \int_0^t e \,.\, i \,.\, dt,$$

$$A = \int_0^t w \,.\, dt.$$

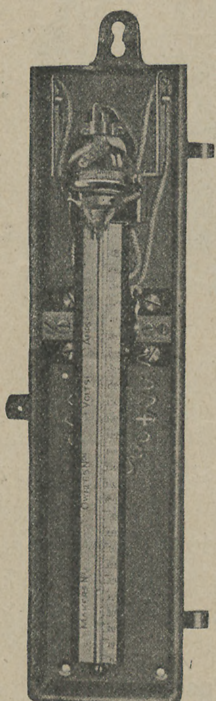
2. Liczniki. We wszystkich przypadkach, kiedy chodzi o wyznaczenie pracy prądu, wykonanej przez czas dłuższy, stosowane są **mierniki pracy** albo krócej **liczniki elektryczne.**

Za pomocą tych przyrządów, na podstawie różnicy wskazań, odczytanych w dwóch chwilach t_1 i t_2, znajdujemy pracę, wykonaną przez prąd w ciągu czasu $t_2 - t_1$.

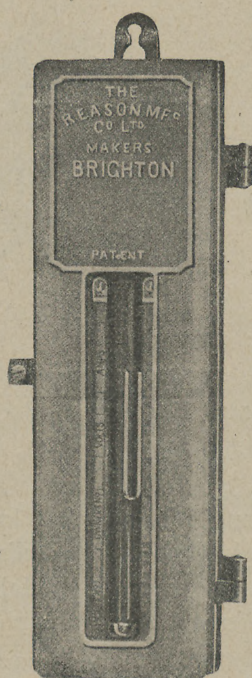
Jeżeli można przyjąć, że napięcie prądu jest zawsze stałe, to wystarcza licznik, któryby wskazywał tylko ilość elektryczności, przepływającą w ciągu określonego czasu. Mnożąc wskazania takiego licznika przez napięcie stałe, otrzymamy pracę prądu. Oczywiście mechanizm liczbowy licznika może być z łatwością urządzony w taki sposób, ażeby wskazywał odrazu pracę prądu.

Są trzy najważniejsze ustroje liczników, naczęściej stosowane w praktyce: liczniki elektrolityczne, wahadłowe i motorowe.

3. Liczniki elektrolityczne. Ustrój tych liczników opiera się na zjawisku elektrolizy. Za najpraktyczniejszy uważany jest obecnie licznik Wrighta (rys. 373 i 374 [1]). Elektrolit w tym liczniku stanowi roztwór obojętny soli rtęci w wodzie, elektrodą dodatnią jest czysta rtęć, elektroda ujemna wykonana jest z irydu.



Rys. 373.



Rys. 374.

Gdy prąd przepływa, na elektrodzie irydowej wydziela się rtęć, która spada do rurki miarkowej, kalibrowanej. Ilość wydzielonej rtęci jest, jak wiadomo, proporcjonalna do ilości elektryczności, a przy napięciu stałym—do pracy prądu.

Na rurce znajdują się podziałki, wskazujące wprost pracę prądu przy pewnym napięciu stałym.

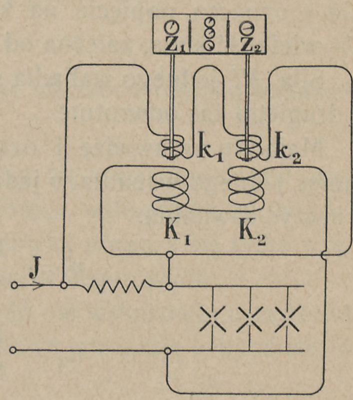
W tym czasie, kiedy na elektrodzie irydowej wydziela się rtęć, na drugiej elektro-

[1]) Na rys. 374 licznik widzimy przykryty, a na rys. 373 — bez przykrywki.

dzie rtęciowej — rtęć przechodzi do roztworu. Skoro zaś rurka miarkowa wypełni się rtęcią, cały przyrząd obracamy o 180° około osi poziomej i w ten sposób rtęć z rurki przelewamy do naczynia, [1]) do którego doprowadzony jest biegun dodatni źródła prądu; ustawiając więc przyrząd z powrotem w położenie poprzednie, możemy prowadzić pomiar dalej za pomocą tegoż przyrządu.

Tego rodzaju przyrządy mogą oczywiście być stosowane tylko przy prądzie stałym.

4. Liczniki wahadłowe Arona. Stosowane obecnie liczniki wahadłowe składają się z dwuch mechanizmów zegarowych, których wahadła zaopatrzone są u dołu w zwojnice, nawinięte w taki sposób, że płaszczyzny zwojów są poziome (rys. 375). Pod wahadłami znajdują się dwie zwojnice nieruchome, których zwoje są ustawione również poziomo.



Rys. 375.

Przez zwoje nieruchome K_1 i K_2 przepuszcza się prąd odgałęziony od tych punktów sieci, gdzie mamy odpowiednie pełne napięcie mierzonego prądu, a przez zwojnice k_1 i k_2 na wahadłach płynie prąd całkowity, którego pracę mierzymy. Jeżeli siła tego prądu jest zbyt wielka, ażeby można było przepuścić go przez dość cienkie druty zwojnic k_1 i k_2, to wprowadzamy w obwód bocznik i odgałęziamy do zwojnic k_1 i k_2 tylko pewną określoną część prądu całkowitego.

Kierunek zwojów w zwojnicach jest tak obrany, że kiedy zwojnice k_1 i K_1 przyciągają się, — zwojnice k_2 i K_2 odpychają się wzajemnie.

Ruch mechanizmów zegarowych zależy od sił, działających na wahadła. Z różnicy ruchu, czyli inaczej z różnicy wskazań tych dwuch zegarów możemy zatem wywnioskować o pracy prądu.

Zależność tę łatwo wyprowadzić, rozumując jak następuje:

Czas T jednego wahnięcia wahadła fizycznego wyraża wzór:

$$T = \pi \cdot \sqrt{\frac{M}{F \cdot l}},$$

gdzie M oznacza moment bezwładności wahadła względem osi obrotu,

F — ciężar wahadła, t. j. siłę, z jaką wahadło jest przyciągane do ziemi,

l — odległość środka ciężkości od osi obrotu.

Jeżeli przy każdym wahnięciu wahadło otrzymuje pewien impuls, równoważący siłę tarcia na osi i opór powietrza, to waha się ono bez zatrzymania i wykonywa w ciągu jednostki czasu niezmienną liczbę wahnięć.

Założmy, że w omawianym liczniku Arona wahadła zrobione są w taki spo-

---

[1]) Naczynie to znajduje się u góry przyrządu, patrz rys. 373.

sób, że, gdy przez żadną zwojnicę prąd nie płynie, liczba wahnięć tych wahadeł w jednostce czasu jest jednakowa i wynosi n, wtedy:

$$n = \frac{1}{T} = \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{F \cdot l}{M}}.$$

Pod wpływem prądów powstają siły dodatkowe, proporcjonalne do tych prądów; ponieważ zaś jeden z prądów proporcjonalny jest do napięcia mierzonego prądu, przeto siłę dodatkową F', działającą na każdą ze zwojnic ruchomych, możemy wyrazić wzorem:

$$F' = C \cdot e \cdot J,$$

gdzie e oznacza napięcie na końcach zwojnic nieruchomych, J — prąd w sieci, a C—wielkość stała, zależna od ustroju i odległości zwojnic.

Siła F' jednego wahadła skierowana jest w tę samą stronę, co i siła ciężkości, drugiego zaś odwrotnie.

Mając to na uwadze i oznaczając ramię działania tej siły przez l', a liczbę wahnięć jednego wahadła w jednostce czasu przez n_1 i drugiego przez n_2, możemy ułożyć równania:

$$n_1 = \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{F \cdot l + l' \cdot C \cdot e \cdot J}{M}},$$

$$n_2 = \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{F \cdot l - l' \cdot C \cdot e \cdot J}{M}},$$

albo też, oznaczając przez C' nową wielkość stałą, otrzymamy:

$$n_1 = \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{F \cdot l}{M}} \cdot \left(1 + \frac{C' \cdot e \cdot J}{F}\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$n_2 = \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{F \cdot l}{M}} \cdot \left(1 - \frac{C' \cdot e \cdot J}{F}\right)^{\frac{1}{2}},$$

skąd:

$$n_1 - n_2 = \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{F \cdot l}{M}} \cdot \left[\left(1 + \frac{C' \cdot e \cdot J}{F}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(1 - \frac{C' \cdot e \cdot J}{F}\right)^{\frac{1}{2}}\right].$$

Rozwijając dwumiany w potędze $\frac{1}{2}$ w szeregi, otrzymamy:

$$n_1 - n_2 = \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{F \cdot l}{M}} \cdot \left[\left(1 + \frac{C' \cdot e \cdot J}{2F} - \frac{(C' \cdot e \cdot J)^2}{8F^2} + \frac{(C' \cdot e \cdot J)^3}{16F^3} \cdots\right) - \right.$$

$$\left. - \left(1 - \frac{C' \cdot e \cdot J}{2F} - \frac{(C' \cdot e \cdot J)^2}{8F^2} - \frac{(C' \cdot e \cdot J)^3}{16F^3} \cdots\right)\right].$$

Jeżeli opuścimy składniki w potęgach wyższych od drugiej w przypuszczeniu, że wielkość $C' \cdot e \cdot J$ jest znacznie mniejsza od F, to otrzymamy wzór:

$$n_1 - n_2 = \frac{1}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{F \cdot l}{M}} \cdot \frac{C'}{F} \cdot e \cdot J.$$

Wprowadźmy oznaczenie:

$$\frac{1}{\pi} \cdot \sqrt{\frac{F \cdot l}{M}} \cdot \frac{C'}{F} = K.$$

Wtedy otrzymamy:

$$n_1 - n_2 = K \,.\, e \,.\, J\,.$$

Mnożąc to równanie przez czas dt, w ciągu którego przepływa prąd J przy napięciu e i całkując za czas t, otrzymamy:

$$\int_0^t (n_1 - n_2)\,.\,dt = K\,.\int_0^t e\,.\,J\,.\,dt.$$

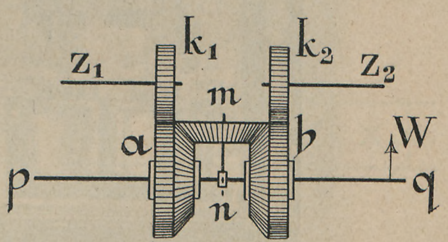
Całka z lewej strony znaku równości wyraża różnicę wskazań dwuch zegarów w ciągu czasu t; oznaczmy ją przez N. Całka zaś z prawej strony wyraża pracę prądu w czasie t; oznaczmy ją przez A. Wtedy wypadnie:

$$A = \frac{1}{K}\,.\,N,$$

$\frac{1}{K}$ jest wielkością stałą, a zatem praca prądu może być mierzona różnicą wskazań zegarów Z_1 i Z_2.

Wskazówka na tarczy podziałkowej licznika łączy się z mechanizmami obydwuch zegarów w ten sposób, że kiedy jeden zegar obraca wskazówkę np. w prawo, to drugi obraca ją w lewo. Skutkiem tego wskazówka porusza się tylko wtedy, gdy zachodzi różnica w szybkości ruchu mechanizmów zegarowych.

Przekładnia ruchu od mechanizmów zegarowych do osi wskazówki urządzona jest w sposób następujący (rys. 376). Mechanizmy zegarowe poruszają bezpośrednio osi z_1 i z_2, na których są osadzone kółka zębate k_1 i k_2, obracające się wraz z temi osiami. Kółka te zazębiają się z kółkami a i b osadzonemi luźno na osi pq. Kółka a i b, oprócz uzębienia czołowego, posiadają jeszcze uzębienie stożkowe, które zazębia się z kółkiem stożkowym, osadzonym również luźno na osi mn. Oś mn jest umocowana na osi pq, na końcu której przytwierdza się wskazówka W.



Rys. 376.

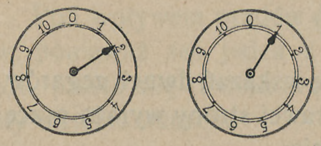
Mechanizmy zegarowe obracają kółka k_1 i k_2 w strony przeciwne, więc, gdy prędkość obrotu tych kółek będzie jednakowa, kółka a, b i m będą się również obracały, lecz oś mn zostanie nieruchoma, i oś pq nie obraca się. Różnica w prędkości obrotu kółek k_1 i k_2 wywołuje różnicę w prędkości obrotu kółek a i b, a skutkiem tego — toczenie się kółka środkowego po kółkach a i b, wtedy oś mn obraca się w płaszczyznie prostopadłej do rysunku i wprawia w ruch przymocowaną do niej oś pq ze wskazówką W.

Dla uniknięcia zbyt częstego odczytywania takiego licznika, oś wskazówki W połączona jest przekładnią zębatą z szeregiem innych osi równoległych ze wskazówkami, które obracają się 10, 100 i t. d. razy wolniej.

Przy odczytywaniu liczników wskazówkowych należy uważać na to, aby nie-omylić się w odczytywaniu wskazań, gdy wskazówki zbliżają się do położenia zerowego. Wtedy bowiem np. wskazówka jednostek (rys. 377) może już przejść za zero skutkiem pewnej luźności w zębach kółek, gdy tymczasem wskazówka dzie-

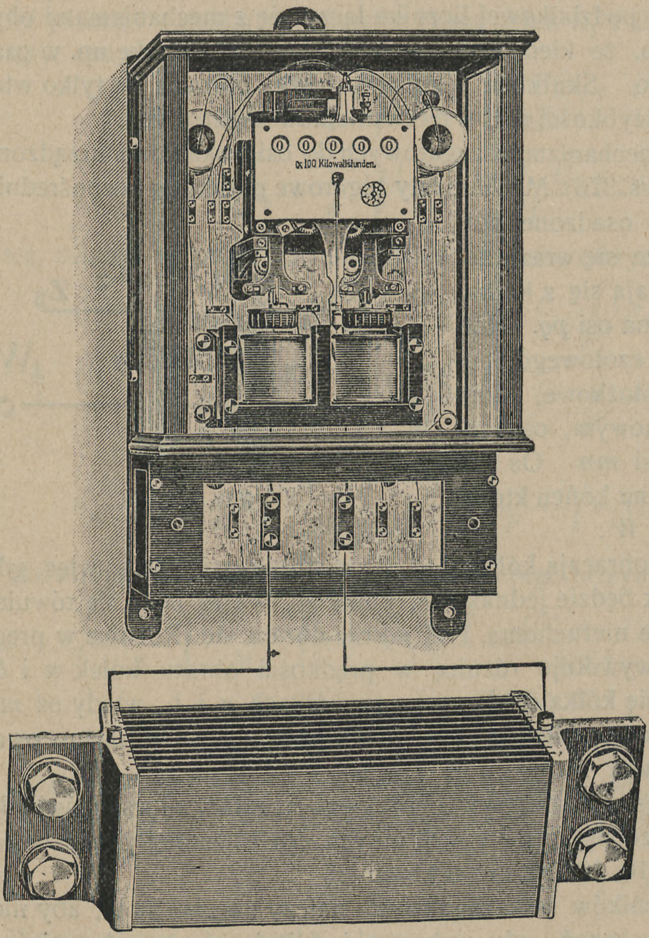
siątek nie dojdzie jeszcze do *2*. Przy położeniu wskazówek, podanem na rys. 377, odczytujemy nie *11* a 21.

Zauważyć tu należy, że w licznikach Arona wyregulowanie wahadeł z taką dokładnością, ażeby szły bez prądu zupełnie jednakowo, jest rzeczą niewykonalną.



Rys. 377.

Dla uniknięcia mogących stąd powstać niedokładności we wskazaniach liczników, zmienia się co każde 20 minut za pomocą przełącznika, wprawianego w ruch mechanizmem zegarowym, kierunek prądu w zwojnicach ruchomych. Skutkiem tego wachadło przyśpieszające staje się zwalniającem i odwrotnie. Zarazem musi się też oczywiście zmieniać i przekładnia ruchu od mechanizmów zegarowych do wskazówek. Przez takie zmiany w układzie mechanizmu powyżej wzmiankowana różnica w biegu zegarów będzie przesuwać wskazówki najpierw w jedną, a potem w drugą stronę, ostatecznie więc nie będzie miała wpływu na położenie wskazówek.



Rys. 378.

Dla uniknięcia ręcznego nakręcania sprężyn, poruszających wahadła, stosuje się jedną tylko sprężynę, poruszającą oba wahadła, nakręcaną samoczynnie co kilka minut za pomocą elektromagnesu. Co pewien czas elektromagnes przyciąga kotwicę, nakręcającą sprężynę.

Na rys. 378 widzimy licznik Arona z bocznikiem dla bardzo silnego prądu. Zwojnice nieruchome są nawinięte na rdzeniach żelaznych, przez nie płynie prąd proporcjonalny do napięcia sieci. Nad zwojnicami nieruchomemi widoczne są zwojnice płaskie, przymocowane do wahadeł, połączone z bocznikiem. Zamiast wskazówek, mechanizm cyfrowy ma tarcze z cyframi od *0* do *9*, które są widoczne w okienkach.

Ze wzorów, wyprowadzonych poprzednio dla licznika Arona, wynika wy-

raźnie, że licznik ten może być stosowany tak przy prądzie stałym jak i przy zmiennym.

Liczniki Arona są bardzo dokładne; przy odpowiednim ustroju dają one wskazania niezależne od postaci krzywej prądów, ani od liczby okresów na sekundę. Są też bardzo czułe, mogą więc wskazywać energję prądu nawet bardzo słabego w porównaniu z prądem normalnym, dla którego są przeznaczone. Wskazania ich nie zależą od zmiennego tarcia w osiach i prawie zupełnie od temperatury.

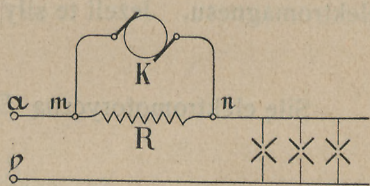
Liczniki te są jednak znacznie droższe od innych, co tłomaczy się skomplikowanym ustrojem mechanizmów zegarowych.

5. **Liczniki motorowe do prądu stałego.** *Ze względu* na prostotę budowy i wystarczającą dokładność wskazań, za najbardziej praktyczne uznane być mogą powszechnie teraz używane liczniki motorowe. W ustroju ich znajdują zastosowanie dwie zupełnie różne zasady.

Według patentu O'Keenan'a, licznik stanowi silnik elektryczny obracający się **bez żadnego obciążenia**; opór tarcia w łożyskach i opór powietrza, są możliwie zmniejszone.

Jeżeli napięcie w sieci jest stałe, to poprzestać można na liczeniu ilości elektryczności; licznik składa się wtedy ze stałego magnesu i kilku osadzonych na jednej osi zwojnic, do których doprowadza się prąd przez nieruchome szczotki, dotykające metalowych blaszek połączonych z powyższemi zwojnicami.

Włączenie takiego licznika w obwód wskazane jest na rys. 379. Prąd główny J przebiega przez opór stały R i wytwarza na jego końcach napięcie e_{mn}. Od tego napięcia odgałęzia się prąd i do licznika K.



Rys. 379.

Oznaczmy przez r opór licznika i przez E— siłę przeciwelektromotoryczną, powstającą w zwojach w czasie ich ruchu; wtedy na zasadzie prawa Ohma:

$$i = \frac{e_{mn} - E}{r}.$$

Ponieważ praca wykonywana przez taki silnik jest nadzwyczaj mała, więc prędkość ruchu zwojnic zwiększa się do tego stopnia, iż E staje się prawie równym e_{mn}; prąd i jest zaś bardzo mały, można więc przyjąć, że

$$e_{mn} = E.$$

Według prawa Ohma

$$e_{mn} = J \, . \, R,$$

a E jest proporcjonalne do prędkości obrotu zwojnic. Jeżeli więc przez n oznaczymy liczbę obrotów zwojnic w ciągu jednostki czasu, a przez C wielkość stałą zależną od indukcji magnetycznej pola, a także od szczegółów ustroju zwojnic i magnesu, to:

$$E = C \, . \, n.$$

Z powyższych trzech równań wynika, że:

$$J \,.\, R = C \,.\, n,$$

a więc:

$$J = \frac{C}{R} \,.\, n.$$

Jeżeli czas, w ciągu którego płynął prąd stały J, oznaczymy przez t i pomnożymy powyższe równanie przez tę wielkość, to:

$$J \,.\, t = \frac{C}{R} n \,.\, t,$$

oznaczając zaś $\frac{C}{R}$ przez K, a $n \,.\, t$ przez N, otrzymamy:

$$J \,.\, t = K \,.\, N.$$

Ilość elektryczności proporcjonalna jest zatem do liczby obrotów osi licznika.

Jeżeli przy użyciu liczników tego typu trzeba uwzględniać zmienne napięcie sieci, to dodajemy elektromagnes nieruchomy zasilany prądem z napięcia e_{ab} (rys. 379).

Pole tego elektromagnesu jest skierowane odwrotnie względem pola magnesu stałego. W tych warunkach siłę elektromotoryczną, powstającą w zwojnicach ruchomych, możemy uważać jako wynik różnicy dwuch sił elektromotorycznych: jednej wzniecone przez pole magnesu stałego i drugiej wzniecone przez pole elektromagnesu. Jeżeli te siły elektromotoryczne oznaczymy przez E_1 i E_2, to:

$$E = E_1 - E_2 \quad \text{. . . . . (a).}$$

Siłę elektromotoryczną E_1 wyrazić można wzorem:

$$E_1 = C_1 \,.\, n, \quad \text{. . . . . (b)}$$

gdzie C_1 — wielkość stała, a n liczba obrotów na jednostkę czasu zwojnic ruchomych.

Siłę elektromotoryczną E_2 wznieca się polem, którego natężenie jest proporcjonalne do prądu, płynącego pod napięciem e_{ab}, przeto wyraża się ona wzorem:

$$E_2 = C_2 \,.\, e_{ab} \,.\, n, \quad \text{. . . . . (c)}$$

gdzie C_2 jest to inna stała wielkość.

Podstawiając wyrażenia dla E_1 i E_2 w równanie (a), otrzymamy:

$$E = (C_1 - C_2 \cdot e_{ab}) \,.\, n.$$

Ponieważ jednak, według poprzednich wywodów:

$$E = J \,.\, R,$$

przeto:

$$J \,.\, R = (C_1 - C_2 \,.\, e_{ab}) \,.\, n.$$

Mnożąc obie strony równania przez e_{ab} i t i dzieląc przez R, otrzymamy:

$$e_{ab} \,.\, J \,.\, t = \frac{1}{R} \,.\, e_{ab} \,.\, (C_1 - C_2 \,.\, e_{ab}) \,.\, n \,.\, t.$$

Z tego równania wynika, że praca prądu J może być mierzona liczbą obrotów osi licznika, wtedy gdy wyraz:

$$e_{ab} \, (C_1 - C_2 \, . \, e_{ab})$$

będzie wielkością stałą przy zmiennym napięciu e_{ab}.

Wyraz ten ma maximum przy: [1])

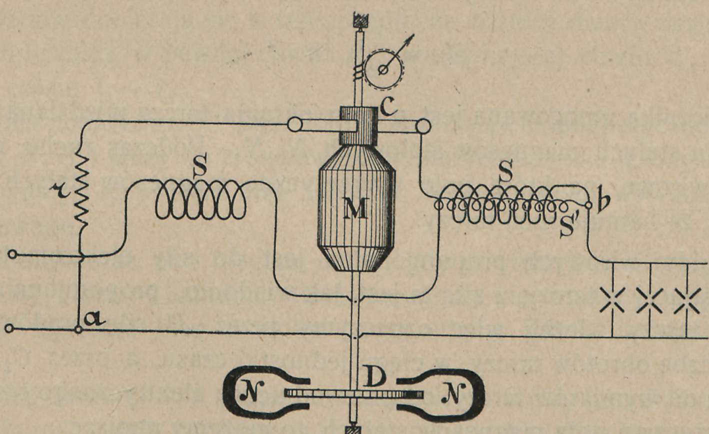
$$C_1 = 2 \, C_2 \, . \, e_{ab} \, . \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (d)$$

W pobliżu tego maximum wartość powyższego wyrazu zmienia się mało przy zmianie napięcia e_{ab}, co łatwo zrozumiemy, jeżeli wykreślimy linję krzywą, wyrażającą zmienność wyrazu e_{ab} $(C_1 - C_2 \, . \, e_{ab})$ w zależności od napięcia e_{ab}.

Ze wzorów (b), (c) i (d) wynika, że dla osiągnięcia maximum wartości rozważanego wzoru należy tak urządzić dodatkowy elektromagnes, aby siła elektromotoryczna, wzniecona prez magnes stały, była dwa razy większa od siły elektromotorycznej, wznieconej przez elektromagnes.

Ustrój liczników motorowych innego rodzaju, obmyślony przez Hummela i Elihu Thomsona, polega na zastosowaniu silnika elektrycznego obciążonego.

Układ części zasadniczych w liczniku Thomsona i połączenie ich z siecią, wskazane są na rys. 380. Prąd główny przepływa przez zwojnice nieruchome SS,



Rys. 380.

prąd zaś odgałęziony od punktów a i b płynie przez opór duży r, ruchomy układ zwojnic M i dodatkową nieruchomą zwojnicę S'. Zwojnice ruchome zwinięte są w ten sposób, że tworzą okrągły bęben M; płaszczyzny poszczególnych zwojów są pionowe. Prąd do tych zwojów doprowadza się przez płytki, zwane szczotkami, które przylegają do walca, [2]) utworzonego z szeregu izolowanych od siebie płytek metalowych, połączonych ze zwojami.

---

[1]) Wzór ten otrzymamy, znajdując pochodną powyższego wyrazu, według e_{ab} i zakładając, że pochodna ta równa się zeru.

[2]) Walec ten zwykle nazywamy kolektorem.

Zwoje nieruchome wytwarzają pole magnetyczne, którego linje biegną poziomo. Pole to wywiera działanie mechaniczne na pionowe druty z prądem w zwojnicach ruchomych. Skutkiem tego działania bęben M i oś, na której jest on umocowany, obracają się.

Moment obrotowy M jest tu proporcjonalny do prądu J, płynącego w zwojnicach nieruchomych S i S i do prądu i w zwojnicach ruchomych. Jeżeli przez C_1 oznaczymy wielkość stałą, to:

$$M = C_1 \,.\, i \,.\, J.$$

Prąd i możemy wyrazić według prawa Ohma przez napięcie e pomiędzy punktami a i b (rys. 380) i opór R obwodu odgałęzionego:

$$i = \frac{e}{R}.$$

Stosując ten wzór, przyjmujemy, że siła elektromotoryczna indukcji, powstająca w zwojach ruchomych, jest bardzo mała, ponieważ prędkość obrotu osi jest zazwyczaj niewielka i pole, wywołane w powietrzu przez zwojnice S, S — dość słabe. Zaznaczyć też należy, że opór r, włączony w obwód zwojnic ruchomych, jest znaczny, napięcie przeto pomiędzy szczotkami jest małe.

Na podstawie tych uwag opuściliśmy we wzorze prawa Ohma siłę elektromotoryczną indukcji i z powyższych dwuch wzorów otrzymujemy:

$$M = \frac{C_1}{R} \,.\, e \,.\, J.$$

Na osi licznika umocowana jest u dołu okrągła tarcza miedziana D, obracająca się w polu stałych magnesów stalowych N, N. Podczas ruchu, w tarczy powstają prądy wirowe, na które pole magnetyczne magnesów stałych oddziaływa w ten sposób, że hamuje ruch tarczy.

Siła prądów wirowych proporcjonalna jest do siły elektromotorycznej indukcji, powstającej w tarczy, a siła ta jest, jak wiadomo, proporcjonalną do prędkości ruchu tarczy. Jeżeli więc oznaczymy przez J' siłę prądów wirowych, przez n — liczbę obrotów tarczy w ciągu jednostki czasu, a przez C_2 — wielkość stałą, zależną od wymiarów tarczy, od przewodnictwa elektrycznego tarczy i od indukcji magnetycznej pola magnesów stałych, to możemy napisać:

$$J' = C_2 \,.\, n.$$

Moment hamujący magnesów stałych proporcjonalny jest do siły prądów wirowych i do indukcji magnetycznej w polu tych magnesów; oznaczając więc ten moment przez M', a wielkość stałą przez C_3, otrzymamy:

$$M' = C_3 \,.\, J',$$

albo:

$$M' = C_2 \,.\, C_3 \,.\, n.$$

Skoro zaś prędkość biegu licznika ustali się i n będzie stałem, to momenty obracający i hamujący równoważą się, czyli:

$$M = M',$$

$$\frac{C_1}{R} \cdot e \cdot J = C_2 \cdot C_3 \cdot n.$$

Oznaczmy przez t czas, w ciągu którego prąd stały J płynie pod napięciem e, i pomnóżmy przez ten czas powyższe równanie; wtedy:

$$\frac{C_1}{R} \cdot e \cdot J \cdot t = C_2 \cdot C_3 \cdot n \cdot t.$$

Wprowadzając zaś oznaczenia:

$$\frac{C_2 \cdot C_3 \cdot R}{C_1} = C,$$

i

$$n \cdot t = N,$$

otrzymamy:

$$e \cdot J \cdot t = C \cdot N.$$

Wzór ten wskazuje, że praca prądu J proporcjonalna jest do liczby obrotów osi licznika, może być więc mierzona tą liczbą.

Zwykle oś licznika łączy się za pomocą przekładni ślimakowej, a następnie zębatej z szeregiem krążków, zaopatrzonych w cyfry, które, ustawiając się w okienku licznika, wskazują pewne liczby.

Przekładnie dobierają się w ten sposób, że różnica dwuch liczb, odczytanych w okienkach licznika w pewnej chwili t_1 i w późniejszej chwili t_2, wskazuje pracę prądu w czasie $t_2 - t_1$.

Zwojnica dodatkowa S' (rys. 380) wytwarza pole magnetyczne, zgodne z polem zwojnic S, S i służy do zrównoważenia momentu tarcia w łożyskach osi. Moment ten hamuje oczywiście bieg licznika; w powyższych wywodach nie był on brany pod uwagę.

Zdarza się nieraz, że z biegiem czasu, gdy powierzchnie ślizgające się po sobie przytrą się, moment hamujący tarcia zmniejsza się, a wtedy zwojnica dodatkowa S' może wywołać bieg licznika nawet wtedy, gdy w zwojnicach SS prądu niema.

Zapobiec temu można przez umieszczenie na tarczy hamulcowej drucika żelaznego. Magnesy stałe przyciągają ten drucik i wstrzymują tarczę do chwili, gdy zacznie płynąć prąd główny w zwojnicach S, S.

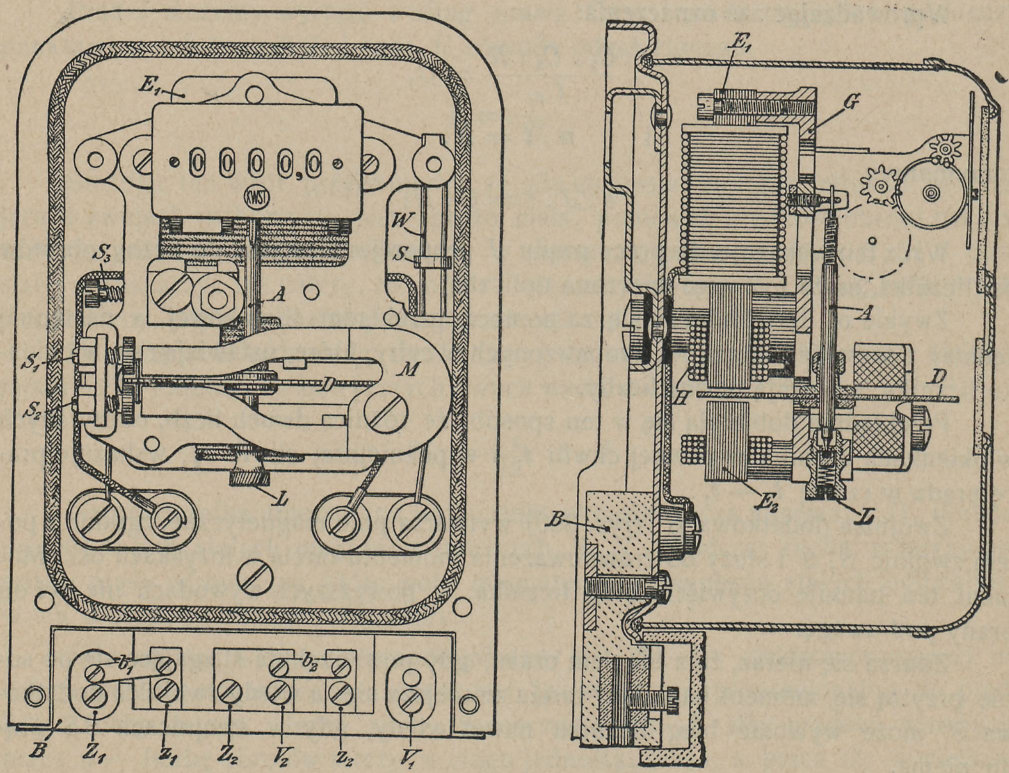
Są jeszcze liczniki, oparte na tej samej zasadzie, co i licznik poprzedni, ale ze zwojnicami ruchomemi, które wykonywają tylko części obrotu w jednę i w drugą stronę, tudzież liczniki, w których wszystkie zwojnice są nieruchome i tylko lekki rdzeń żelazny porusza się wahadłowo.

6. Liczniki motorowe do prądu zmiennego. Opisany powyżej licznik Thomsona może być stosowany także do prądu zmiennego, albowiem kierunek momentu obrotowego nie zmienia się przy jednoczesnej zmianie kierunku prądów w zwojach ruchomych i zwojach nieruchomych, wielkość zaś momentu proporcjonalna jest do średniej wartości iloczynu prądów w obu zwojnicach, a więc do średniej wartości iloczynu napięcia przez siłę prądu.

Obecnie jednak do mierzenia pracy prądu zmienego są stosowane zazwyczaj liczniki indukcyjne, których ustrój jest znacznie prostszy od ustroju licznika Thomsona.

Zasada wszystkich liczników prądu zmiennego polega na działaniu zmiennych pól magnetycznych na prądy wirowe, wywołane przez te pola w tarczy metalowej, osadzonej na osi, obracającej mechanizm liczbowy [1]) licznika.

Na rys. 381 widzimy pewne szczegóły budowy takiego licznika firmy Danubia. Na rdzeniach żelaznych znajdują się zwojnice, z których jedne włączo-



Rys 381.

ne są w obwód prądu głównego, inne zaś tworzą obwód odgałęziony w tych punktach, gdzie mamy napięcie robocze, skutkiem tego prąd w tych zwojnicach jest proporcjonalny do tego napięcia.

W polu magnetycznym, wytworzonym przez powyższe zwojnice, obraca się tarcza miedziana D, umocowana na osi A. Oś A ma u góry ślimak, obracający mechanizm liczbowy. Magnes stały M hamuje ruch tarczy.

Przez odpowiedni układ elektromagnesów osiągamy, że moment obracający oś jest proporcjonalny do mocy prądu, którego pracę mamy mierzyć. Moment zaś hamujący stałego magnesu, jak to wyprowadzono w paragrafie poprzednim, jest

[1]) Szereg tarcz lub kółek z liczbami ustawiającemi się w okienkach licznika.

proporcjonalny do prędkości obrotu tarczy, przy ruchu więc obrotowym jednostajnym, będziemy mieli równanie:

$$C_1 \cdot W = C_2 \cdot n,$$

gdzie C_1 i C_2 stałe, W — moc prądu, n — liczba obrotów osi na jednostkę czasu. Mnożąc obie strony tego równania przez t i wprowadzając oznaczenia:

$$W \cdot t = A, \quad n \cdot t = N, \quad \frac{C_2}{C_1} = C,$$

otrzymamy:

$$A = C \cdot N.$$

Praca prądu jest zatem proporcjonalna do liczby obrotów powyższej tarczy i może być mierzona za pomocą tej liczby. Dla prawidłowego więc działania licznika konieczne są dwa warunki: moment obracający tarczę, wywołany przez zwojnice z prądem, powinien być koniecznie ściśle proporcjonalny do mocy prądu zmiennego, moment zaś hamujący — do prędkości ruchu tarczy. Moc prądu zmiennego może być wyrażona rozmaicie, zależnie od tego, jakie są odbieracze: czy indukcyjne, czy też bezindukcyjne, jak również zależnie od tego, z ilofazowym prądem mamy do czynienia. Otóż do tych rozmaitych okoliczności przystosować też wypada układ zwojnic.

Jakoż rozróżniamy liczniki jednofazowe do obciążenia bezindukcyjnego, jednofazowe do obciążenia indukcyjnego, trójfazowe do równego obciążenia faz, trójfazowe do dowolnego obciążenia faz i t. p.

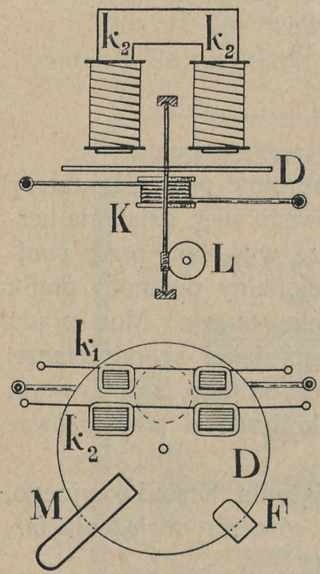
W celu zapewnienia proporcjonalności momentu hamującego do liczby obrotów tarczy, przy urządzaniu licznika zachowana być winna zasada zmniejszania do możliwych granic innych momentów hamujących, w powyższym wywodzie nie uwzględnionych.

Celem zrównoważenia momentu tarcia w łożyskach i w mechanizmie liczbowym, w pobliżu tarczy miedzianej, zboku eloktromagnesów umocowana jest blaszka. W tej blaszce zmienne pole magnetyczne elektromagnesów wznieca prądy wirowe, które, działając na prądy wirowe w tarczy ruchomej, wywołują dodatkowy moment obrotowy. Miejsce dla tej blaszki obieramy w ten sposób, aby moment dodatkowy równoważył moment tarcia.

Dla pewności, że licznik będzie się zatrzymywał w razie przerwania prądu głównego, pomimo przepływu prądu w zwojnicach odgałęzionych, przymocowuje się do tarczy drucik żelazny, przyciągany przez magnes stały. Zamiast drucika, można tarczę ruchomą w jednym miejscu przedziurawić, przez co układ prądów wirowych przy pewnym położeniu tarczy jest taki, że działanie wspomnianej blaszki jest wtedy zbyt słabe, aby mogło poruszyć tarczę.

Jako przykład ustroju zwojnic w licznikach indukcyjnych rozważymy bardziej szczegółowo licznik Raaba (rys. 382). D — tarcza miedziana, L — mechanizm liczbowy, K — zwojnica z drutu grubego bez rdzenia żelaznego, k_1, k_1 i k_2 k_2 — zwojnice z drutu cienkiego, nawinięte na rdzeniach żelaznych, M — magnes hamujący, F — blaszka żelazna dla zrównoważenia momentu tarcia w łożyskach osi i mechanizmie liczbowym, a także oporu powietrza.

Na rys. 383 wskazany jest układ połączeń zwojnic licznika z przewodami sieci. Prąd główny przepływa po zwojnicy K. Zwojnice zaś k_1 i k_2 znajdują się w odgałęzieniu. Zwojnica k_2 ma duży spółczynnik samoindukcji i jest wprost włączona pomiędzy dwa przewody sieci, zwojnica zaś k_1 ma spółczynnik samoindukcji mniejszy i jest połączona z przewodami przez znaczny opór bezindukcyjny r.

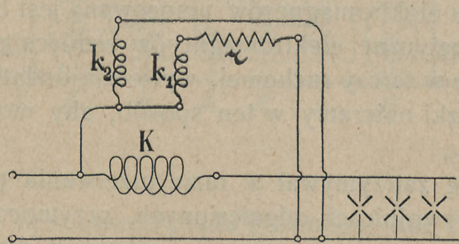


Rys. 382.

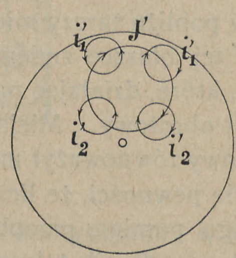
Zwojnice k_1, k_2 i K wywołują w krążku D prądy wirowe indukcyjne. Oznaczmy siłę prądów w poszczególnych zwojnicach przez i_1, i_2, J, prądy zaś indukcyjne, wywołane w krążku przez powyższe prądy — przez i_1', i_2', J'. Prawdopodobny układ prądów, wywołanych w krążku, podany jest na rys. 384.

Siły działania prądów w zwojnicach na odpowiednie prądy, wywołane przez nie w krążku, a więc J na J', i_1 na i_1', i_2 na i_2', skierowane będą prostopadle do powierzchni krążka; nie mogą one zatem wywołać żadnego momentu obrotowego. Siły działania prądów i_1 na i_2' i i_2 na i_1' również nie wytworzą momentu obrotowego, bo rozłożone są symetrycznie względem osi. Pozostają więc tylko siły działania prądów: J na i_1', J na i_2', i_1 na J' i i_2 na J'. Z tych sił powstaną cztery momenty obrotowe.

Siła średnia spółdziałania prądów zmiennych jest proporcjonalna do średniego iloczynu wartości chwilowych tych prądów. Z wywodów, podanych w rozdziale XXV § 1, wynika, że średni iloczyn wartości chwilowych wielkości sinusoidalnie zmiennych równa się



Rys. 383.



Rys. 384.

iloczynowi wartości czynnych pomnożonemu przez cos. kąta, wyrażającego różnicę faz pomiędzy temi wielkościami.

Mając to na względzie, możemy moment obrotowy, działający na krążek licznika, wyrazić wzorem:

$$M = A \,.\, J \,.\, i_1' \,.\, \cos\alpha + B \,.\, J \,.\, i_2' \,.\, \cos\beta + C \,.\, i_1 \,.\, J' \,.\, \cos\gamma + D \,.\, i_2 \,.\, J' \,.\, \cos\delta,$$

gdzie M oznacza cały moment obrotowy;

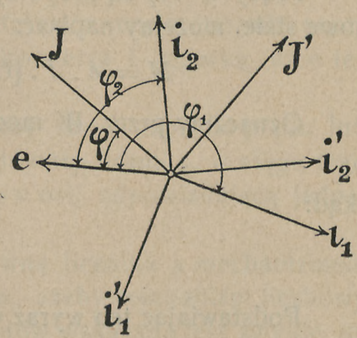
A, B, C, D — czynniki stałe, zależne od wymiarów zwojnic i krążka, od od-

ległości krążka od zwojnic, od własności magnetycznych żelaza i od oporu właściwego metalu, z którego zrobiono krążek;

α, β, γ — kąty różnicy faz pomiędzy odpowiednimi prądami.

Dla zdania sobie sprawy z wielkości tych kątów, wykreślimy układ wektorów, wyrażających poszczególne prądy, mając na względzie układ połączeń, podany na rys. 383.

Załóżmy, że prąd główny J przesunięty jest wstecz o pewien kąt φ względem napięcia e (rys. 385). Prąd i_1, ze względu na znaczny opór bezindukcyjny r, spóźnia się względem napięcia e zaledwie o niewielki kąt; jednakże dla osiągnięcia prawidłowego działania licznika, kierunek tego prądu, w zwojnicy k_1, powinien być odwrócony w porównaniu z innemi zwojnicami, skutkiem czego na wykresie należy wektor i_1 wyobrazić jako odwrócony, czyli tworzący z e kąt φ_1, nieco większy od 180°. Z powodu znacznej samoindukcji zwojnic k_2 prąd i_2 spóźnia się względem e o kąt φ_2, nieznacznie tylko mniejszy od 90°. Prądy, wywołane w krążku przez indukcję, będą się spóźniały względem prądów pierwotnych nie wiele więcej od 90°, jeżeli uwzględnić, że magnetyczne działanie prądów w krążku jest niewielkie, a więc niewielka jest ich samoindukcja. Na rys. 228 (rozdział XX § 3) widać, że gdy $i_1 \cdot \frac{n_2}{n_1}$ jest małe, to wektor i_2 jest prawie prostopadły do i_1.



Rys. 385.

Do wyrażenia momentu obrotowego wprowadzamy kąty:

$$\sphericalangle (i_1, e) = \varphi_1, \quad \sphericalangle (i_2, e) = \varphi_2, \quad \sphericalangle (J, e) = \varphi.$$

Przyjmując:

$$\sphericalangle (J, J') = 90^0, \quad \sphericalangle (i_1, i_1') = 90^0 \quad \text{i} \quad \sphericalangle (i_2, i_2') = 90^0$$

i pamiętając, że:

$$\sphericalangle (J, i_1') = \alpha, \quad \sphericalangle (J, i_2') = \beta, \quad \sphericalangle (i_1, J') = \gamma \quad \text{i} \quad (i_2, J') = \delta,$$

otrzymamy:

$$\alpha = 270^0 - (\varphi_1 - \varphi),$$
$$\beta = 90^0 + (\varphi_2 - \varphi),$$
$$\gamma = -[90^0 - (\varphi_1 - \varphi)],$$
$$\delta = 90^0 - (\varphi_2 - \varphi).$$

Te wyrażenia dla kątów α, β, γ i δ podstawiamy we wzór momentu obrotowego, poczem otrzymamy:

$$M = -A \cdot J \cdot i_1' \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi) - B \cdot J \cdot i_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi) +$$
$$+ C \cdot i_1 \cdot J' \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi) + D \cdot i_2 \cdot J' \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi).$$

Prądy wzniecone w krążku są proporcjonalne do prądów wzniecających, więc zmieniając czynniki stałe A, B, C, D na A', B', C', D', możemy wprowadzić we wzór momentu odpowiednie prądy w zwojnicach zamiast prądów wznieconych w krążku, wtedy otrzymamy:

$$M = -A' J \,.\, i_1 \,.\, \sin(\varphi_1 - \varphi) - B' J \,.\, i_2 \,.\, \sin(\varphi_2 - \varphi) + $$
$$+ C' \,.\, i_1 \,.\, J \,.\, \sin(\varphi_1 - \varphi) + D' \,.\, i_2 \,.\, J \,.\, \sin(\varphi_2 - \varphi),$$

albo:

$$M = (C' - A') \,.\, J \,.\, i_1 \,.\, \sin(\varphi_1 - \varphi) + (D' - B') \,.\, J \,.\, i_2 \,.\, \sin(\varphi_2 - \varphi) \quad . \; . \; . \quad (a)$$

Prądy i_1 i i_2 są proporcjonalne do napięcia e; oznaczając więc przez C_1 i C_2 nowe stałe, możemy napisać:

$$M = e \,.\, J \,.\, [C_1 \,.\, \sin(\varphi_1 - \varphi) + C_2 \,.\, \sin(\varphi_2 - \varphi)].$$

Oznaczmy przez W moc prądu J przy napięciu e i różnicy faz φ, wtedy:

$$W = e \,.\, J \,.\, \cos\varphi,$$

skąd:

$$e \,.\, J = \frac{W}{\cos\varphi},$$

Podstawiając ten wyraz we wzór dla momentu, otrzymamy:

$$M = W \,.\, \frac{[C_1 \,.\, \sin(\varphi_1 - \varphi) + C_2 \,.\, \sin(\varphi_2 - \varphi)]}{\cos\varphi}.$$

Po rozwinięciu sinusów różnic kątów φ_1, φ i φ_2, φ, wypadnie:

$$M = W \,.\, [C_1 \,.\, \sin\varphi_1 + C_2 \,.\, \sin\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi \,.\, (C_1 \,.\, \cos\varphi_1 \,.\, + C_2 \,.\, \cos\varphi_2)].$$

Wielkość $C_1 \,.\, \sin\varphi_1 + C_2 \,.\, \sin\varphi_2$ jest dla licznika danego wielkością stałą. Wyraz zaś $C_1 \,.\, \cos\varphi_1 + C_2 \,.\, \cos\varphi_2$ można łatwo sprowadzić do zera, ponieważ φ_2 jest $< 90^0$, a $\varphi_1 > 180^0$ i $<$ od 270^0; cosinusy więc tych kątów mają znaki odwrotne. Wystarcza tylko dobrać odpowiednio wielkość stałych C_1 i C_2, co daje się osiągnąć przez odpowiednią budowę zwojnic k_1 i k_2. Mając to na uwadze, możemy cały wyraz w nawiasie powyższego wzoru oznaczyć jedną literą K, wyrażającą wielkość stałą, a wtedy otrzymamy:

$$M = K \,.\, W.$$

Z poprzednich zaś rozumowań wiemy, że w takich warunkach liczba obrotów krążka licznika proporcjonalna jest do pracy prądu.

Jeżeli obciążenie sieci jest bezindukcyjne, i licznik ma wskazywać prawidłowo tylko przy takim obciążeniu, to zbyteczną jest rzeczą ustawiać zwojnicę k_2.

Bez tej zwojnicy wzór (a), wyrażający moment obrotowy, będzie:

$$M = (C' - A') \,.\, J \,.\, i_1 \,.\, \sin(\varphi_1 - \varphi).$$

Oznaczając stałą przez K i uwzględniając, że i_1 jest proporcjonalne do e, a $\varphi = 0$, otrzymamy:

$$M = K \,.\, e \,.\, J.$$

Przy $\varphi = 0$, moc prądu $W = e \,.\, J$, przeto:

$$M = K \,.\, W.$$

Jeżeli mamy prąd trójfazowy, to przy równym obciążeniu faz, możemy stosować licznik takiej samej budowy, jak wyżej opisany, z niektóremi tylko drobnemi zmianami. Przy różnym zaś obciążeniu faz, licznik powinien być zaopatrzony w dwa krążki metalowe, umocowane na jednej wspólnej osi. Układ połączeń zwojnic takiego licznika z siecią oparty jest na nieco zmienionej zasadzie mierzenia mocy prądu trójfazowego za pomocą dwuch watomierzy. Szczegóły, dotyczące liczników trójfazowych, znajdzie czytelnik w dziełku L. Fatersona i A. Kühna „O indukcyjnych miernikach elektryczności".

7. **Wzorcowanie liczników.** Liczniki kilowatgodzin, czyli mierniki pracy prądu, wzorcowane są za pomocą amperomierza, woltomierza i zegarka, albo też za pomocą watomierza i zegarka.

Stosując odpowiedni prąd i napięcie, wymierzamy siłę i napięcie prądu lub moc prądu oraz czas, a zarazem liczymy obroty osi głównej licznika, w ciągu tego czasu; według tych danych określa się liczbę obrotów osi, odpowiadającą jednej kilowatgodzinie; oznaczmy tę liczbę przez C_1.

Z przekładni, zastosowanej pomiędzy osią główną licznika a mechanizmem liczbowym, łatwo obliczyć, ile oś ma zrobić obrotów, ażeby mechanizm liczbowy wskazał jednę kilowatgodzinę; zresztą ta liczba obrotów wskazana jest zwykle na liczniku; oznaczmy ją przez C_2. Wtedy błąd licznika w odsetkach wyrazi się we wzorze:

$$\frac{C_2 - C_1}{C_1} \,.\, 100.$$

W pracowniach, przeznaczonych do wzorcowania wielkiej liczby liczników, zwojnice główne i napięciowe zasilane są z różnych źródeł.

Liczniki stosowane w praktyce powinny pod względem dokładności czynić zadość pewnym wymaganiom, które określają zazwyczaj:

a) wielkość najmniejszego prądu, wprawiającego licznik w ruch; b) granice błędów dopuszczalnych przy różnej sile prądu głównego i wreszcie c) największe wskazania licznika bez prądu w zwojnicach głównych. [1])

Dane liczbowe, dotyczące tych wymagań, zmieniają się, zależnie od warunków handlowych i technicznych. Niektóre liczby czytelnik znajdzie w rozdziale XXXIX § 5.

---

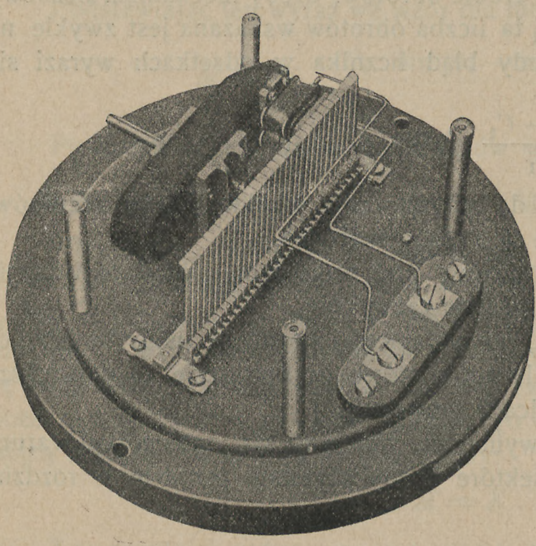
[1]) Bieg licznika pod wpływem prądu odgałęzionego zdarza się czasem skutkiem momentów obrotowych dodatkowych, mających na celu pokonanie tarcia w łożyskach osi głównej i w mechanizmie liczbowym.

ROZDZIAŁ XXXIII.

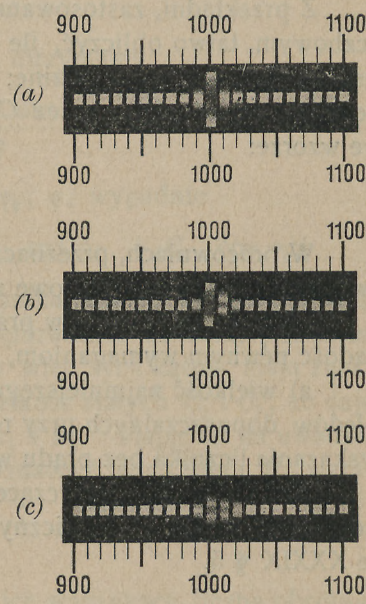
Częstościomierze.

Przyrządy, wskazujące liczbę okresów prądu zmiennego w ciągu sekundy, nazywamy częstościomierzami. Obecnie stosowane są zwykle częstościomierze, oparte na rezonansie pomiędzy częstością drgań własnych płaskich sprężynek, a liczbą zmian prądu na sekundę.

Według układu Frahma szereg sprężynek, które mają rozmaitą częstość drgań własnych (rys. 386), jest umocowany na jednej płytce; do tej samej płytki przy-



Rys. 386.



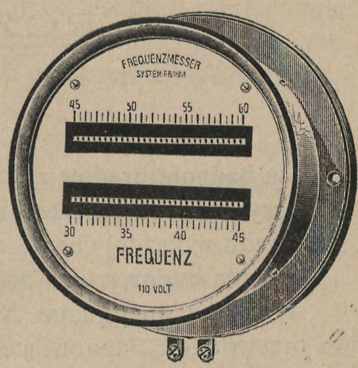
Rys. 387.

twierdza się inną małą płytkę żelazną, umieszczoną bezpośrednio pod biegunami stałego magnesu stalowego; na biegunach magnesu umocowane są rdzenie z żelaza miękkiego, zaopatrzone w zwojnice.

Gdy prąd zmienny przebiega przez zwojnice, siła przyciągania ulega wahaniom, których częstość równa jest częstości zmian prądu. Skutkiem tego drga płytka żelazna, znajdująca się pod wpływem elektromagnesu, a z nią i sprężynki, największe jednak wychylenia spostrzeżemy na tych sprężynkach, których okres

drgań własnych jest najbliższy do okresu zmienności prądu. Końce sprężynek zaopatrują się w białe kwadraciki, które w ruchu tworzą paski dłuższe lub krótsze.

Na rys. 387 (*a*) widzimy obraz drgających kwadracików, gdy częstość prądu jest zgodna z częstością drgań własnych sprężynki środkowej, rys. 387 (*b*), odpowiada częstości prądu nieco większej, a rys. (*c*) częstości jeszcze większej, mniejszej jednak od częstości drgań własnych sprężynki drugiej, licząc od środka wprawo. Przypatrując się uważnie tym obrazom kwadracików drgających, można dość dokładnie oznaczyć częstość zmian prądu.



Rys. 388.

Im więcej sprężynek posiada przyrząd dla danej skali zmian częstości, tym dokładniej można odczytać na takim przyrządzie częstość zmian prądu.

Na rys. 388 widzimy przyrząd z dwoma szeregami sprężynek do wyznaczania częstości zmian prądu od 30 do 60 okresów na sekundę.

W obwód włączamy częstościomierze tak samo, jak woltomierze, ponieważ zwojnice tych przyrządów mają duży opór i są przystosowane do małej siły prądu. Częstościomierz, zbudowany dla pewnego napięcia, nie można włączać na napięcia wyższe, ponieważ skutkiem zbyt silnego prądu może być uszkodzony.

Oprócz opisanych powyżej, budowane są jeszcze częstościomierze, których ustrój oparty jest na zależności oporu indukcyjnego, lub też oporu pojemności od częstości zmian prądu na sekundę. Takie przyrządy mają zwykłą wskazówkę, poruszającą się p o skali z podziałkami.

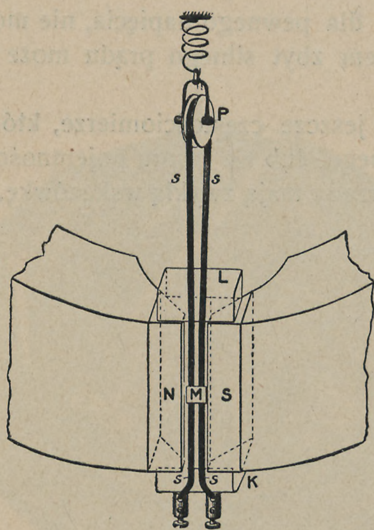
ROZDZIAŁ XXXIV.

Oscylografy.

Do badania prądów zmiennych stosowane bywają obecnie w wielu przypadkach przyrządy, zwane oscylografami, a służące do wyznaczania wartości napięcia i siły prądu w każdej chwili, o ile prąd nie zmienia się zbyt szybko.

Zasada budowy tych przyrządów jest następująca:

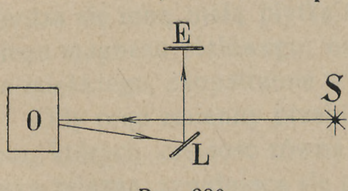
Pomiędzy biegunami N i S silnego elektromagnesu (rys. 389) znajdują się dwa przewodniki, stanowiące jedną pętelkę, przerzuconą przez krążek P. Sprężyna, ciągnąca krążek do góry, utrzymuje te przewodniki w stanie napiętym. Jeżeli przez taką pętelkę przepuścić prąd, to w jednym przewodniku prąd będzie płynął do góry, w drugim zaś — na dół.



Rys. 389.

Pole elektromagnesu ma linje równoległe do płaszczyzny rysunku; będzie ono zatem wyginało jeden przewodnik naprzód, a drugi wtył. Dla uwidocznienia tego ruchu, do przewodników przyklejone jest w środku cienkie lusterko M, które pod wpływem prądu zmiennego, przepływającego w pętelce, będzie wykonywało ruchy wahadłowe, obracając się około swej osi pionowej.

Spostrzec ruchy lusterka M można za pomocą promienia świetlnego, odbitego w powyższym lusterku. Promień ten może nam wykreślić nawet krzywą, wyrażającą zależność prądu od czasu, jeżeli promień odbity w lusterku M skierujemy na lusterko L (rys. 390), a stąd na ekran lub płytę fotograficzną E. Lusterko L w tym urządzeniu obraca się około osi poziomej jednostajnie, synchronicznie ze zmiennością prądu, tak, że te same położenia lusterka L odpowiadają zawsze tym samym wartościom siły prądu. Na rys. 390 promień SO, biegnący ze źródła światła do oscylografu, jest nieruchomy, promień OL odbity w lusterku oscylografu porusza się w płaszczyźnie prawie poziomej. Promień LE



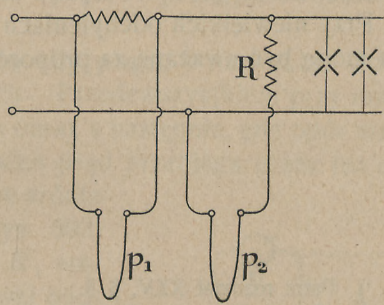
Rys. 390.

wykonywa ruch złożony, składający się z dwuch ruchów: jednego w płaszczyźnie pionowej, prostopadłej do płaszczyzny rysunku, i drugiego, również w płaszczyźnie pionowej, lecz leżącej w płaszczyźnie rysunku. Krzywa, otrzymana na ekranie, będzie miała rzędne, wyrażające siłę prądu, w kierunku prostopadłym do rysunku-

Dla dokładniejszego uchwycenia tych chwil, w których prąd zmienia swój kierunek, oscylografy zaopatrywane są zwykle w drugie lusterko nieruchome, umieszczone obok lusterka M (rys. 389). Promień odbity od lusterka nieruchomego zakreśli na ekranie E linję prostą, równoległą do płaszczyzny rysunku, stanowiącą oś odciętych.

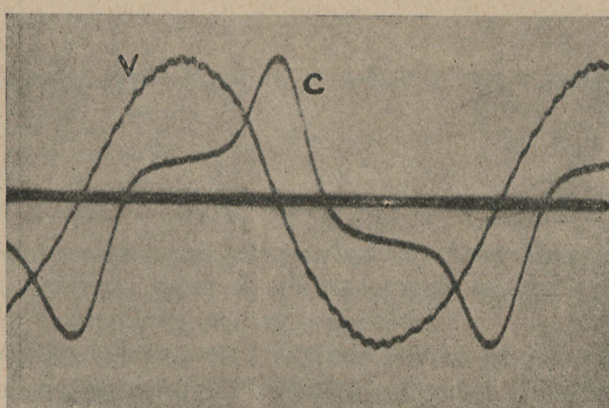
Chcąc za pomocą oscylografu wykreślić krzywą, wyrażającą zmianę napięcia w zależności od czasu, należy pętlicę oscylografu połączyć przez odpowiedni opór bezindukcyjny z badanym napięciem; w takim układzie wartość siły prądu będzie w każdej chwili proporcjonalna do napięcia.

W wielu przypadkach badaczowi zależy na tym, ażeby krzywe prądu i napięcia mógł widzieć jednocześnie i miał możność określenia różnicy faz tych dwuch zmiennych wielkości. Oscylograf zaopatruje się wtedy w dwie jednakowe pętlice, umieszczone pomiędzy biegunami jednego elektromagnesu. Przez jedną pętlicę P_1 (rys. 391) przepuszcza się prąd badany, cały lub odgałęziony od bocznika, a przez drugą P_2 i dodatkowy opór bezindukcyjny R przepuszcza się prąd, płynący od badanego napięcia. Oscylograf ma wtedy trzy lusterka: dwa ruchome i jedno nieruchome.



Rys. 391.

Krzywe świetlne, otrzymane na ekranie, można oczywiście fotografować. Jako przykład, podana jest na rys. 392 odbitka fotografji, przedstawiającej napięcie V i prąd C dynamomaszyny prądu zmiennego, zasilającej szereg transformatorów nieobciążonych, a więc takich, których zwoje wtórne mają obwody przerwane. Na krzywej V widzimy wyraźnie drobne ząbki, wywołane zmiennością siły elektromotorycznej w dynamomaszynie; zmienność ta stąd pochodzi, że druty, w których wywołuje się przez indukcję siła elektromotoryczna, ułożone są wiązkami w rowkach, wyciętych w żelazie. Krzywa prądu ma postać zupełnie niepodobną do sinusoidy, albowiem pod



Rys. 392.

wpływem histerezy, powstałej w żelazie transformatorów, te ostatnie działały w danym razie jako zwykłe dławiki. [1])

Za pomocą oscylografu dają się obserwować wszelkie te zmiany w prądzie, które powtarzają się okresowo. Fotografować zaś można nawet niepowtarzające się zmiany. Wystarczy tylko umieścić w odpowiedniej chwili płytę lub błonkę fotograficzną na miejscu ekranu E, lub też usunąć zupełnie lusterko L (rys. 390) i przesunąć szybko kliszę z góry na dół, umieszczając ją na drodze odbitych promieni OL. Jeżeli klisza przesuwać się będzie wtedy, gdy lusterko oscylografu drga pod wpływem zmian prądu, to otrzymamy na niej linję krzywą, z której będziemy mogli wnioskować o charakterze zmian prądu. [2])

Dla odczytania na krzywych oscylografu wielkości prądu w amperach wystarcza, przy danym natężeniu pola elektromagnesu, przepuścić przez pętlicę prąd stały, wyznaczyć jego wielkość za pomocą dokładnego amperomierza, a jednocześnie wymierzyć odległość od osi odciętych linji zakreślonej promieniem, odbitym od lusterka ruchomego, które będzie odchylone o pewien kąt stały.

Przy niewielkich odchyleniach lusterka M (rys. 389) rzędne krzywych oscylografu mogą być uważane za proporcjonalne do siły prądu.

---

[1]) Patrz rozdział XXV, § 3.

[2]) Niektóre jeszcze szczegóły o oscylografie czytelnik znajdzie w artykule autora: „Oscylograf i jego zastosowanie“, drukowanym w Wektorze w r. 1913 i wydanym w odbitce.

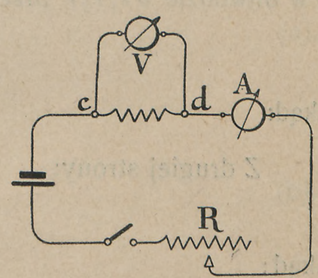
ROZDZIAŁ XXXV.

Mierzenie oporu.

Opory w praktyce bywają mierzone w dwojaki sposób: albo drogą pośrednią — przez mierzenie napięcia i prądu, lub też wprost — przez porównanie oporów niewiadomych z wiadomemi.

1. **Mierzenie oporu przez wyznaczenie siły prądu i napięcia.** Sposób ten stosuje się najczęściej w dwuch wypadkach: Przedewszystkiem przy mierzeniu oporów małych (np. mniejszych od jednego oma), a następnie, gdy opór ma być mierzony pod prądem, t. j. wówczas, kiedy pewien prąd przebiega przez ten opór.

Zasada tego sposobu polega na tem, że ze źródła prądu stałego (najlepiej z akumulatorów) (rys. 393) przepuszcza się prąd przez opór regulacyjny R, amperomierz A i opór niewiadomy cd. Końcówki oporu niewiadomego c i d połączone są pozatem z woltomierzem V.



Rys. 393.

Załóżmy, że woltomierz V wskazuje e woltów, a amperomierz J amperów, opór zaś woltomierza niech będzie r omów; wtedy prąd, przepływający przez niewiadomy opór x, wyniesie:

$$J - \frac{e}{r},$$

opór zaś niewiadomy x obliczony być może na zasadzie prawa Ohma ze wzoru.

$$x = \frac{e}{J - \frac{e}{r}},$$

Stosując ten sposób, należy zwracać szczególną uwagę na to, aby woltomierz był przyłączony dokładnie na końcach oporu x; dla osiągnięcia tego celu prąd doprowadza się nieraz do oporu x zapomocą osobnych zacisków.

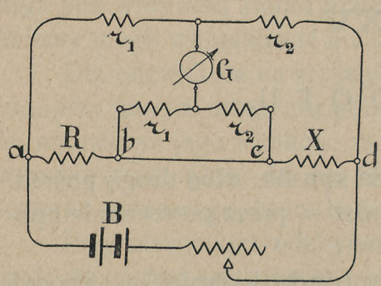
Przy pomiarach bardzo dokładnych, prąd i napięcie mierzą się sposobem kompensacyjnym; prąd przez mierzenie napięcia na oporze wiadomym, a napięcie wprost, przyłączając układ kompensacyjny do punktów c i d [1]).

[1]) Patrz rozdział XXIX, § 10 i rozdział XXX, § 2.

Przy pomiarach za pomocą amperomierza i woltomierza, jeżeli opór woltomierza jest duży, a nie zależy na zbyt wielkiej dokładności pomiarów, można $\frac{e}{r}$ opuścić wobec J, i wtedy:

$$x = \frac{e}{J}.$$

2. **Podwójny mostek Thomsona.** Do mierzenia małych oporów stosuje się również układ przyrządów, znany pod nazwą podwójnego mostku Thomsona.



Rys. 394.

Dla porównania dwuch oporów X i R (rys. 394), przepuszcza się przez te opory prąd z baterji B. Końcówki a i d łączą się pomiędzy sobą przez opory r_1 i r_2, i końcówki b i c również przez opory takie same r_1 i r_2, pozatem włącza się galwanometr G tak, jak to wskazano na rysunku.

Stosunek oporów: $r_1 : r_2$ łatwo dobrać taki, aby prąd w galwanometrze był równy zeru, wtedy potencjały w tych punktach, gdzie jest przyłączony galwanometr, będą sobie równe.

Oznaczmy potencjały na końcówkach galwanometru przez V, a w punktach a, b, c, d, przez: V_a, V_b, V_c, V_d, siłę prądu w obwodzie: ar_1r_2d przez i_1, a w obwodzie br_1r_2c przez i_2. Na zasadzie prawa Ohma mamy równania:

$$V_a - V = i_1 \cdot r_1$$

$$V_b - V = i_2 \cdot r_1,$$

skąd:

$$V_a - V_b = (i_1 - i_2) \cdot r_1 \quad \text{. . . . . (a).}$$

Z drugiej strony:

$$V - V_d = i_1 \cdot r_2$$

$$V - V_c = i_2 \cdot r_2,$$

skąd:

$$V_c - V_d = (i_1 - i_2) \cdot r_2 \quad \text{. . . . . (b).}$$

Dzieląc równania (b) i (a) jedno przez drugie, otrzymamy:

$$\frac{V_c - V_d}{V_a - V_b} = \frac{r_2}{r_1}.$$

Z układu połączeń, wskazanych na rys. 394, widzimy, że jeżeli w galwanometrze prąd równa się zeru, to w oporach R i X siła prądu jest jednakowa; opory te mają się zatem do siebie, jak spadki potencjału w tych oporach. Wobec tego, z ostatniego równania wynika, że

$$\frac{X}{R} = \frac{r_2}{r_1},$$

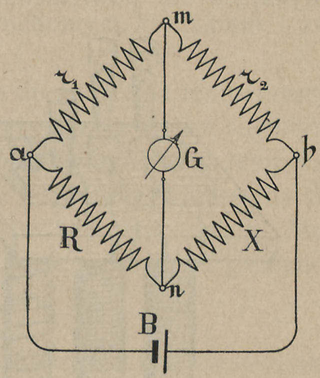
skąd:

$$X = R \cdot \frac{r_2}{r_1}.$$

Przy stosowaniu tego sposobu mierzenia oporów, należy zwracać uwagę, by opory r_1 i r_2 wynosiły kilkaset, a conajmniej kilkadziesiąt omów, a to w celu

uniknięcia wpływu oporów w miejscach przytwierdzenia drutów, jak również wpływu oporu drutów łączących.

3. **Mostek Wheatstone'a.** [1]) Do mierzenia oporów średnich od jednego do stu tysięcy omów najwłaściwszy jest układ przyrządów znany pod nazwą mostku Wheatstone'a.



Rys. 395.

Układ ten, wskazany na rys. 395, stanowią cztery opory: r_1, r_2, R i X, galwanometr G i baterja B. Opór R jest wiadomy, co do oporów r_1 i r_2, to wystarcza wiedzieć jaki jest ich stosunek. Chcąc wybrać opory najodpowiedniejsze, należy znać wartość oporu X chociażby w przybliżeniu.

Opory r_1, r_2 i R dobieramy w ten sposób, ażeby prąd w galwanometrze równał się zeru, wtedy potencjały w punktach m i n będą jednakowe. Oznaczmy je przez V, a potencjały w punktach a i b przez V_a i V_b, prądy zaś w obwodach amb i anb, przez i_1 i i_2.

Wtedy na podstawie prawa Ohma wypadnie, że:

$$V_a - V = i_1 \cdot r_1,$$

$$V_a - V = i_2 \cdot R,$$

skąd:

$$i_1 \cdot r_1 = i_2 \cdot R \quad \text{(a)}.$$

Z drugiej strony:

$$V - V_b = i_1 \cdot r_2,$$

$$V - V_b = i_2 \cdot X,$$

skąd:

$$i_1 \cdot r_2 = i_2 \cdot X \quad \text{(b)}.$$

Dzieląc równanie (b) przez (a), otrzymamy:

$$\frac{X}{R} = \frac{r_2}{r_1},$$

a zatem:

$$X = R \frac{r_2}{r_1} \quad \text{(c)}.$$

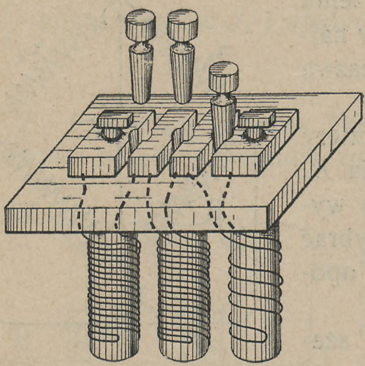
Najdokładniejsze wyniki otrzymamy wtedy, gdy $r_2 = r_1$, a więc gdy $R = X$. Niezawsze jednak jest to możliwe przy układzie oporów, które możemy mieć do rozporządzenia; bądź co bądź należy jednak dążyć do osiągnięcia powyższych warunków.

Opory r_1 i r_2 stosuje się zwykle skrzynkowe z kołeczkami (rys. 396) albo też z korbką (rys. 397) [2]). Przy stosowaniu takich oporników, szczególną uwagę zwracać należy na dokładność zetknięcia korbki lub kołków z płytkami metalowemi,

[1]) Czytaj: Uitstona.

[2]) Takie oporniki stosują się również przy innych sposobach mierzenia oporów i przy pomiarze sił elektromotorycznych sposobem kompensacji.

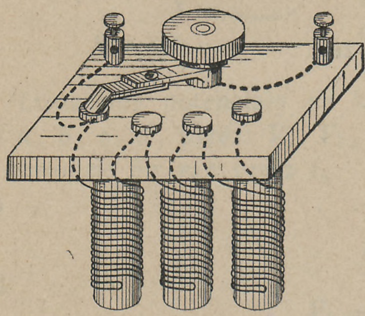
do których przytwierdzone są końce zwojów drutu, posiadającego określony opór. Stykające się powierzchnie metalowe powinny być dokładnie czyste i szczelnie przylegać do siebie.



Rys. 396.

Dla uwidocznienia zaś, jak wielkie ma znaczenie dokładność przylegania kołków lub szczotek kontaktowych w opornikach, podaję kilka liczb, wyrażających wielkość oporów przy przejściu prądu przez styki.

Opór przy przejściu prądu od jednego klocka mosiężnego do następnego przez kołek, znajdujący się między niemi (rys. 396), gdy powierzchnie zetknięcia są zupełnie czyste, wynosi od 0,00005 do 0,0002 Ω. Opór szeregu takich styków w jednej ze skrzynek wynosił od 0,0014 do 0,0055 Ω. Opór w kontaktach ślizgowych jest stalszy; wynosił on np. od 0,0023 do 0,0027 Ω

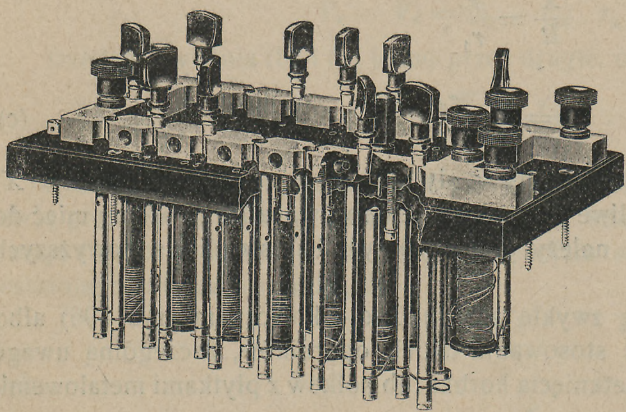


Rys. 397.

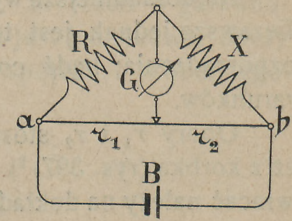
Na rys. 398 widzimy niektóre szczegóły ustroju opornika skrzynkowego z kołeczkami.

Niekiedy stosowany jest układ mostku Wheatstone'a, w którym opory r_1 i r_2 zastąpione są przez drut dokładnie jednostajnej grubości, zrobiony z materjału jednolitego o znacznym oporze właściwym, po którym przesuwa się kontakt połączony z galwanometrem.

Układ połączeń w tym przypadku wskazany jest na rysunku 399. Opór R dobiera się możliwie zbliżony do x, ostatecznie zaś sprowadze-



Rys. 398.



Rys. 399.

nie prądu w galwanometrze do zera odbywa się za pomocą ustawienia w odpowiednim miejscu kontaktu na drucie.

Wzór do obliczania oporu X będzie w tym przypadku ten sam, co i poprzednio, z tą tylko różnicą, że teraz stosunek oporów r_2 do r_1 może być zastąpiony przez stosunek długości dwuch części drutu pomiędzy ruchomym kontaktem i zaciskami a i b.

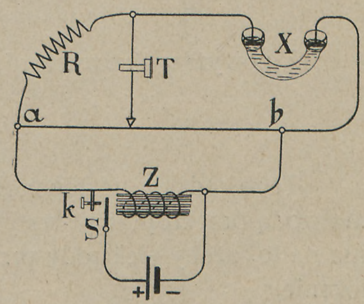
Układ mostku Wheatstone'a stosuje się też czasem do mierzenia temperatury. Wtedy jeden z czterech oporów stanowi drut o dużym spółczynniku cieplnym oporu. Drut ten umieszcza się w tym miejscu, gdzie ma być mierzona temperatura. Z położenia kontaktu na drucie ab, gdy prąd w galwanometrze równa się zeru, można sądzić o oporze drutu, a więc i o wysokości badanej temperatury. Można również nie przesuwać kontaktu, lecz obserwować tylko odchylenia galwanometru.

Gdy chodzi o wyznaczenie oporu przewodników, podlegających elektrolizie, do zasilania obwodów mostku Wheatstone'a nie można stosować prądu stałego, wiadomo bowiem, że przy elektrolizie powstaje siła elektromotoryczna polaryzacji i wzory poprzednio wyprowadzone tracą swą wartość.

Można jednak, zachowując układ ogólny mostku Wheatstone'a, zastąpić baterję jakimkolwiek źródłem prądu, wytwarzającym siłę elektromotoryczną o kierunku zmiennym, galwanometr zaś zwyczajny ze stałemi magnesami zastąpić czułym elektrodynamometrem lub słuchawką telefoniczną.

Jako źródło prądu zmiennego najczęściej stosowaną bywa mała cewka indukcyjna z przerywaczem sprężynkowym, połączona z obwodem mostku, jak na rys. 400.

Przy zetknięciu sprężynki S ze śrubką k prąd płynie w mostku od a do b, a jednocześnie także przez zwojnicę Z. Rdzeń żelazny tej zwojnicy magnesuje się i przyciąga sprężynkę stalową S, połączenie ze śrubką k przerywa się, i w zwojnicy Z powstaje znaczna siła elektromotoryczna samoindukcji, skierowana na prawo; ta siła elektromotoryczna wywołuje prąd w kierunku od b do a.



Rys. 400.

Słuchawka telefoniczna T ma zwojnice nawinięte na rdzeniach z miękkiego żelaza, przytwierdzonych do biegunów magnesu stalowego. Nad zwojnicami umieszczona jest cienka blaszka żelazna, okrągła, umocowana na obwodzie. Gdy w zwojnicach płynie prąd zmienny, pod wpływem zmiennej siły przyciągania, blaszka drży i wydaje dźwięk.

Dobrze zbudowane słuchawki telefoniczne stanowią przyrządy równie czułe, jak galwanometry.

Kiedy wartość oporów w układzie, wskazanym na rys. 400, czyni zadość wzorowi (c) na str. 373, wyprowadzonemu dla prądu stałego, a samoindukcja w obwodzie mostku jest znikomo mała, to w telefonie nie słychać żadnego dźwięku. Jeżeli zaś, z powodu niezrównoważonej samoindukcji obwodu i pewnej polaryzacji elektrod, nie można osiągnąć zupełnego zaniku tego dźwięku, to wyznacza się położenie kontaktu ruchomego na drucie, odpowiadające dźwiękowi naj-

słabszemu. Położenie to można znaleźć najdokładniej, biorąc średnią z dwuch ustawień kontaktu na jednakowe natężenie dźwięku po obu stronach powyższego położenia.

Przewodnictwo właściwe elektrolitów łatwo da się wyznaczyć, jeżeli posiadamy naczynie o wymiarach dokładnie określonych. W praktyce stosowane są jednak najczęściej naczynia kształtu, wskazanego na rys. 400. [1]) Wtedy należy wykonać dwa pomiary oporu. Przedewszystkiem wymierza się opór roztworu soli kuchennej, której przewodnictwo właściwe dokładnie jest znane. Przy różnych temperaturach przewodnictwo właściwe roztworu nasyconego soli kuchennej na 1 *cm* długości i 1 cm^2 przekroju wynosi:

przy 15^0 — 0,2015
„ 16^0 — 0,2063
„ 17^0 — 0,2112
„ 18^0 — 0,2161
„ 19^0 — 0,2210
„ 20^0 — 0,2260.

Oznaczmy przewodnictwo właściwe roztworu soli kuchennej przez γ, opór tego roztworu w powyższym naczyniu przez r, a spółczynnik zależny od wymiarów naczynia przez a, wtedy możemy napisać:

$$r = \frac{a}{\gamma}.$$

Następnie zaś wymierzyć należy **w tym samym naczyniu** opór innego elektrolitu o przewodnictwie γ_x. Oznaczmy ten opór przez r_x; w takim razie będzie:

$$r_x = \frac{a}{\gamma_x}.$$

Z powyższych dwuch równań otrzymamy:

$$\gamma_x = \gamma \cdot \frac{r}{r_x}.$$

Tego rodzaju postępowanie wymaga oczywiście dokładnego wymycia naczynia wodą przekroploną (dystylowaną) przed nalaniem nowego elektrolitu i zważania na to, ażeby elektrody przy obu pomiarach zachowały dokładnie to samo położenie.

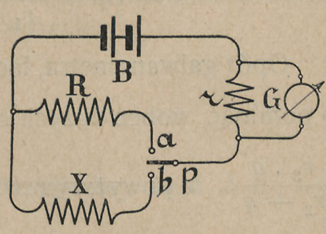
4. Mierzenie oporów wielkich. Opory wielkie (zwykle powyżej stu tysięcy omów) najdogodniej mierzyć przez porównanie bezpośrednie z oporem wiadomym, przepuszczając prąd z tego samego źródła, raz przez opór wiadomy i drugi raz przez opór niewiadomy. [2]) Odpowiedni układ połączeń wskazany jest na rys. 401, gdzie B — źródło prądu stałego, R — wielki opór wiadomy (np. 100 000 Ω),

---

[1]) Elektrody w tych naczyniach stosowane są platynowe, pokryte czernią platynową. Takie elektrody zapewniają małą gęstość prądu na ich powierzchni i przez to zabezpieczają od polaryzacji.

[2]) Inny sposób, bardziej złożony, stosowany do mierzenia oporów bardzo wielkich, czytelnik znajdzie w książce Kazimierza Drewnowskiego: „Pomiary elektrotechniczne", Lwów r. 1914.

X — opór niewiadomy, r — bocznik do galwanometru G. Jeżeli przełącznik p znajduje się na kontakcie a, to w obwód włączony jest opór R; przy przesunięciu zaś przełącznika na kontakt b, włącza się opór niewiadomy X. Oznaczmy siłę elektomotoryczną źródła prądu przez E, opór galwanometru przez g, a wartości oporów bocznika, stosownie do tego, czy w obwodzie włączony jest opór wiadomy, czy też niewiadomy, przez r_1 i r_2. Opory boczników dobiera się w taki sposób, ażeby otrzymać w obu przypadkach odchylenia galwanometru możliwie zbliżone do siebie, niezbyt wielkie i niezbyt małe.



Rys. 401.

Prądy w części nierozgałęzionej obwodu oznaczymy przez J_1 i J_2, w galwanometrze zaś przez i_1 i i_2, a to odpowiednio do tego, jaki opór jest włączony: wiadomy, czy niewiadomy.

Pomijając opór wewnętrzny źródła prądu i opór przewodników łączących, jako bardzo małe w porównaniu do innych oporów, możemy na zasadzie prawa Ohma ułożyć równania:

$$J_1 = \frac{E}{R + \frac{r_1 \cdot g}{r_1 + g}},$$

$$J_2 = \frac{E}{X + \frac{r_2 \cdot g}{r_2 + g}}.$$

Na podstawie zaś znanych praw rozgałęzienia prądów:

$$J_1 = i_1 \cdot \frac{r_1 + g}{r_1},$$

$$J_2 = i_2 \cdot \frac{r_2 + g}{r_2}.$$

Załóżmy teraz, że prądy i_1 i i_2 wywołują w galwanometrze odchylenia α_1 i α_2 proporcjonalne do siły prądów. Oznaczając stałą galwanometru przez C, mamy:

$$i_1 = C \cdot \alpha_1,$$

$$i_2 = C \cdot \alpha_2.$$

Z powyższych sześciu równań wynika, że:

$$C \cdot \alpha_1 = \frac{r_1}{r_1 + g} \cdot \frac{E}{R + \frac{r_1 \cdot g}{r_1 + g}},$$

$$C \cdot \alpha_2 = \frac{r_2}{r_2 + g} \cdot \frac{E}{X + \frac{r_2 \cdot g}{r_2 + g}}.$$

Dzieląc zaś jedno równanie przez drugie, otrzymamy:

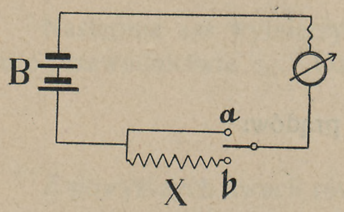
$$X = \left(R + \frac{r_1 \cdot g}{r_1 + g}\right) \cdot \frac{\alpha_1 \cdot (r_1 + g) \cdot r_2}{\alpha_2 \cdot (r_2 + g) \cdot r_1} - \frac{r_2 \cdot g}{r_2 + g}.$$

Opór galwanometru, łącznie z włączonym równolegle bocznikiem, można często pominąć wobec dużych oporów R i X, wtedy, opuszczając wyrazy $\frac{r_1 \cdot g}{r_1 + r}$ i $\frac{r_2 \cdot g}{r_2 + g}$, w powyższym wzorze otrzymamy:

$$X = R \cdot \frac{\alpha_1 \cdot (r_1 + g) \cdot r_2}{\alpha_2 \cdot (r_2 + g) \cdot r_1}.$$

W praktyce elektrotechnicznej podany wyżej sposób wyznaczania oporów stosuje się głównie do mierzenia oporu izolatorów i wogóle izolacji. Wtedy posługujemy się zwykle zamiast galwanometrów — woltomierzami albo amperomierzami.

Przyrząd włącza się w obwód tak, jak wskazano na rys. 402; w razie potrzeby w obwód wprowadza się jeszcze opór dodatkowy. Ustawiając przełącznik na kontakcie a, łączymy przyrząd pomiarowy wprost ze źródłem prądu, przesuwając zaś przełącznik na kontakt b, wprowadzamy w obwód niewiadomy opór X.



Rys. 402.

Oznaczmy opór przyrządu pomiarowego, łącznie z oporem dodatkowym, przez R, siłę elektromotoryczną źródła prądu przez E, a siły prądu, przy położeniach przełącznika na kontaktach a i b, odpowiednio przez i_1 i i_2. Wtedy otrzymamy: [1])

$$i_1 = \frac{E}{R},$$

$$i_2 = \frac{E}{R + X}.$$

W amperomierzach i w woltomierzach odchylenia wskazówek, odczytane na skali, są proporcjonalne do prądów, przepływających przez przyrządy pomiarowe, wprowadzając przeto zamiast prądów odchylenia wskazówki przyrządu pomiarowego α_1 i α_2, znajdziemy:

$$C \cdot \alpha_1 = \frac{E}{R},$$

$$C \cdot \alpha_2 = \frac{E}{R + X}$$

Z tych równań wyznaczamy X:

$$X = R \cdot \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - 1\right) \quad \text{(a)}$$

---

[1] Opór źródła prądu i przewodników, łączących poszczególne części obwodu pomiędzy sobą, najczęściej pomijamy, jako bardzo małe w porównaniu do innych oporów.

Chcąc otrzymać wyniki pomiaru jaknajdokładniejsze, trzeba stosować przyrządy pomiarowe różne dla różnych oporów niewiadomych. Przedewszystkiem należy oczywiście starać się o to, aby odchylenie α_1 było jaknajwiększe, a odchylenie α_2 odpowiadało zasadzie, że błąd względny [1]) w wyrazie:

$$\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - 1\right)$$

powinien być jaknajmniejszy.

Załóżmy, że przy odczytywaniu wskazania α_2 popełniamy błąd $\Delta\alpha_2$, wtedy błąd względny w wyrazie powyższym będzie:

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2^{-2} \cdot \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - 1\right)^{-1} \cdot \Delta\alpha_2 .$$

Wartość tego wyrazu będzie minimum przy takiej wartości α_2, przy której pochodna spółczynnika przed $\Delta\alpha_2$ według α_2 będzie równa zeru.

Przekształcając powyższy czynnik, otrzymamy:

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2^{-2} \cdot \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2} - 1\right)^{-1} = \frac{\alpha_1 \cdot \alpha_2}{\alpha_2^2 \cdot (\alpha_1 - \alpha_2)} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2 \cdot (\alpha_1 - \alpha_2)} .$$

Pochodna zaś tego czynnika będzie:

$$\frac{d}{d\alpha_2}\left[\frac{\alpha_1}{\alpha_2 \cdot (\alpha_1 - \alpha_2)}\right] = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2^2 \cdot (\alpha_1 - \alpha_2)^2} \cdot \frac{d}{d\alpha_2}\left[\alpha_2 \cdot (\alpha_1 - \alpha_2)\right] =$$

$$= \frac{\alpha_1}{\alpha_2^2 \cdot (\alpha_1 - \alpha_2)^2} \cdot \left(2\alpha_2 - \alpha_1\right).$$

Wyraz ten będzie równać się zeru, jeżeli:

$$2\alpha_2 = \alpha_1,$$

czyli:

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} \cdot \alpha_1 .$$

Podstawiając wartość α_2 we wzór (a), otrzymamy:

$$X = R .$$

Z tego rozumowania wynika, że najdokładniej zmierzymy opór niewiadomy, gdy do pomiaru zastosujemy przyrząd, którego opór, łącznie z oporem dodatkowym, równa się oporowi niewiadomemu.

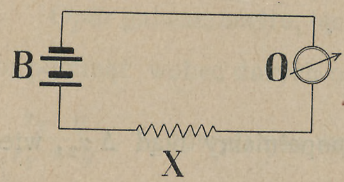
Można podany powyżej sposób stosować również do pomiaru oporów średnich, należy jednak w tym razie używać amperomierzy z oporami dodatkowemi, gdy zaś mamy mierzyć opory duże, odpowiedniejsze są woltomierze, których opór zazwyczaj jest znacznie większy od oporu amperomierzy.

5. Omomierze. Przyrządy pomiarowe, posiadające skalę z podziałką na omy, nazywamy omomierzami. Są dwie różne zasady ustroju omomierzy.

---

[1]) Patrz rozdział XXXIX, § 1. Błąd względny pewnej wielkości wyraża się stosunkiem różniczki tej wielkości do niej samej.

Według jednej z tych zasad omomierze mają taki sam ustrój, jak woltomierze. Załóżmy, że przyrząd z podziałkami na wolty połączyliśmy bezpośrednio z odpowiednim źródłem prądu [1]) i otrzymaliśmy w tych warunkach odchylenie α_1; wprowadzając następnie w powyższy obwód opór niewiadomy X (rys. 403), otrzymujemy odchylenie mniejsze α_2, wtedy X, jak wiemy z poprzednich rozumowań, wyraża się wzorem (a), str. 378, albo inaczej:



Rys. 403.

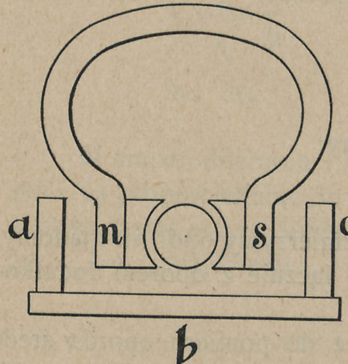
$$X = \alpha_1 \,.\, R \,.\, \frac{1}{\alpha_2} - R \,.\;.\;.\;.\;. \quad \text{(b)}$$

Przy różnych oporach X otrzymywać będziemy różne odchylenia α_2, inne zaś wielkości w tym wzorze są stałe, przeto na skali przyrządu obok działek i liczb, oznaczających wolty, możemy podać działki i liczby, wyrażające omy.

Mając takie podziałki, wystarcza włączyć omomierz w obwód według rys. 403, aby móc odczytać na skali wartość oporu X.

Należy jednak pamiętać, że wartość podziałek na omomierzu obliczona jest dla pewnej wartości α_1, a więc dla określonej siły elektromotorycznej źródła prądu. Zawsze przeto przy mierzeniu oporów omomierzem należy posługiwać się źródłem prądu z taką siłą elektromotoryczną, do której przystosowana jest podziałka omomierza.

Niektóre omomierze mają urządzenie, które umożliwia posługiwanie się źródłami prądu z rozmaitemi siłami elektromotorycznemi, różniącemi się jednak od siebie nie więcej jak o kilka procent. Tego rodzaju omomierze, urządzone według Deprez d'Arsonvala [2]), mają bocznik magnetyczny (rys. 404). Trzy płytki żelazne a, b, a, umieszczone w pobliżu biegunów magnesu, tworzą obwód magnetyczny, równoległy do obwodu, przechodzącego przez szczeliny powietrzne, gdzie znajduje się ruchoma zwojnica przyrządu, nie pokazana na rysunku. Płytki a, a są ruchome; przysuwając je do biegunów magnesu, skierowujemy większą część strumienia magnetycznego wzdłuż obwodu aba i przez to osłabiamy pole magnetyczne w szczelinach powietrznych.



Rys. 404.

W omomierzach posługujemy się bocznikiem magnetycznym w sposób następujący. Łączymy omomierz bezpośrednio ze źródłem prądu i przesuwamy za pomocą odpowiedniej śruby płytki a, a w ten sposób, żeby wskazówka omomierza zatrzymała się na działce, oznaczonej liczbą 0 omów i następnie

[1]) t. j. według układu połączeń (rys. 402), przy położeniu przełącznika na kontakcie a.
[2]) Patrz rozdział XXIX, § 2 i 4.

wprowadzamy w obwód niewiadomy opór X, wtedy wskazówka stanie na działce, odpowiadadającej wartości oporu X.

W ten sposób, niezależnie od wielkości siły elektromotorycznej źródła prądu, we wzorze (b), str. 380, zawsze otrzymujemy tę samą wartość dla odchylenia α_1. Gdy siła prądu w przyrządzie jest zbyt duża, natężenie pola magnetycznego osłabiamy; gdy zaś jest zbyt mała, natężenie pola zwiększamy i zawsze doprowadzamy moment obrotowy elektromagnetyczny do tej samej wartości. [1])

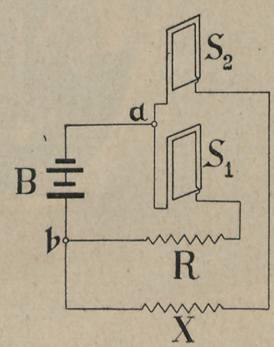
Najdokładniej odczytamy wielkość oporu na omomierzu przy $\alpha_2 = \frac{\alpha_1}{2}$, jak to wynika z rozważań, przeprowadzonych w paragrafie poprzednim. Z tego powodu dla mierzenia oporów, różniących się pomiędzy sobą znacznie co do wielkości, stosować należy omomierze odpowiednie o różnych oporach R.

W celu uniezależnienia wskazań omomierza od siły elektromotorycznej źródła prądu, obmyślono przyrządy, oparte na zasadzie nieco odmiennej.

Prąd ze źródła B (rys. 405) rozgałęzia się na dwa obwody: jeden z nich stanowią zwojnica S_1 i opór R, umieszczony wewnątrz przyrządu, a drugi — zwojnica S_2 i opór niewiadomy X zewnątrz przyrządu.

Jeżeli prądy w poszczególnych obwodach oznaczymy przez i_1 i i_2, opór zwojnic przez r' i r'', a napięcie pomiędzy punktami a i b przez e, to wypadnie:

$$\left.\begin{aligned} i_1 &= \frac{e}{R + r'}, \quad \ldots\ldots\ldots \\ i_2 &= \frac{e}{X + r''} \quad \ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right\} \text{(a)}$$



Rys. 405.

Zwojnice S_1 i S_2 są ze sobą złączone pod kątem prostym i zaopatrzone u góry i u dołu w czopy, opierające się w odpowiednich łożyskach (rys. 406 i 407).

Zwojnice te obracają się w polu magnetycznym pomiędzy biegunami stałego magnesu stalowego, którego nasadki biegunowe są **płaskie**; w środku zwojnic znajdują się nieruchome walce żelazne.

Pole magnetyczne pomiędzy biegunami magnesu jest niejednostajne. Największe natężenie pola otrzymuje się w pobliżu środka nasadek biegunowych, gdzie szczelina powietrza jest najwęższa, a więc opór magnetyczny najmniejszy.

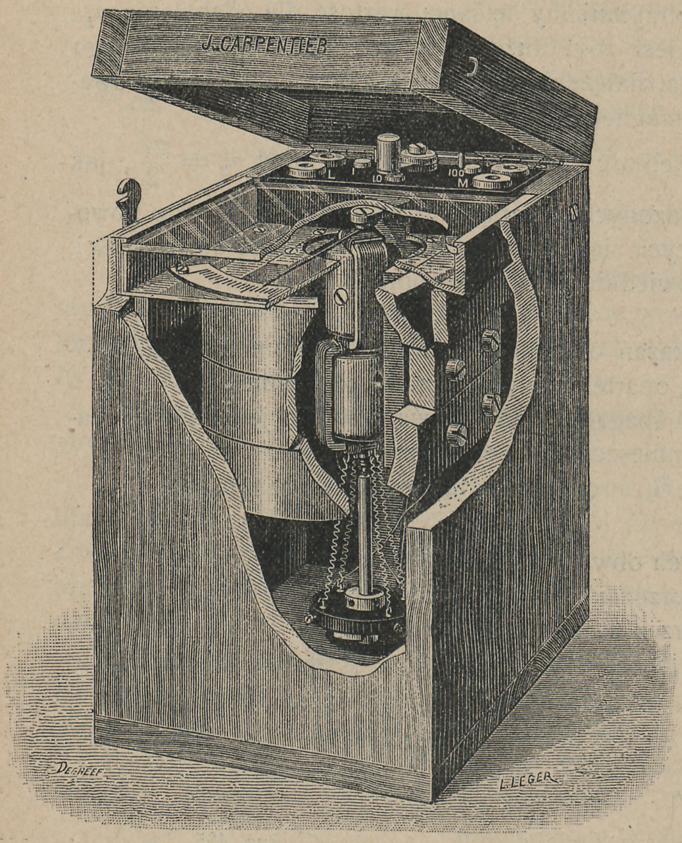
Momenty obrotowe, działające na zwojnice S_1 i S_2, oznaczmy przez M_1 i M_2. Przez H_1 i H_2 oznaczmy natężenia pola w tych miejscach, gdzie znajdują się odpowiednie zwojnice, a przez A_1 i A_2 — czynniki, zależne od położenia zwojnic względem linji pola i od ustroju zwojnic. Mamy wtedy zależności następujące:

$$M_1 = A_1 \, . \, H_1 \, . \, i_1 ,$$
$$M_2 = A_2 \, . \, H_2 \, . \, i_2 .$$

---

[1]) Patrz wzór na str. 308.

Prąd doprowadzamy do zwojnic za pomocą giętkich spiralek srebrnych (rysunek 406), które wywierają na zwojnice moment obrotowy znikomo mały, położenie więc równowagi zespołu zwojnic ruchomych zależeć będzie tylko od momentów M_1 i M_2. Stosując odpowiednie kierunki prądów w zwojnicach, łatwo osiągnąć odwrotne działanie momentów M_1 i M_2. Gdy moment M_1 obraca zwojnice naprawo, to moment M_2 nalewo:



Rys. 406.

Równowaga nastąpi przy:

$$M_1 = M_2,$$

czyli:

$$A_1 \,.\, H_1 \,.\, i_1 = A_2 \,.\, H_2 \,.\, i_2,$$

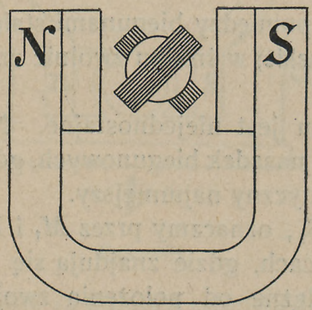
stąd:

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{A_2 \,.\, H_2}{A_1 \,.\, H_1}.$$

Na podstawie wzorów (a) (str. 381) zastępujemy stosunek prądów stosunkiem oporów, wtedy wypadnie:

$$\frac{X + r''}{R + r'} = \frac{A_2 \,.\, H_2}{A_1 \,.\, H_1}.$$

Wartość stosunku $\frac{A_2 \,.\, H_2}{A_1 \,.\, H_1}$ zależy oczywiście od położenia zwojnic w polu magnetycznym, możemy przeto wprowadzić oznaczenie:



Rys. 407.

$$\frac{A_2 \,.\, H_2}{A_1 \,.\, H_1} = f(\alpha),$$

gdzie $f(\alpha)$ wyraża funkcję kąta α, za pomocą którego będziemy oznaczali położenie zwojnic, licząc od pewnego położenia, dowolnie przyjętego za zerowe, wtedy:

$$\frac{X + r''}{R + r'} = f(\alpha),$$

a stąd:

$$X = (R + r') \,.\, f(\alpha) - r''.$$

Wzór ten wskazuje, że różne wartości wielkości X odpowiadają różnym kątom α, t. j. różnym położeniom zwojnic.

Wprowadzając do obwodu (rys, 405) różne znane opory X, na skali, po której przesuwa się wskazówka, przymocowana do zwojnic (rys. 406), możemy oznaczyć podziałki z liczbami, wyrażającemi odpowiednie opory w omach.

Jeżeli:

$$r' = r'' \text{ i } X = R,$$

to:

$$i_1 = i_2.$$

Zwojnice zajmą w tym razie położenie, wskazane na rys. 407. Gdy będzie:

$$X > R,$$

zwojnice przekręcą się o pewien kąt w jedną stronę, a gdy będzie:

$$X < R,$$

to w stronę przeciwną.

Zastanawiając się nad skalą takiego przyrządu, łatwo spostrzedz, że przy zmianie oporu $X + r''$ od 0 do ∞, wskazówka zakreśli kąt 90° [1]). W tych warunkach równe odległości pomiędzy kreskami skali nie mogą odpowiadać wzrostowi oporu o równe wartości. Przyglądając się skali jednego z takich przyrządów, spostrzegamy np., że w pobliżu działki, odpowiadającej 100 Ω, na każde 2 *mm* przesunięcia wskazówki przypada około 30 Ω, w pobliżu działki 1000 Ω, na 2 *mm* przesunięcia wskazówki przypada około 100 Ω, a w pobliżu działki 10000 Ω, na 2 *mm* przesunięcia wskazówki przypada około 2000 Ω. Działka 1000 Ω odpowiada tu położeniu zwojnic, wskazanemu na rys. 407. Procentowo wartość 2 *mm* na skali stanowi:

$$\text{w pierwszym przypadku} \quad \frac{30}{100} \cdot 100 = 30\%$$

$$\text{w drugim} \quad " \quad \frac{100}{1000} \cdot 100 = 10\%$$

$$\text{w trzecim} \quad " \quad \frac{2000}{10000} \cdot 100 = 20\%.$$

Z tego zestawienia wynika, że najdokładniej odczytamy opór, którego wartość jest w danym przykładzie blizka 1000 Ω, wogóle zaś opór taki, przy którym wskazówka zatrzymuje się w pobliżu środka skali.

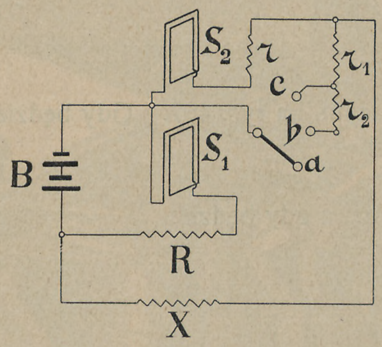
Dla osiągnięcia dość dokładnych wyników przy pomiarach oporów różnej wielkości, stosuje się układ, wskazany na rys. 408. W obwód zwojnicy S_2 włączony jest dodatkowy opór r, a dwa boczniki r_1 i $r_1 + r_2$ mogą być wprowadzone do obwodu za pomocą przełącznika. [2]) Jeżeli przełącznik ustawimy na kontakcie a, to cały prąd i_2 popłynie przez zwojnicę S_2, gdy zaś postawimy go na kontakcie b lub c, to do zwojnic popłynie tylko część prądu i_2.

---

[1]) Wystarcza w tym celu zastanowić się nad wielkością momentów obrotowych, działających na zwojnice przy ich różnym położeniu w polu magnetycznym (rys. 407).

[2]) Przełącznik widzimy na rys. 406, w głębi pod pokrywką.

Jeżeli pewnej wartości niewiadomego oporu X odpowiada pewne położenie zwojnic, przy przełączniku, ustawionym na kontakcie a, to opory r, r_1 i r_2 dobieramy w ten sposób, aby przy przełączniku, ustawionym na kontaktach b i c otrzymać to samo położenie zwojnic przy oporze niewiadomym dziesięc razy i sto razy mniejszym.



Rys. 408.

Z powyższych rozważań łatwo wywnioskować, że wskazania omomierza z dwoma zwojnicami nie zależą zupełnie od wielkości siły elektromotorycznej źródła prądu. Ta siła elektromotoryczna nie powinna być jednak zbyt mała, gdyż wówczas momenty obracające nie byłyby w stanie utrzymać układu zwojnic we właściwym położeniu równowagi. Nie można również stosować siły elektromotorycznej zbyt wielkiej, bo silne prądy mogłyby uszkodzić zwojnice.

Do omomierzy powyższego ustroju najczęściej stosują się, jako źródła prądu małe, prądnice stałego prądu z magnesami stalowemi, zwane induktorami, które przy niezbyt szybkim obrocie rączki dają siłę elektromotoryczną, wynoszącą około 120 V.

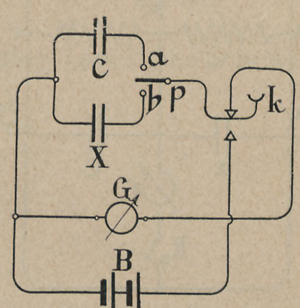
ROZDZIAŁ XXXVI.

Mierzenie pojemności.

1. Wyznaczenie pojemności przez porównanie odchyleń galwanometru.

Sposób mierzenia pojemności najczęściej w praktyce stosowany polega na porównaniu pojemności niewiadomej z wiadomą, przez ładowanie kondensatorów z jednego i tego samego źródła prądu i porównywanie wielkości zbierających się na kondensatorach ładunków.

Odpowiedni układ połączeń wskazany jest na rys. 409:



Rys. 409.

C — pojemność wiadoma,

X — pojemność niewiadoma,

B — źródło prądu o napięciu stałym,

G — galwanometr balistyczny, który tym się różni od zwykłego, że masa jego części ruchomych jest dość znaczna. Jeżeli przez galwanometr balistyczny przepuszczamy prądy chwilowe, to zaczyna on odchylać się wyraźnie dopiero wtedy, gdy prąd już ustał, i ruchoma część galwanometru obraca się dalej skutkiem bezwładności. Ruch ten hamują trzy siły: sprężystość zawieszenia, spółdziałanie powstających pod wpływem ruchu prądów indukcyjnych z polem magnetycznym galwanometru, i wreszcie opór powietrza.

W tych warunkach pierwsze odchylenie galwanometru jest proporcjonalne do tej ilości elektryczności, która przepłynęła w ciągu bardzo krótkiego czasu istnienia prądu chwilowego. [1])

Dla porównania pojemności kondensatorów C i X, ustawiamy przełącznik p najpierw na kontakt a; za pomocą przycisku k przez połączenie z baterją B ładujemy kondensator C i wyładowujemy go następnie przez galwanometr. Potem, posunąwszy przełącznik p na kontakt b, powtarzamy to samo z kondensatorem o pojemności X.

Oznaczmy siłę elektromotoryczną baterji przez E, odchylenia chwilowe galwanometru przez α_1 i α_2, stałą galwanometru przez K, wtedy możemy ułożyć równania:

$$C \,.\, E = K\alpha_1,$$
$$X \,.\, E = K\alpha_2,$$

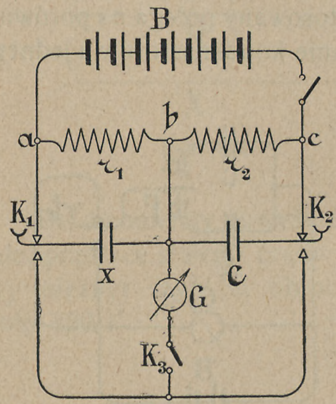
[1]) Szczegóły, dotyczące teorji galwanometru balistycznego, czytelnik znajdzie w przytoczonej powyżej książce p. Kazimierza Drewnowskiego.

skąd:

$$X = C \cdot \frac{\alpha_2}{\alpha_1}.$$

Sposób powyższy jest bardzo prosty, nie odznacza się jednak wielką dokładnością, głównie z powodu histerezy dielektrycznej w izolatorach kondensatorów. Ładunek kondensatorów przy ładowaniu i wyładowaniu zależy też w znacznym stopniu od czasu ładowania i wyładowywania.

2. Sposób zerowy porównywania pojemności. Znacznie dokładniejsze wyniki daje inny sposób porównywania pojemności, podany przez W. Thomsona. Odpowiedni układ połączeń wskazany jest na rys. 410.



Rys 410.

Kondensatory C i X ładuje się do napięć, powstających na końcach oporów r_1 i r_2. Wyładowuje się zaś kondensatory przez naciśnięcie przycisków K_1 i K_2. Niezwłocznie po przyciśnieciu K_1 i K_2, zamyka się wyłącznik K_3 w obwodzie galwanometru. Jeżeli ładunki obu kondensatorów były dokładnie równe, to galwanometr G nie odchyla się; jeżeli natomiast jeden z ładunków jest większy, to galwanometr odchyla się w tę lub w ową stronę. Dobierając odpowiednio stosunek oporów r_1 i r_2, osiągamy brak prądu w galwanometrze.

Oznaczmy ilość elektryczności na okładkach każdego z kondensatorów przez q, napięcie na kondensatorach przez e_{ab} i e_{bc}, pojemności przez X i C, a prąd w oporach r_1 i r_2 przez i. Otrzymamy wówczas wzory następujące:

$$q = X \cdot e_{ab} = C \cdot e_{bc},$$

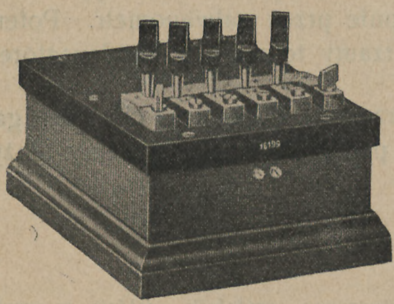
$$e_{ab} = i \cdot r_1, \qquad e_{bc} = i \cdot r_2,$$

skąd:

$$\frac{X}{C} = \frac{e_{bc}}{e_{ab}} = \frac{r_2}{r_1},$$

a więc:

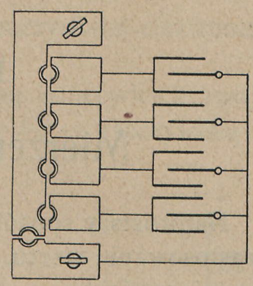
$$X = C \cdot \frac{r_2}{r_1}.$$


Rys. 411.

Zupełnie ścisłe wyniki otrzymuje się przy powyższym postępowaniu wtedy, gdy własności izolatorów obu kondensatorów są jednakowe. Zaznaczyć też należy, że we wszystkich sposobach określania pojemności nader ważne znaczenie ma dobra izolacja jednego przynajmniej bieguna każdego z kondensatorów łącznie z przewodnikami, prowadzącymi prąd od tego bieguna.

Jako wzorce pojemności używane są

zwykle kondensatory skrzynkowe z izolacją mikową. Na pokrywce skrzynki znajduje się szereg płytek mosiężnych, połączonych z okładkami kondensatora. Pomiędzy sobą łączą się one za pomocą kołków. Na rys. 411 mamy widok zewnętrzny, a na rys. 412 — układ połączeń wewnętrznych takiego kondensatora wzorcowego.



Rys. 412.

3. Mierzenie pojemności prądem zmiennym. Pojemność można mierzyć również prądem zmiennym, stosując wzór, wyrażający opór kondensatora przy prądzie zmiennym, mianowicie:

$$\frac{1}{C z \pi}.$$

gdzie C — pojemność, a z — liczba zmian prądu na sekundę.

Mierząc prąd i, przepływający przez kondensator i napięcie e na okładkach, można obliczyć C według prawa Ohma ze wzoru:

$$i = \frac{e}{\frac{1}{C z \pi}},$$

skąd:

$$C = \frac{i}{e \, . \, z \, . \, \pi}.$$

Wyrażając i w amperach, a e w woltach, otrzymamy C w faradach. Jednakże sposób ten oznaczania pojemności stosować należy oględnie, ponieważ wzór powyższy stosuje się ściśle tylko do tego przypadku, gdy prąd, przepływający przez kondensator, zmienia się ściśle według prawa sinusoidy.

Zwykłe źródła prądu zmiennego zawsze wytwarzają siłę elektromotoryczną nieprawidłowo zmienną, którą można zresztą rozłożyć na kilka sił zmiennych sinusoidalnie: jedną główną o okresie największym, równym okresowi prądu całkowitego, i inne, o okresach mniejszych 2, 3, 4... razy i mniejszej amplitudzie. Otóż właśnie, te składowe drugorzędne wytwarzają w kondensatorze dość silne prądy, ponieważ przy znacznej częstości kondensator przeciwstawia tym prądom mniejszy opór, niż prądowi głównemu, powstającemu z głównej siły elektromotorycznej.

Można jednak osłabić wpływ prądów o dużej częstości, włączając w szereg zwojnicę, która takim prądom stawia opór znaczny wskutek samoindukcji; należy jednak przytem zwracać uwagę, ażeby pomiędzy pojemnością i samoindukcją nie było rezonansu [1]) przy jakimkolwiek możliwym w danym razie okresie prądu. Najczęściej obok prądów o głównym okresie, występują wyraźnie prądy, mające okres trzy i pięć razy mniejszy.

[1]) Patrz rozdział XIII § 8.

ROZDZIAŁ XXXVII.

Mierzenie spółczynnika samoindukcji.

Najprostszy sposób wyznaczenia spółczynnika samoindukcji zwojnic polega na zastosowaniu wzoru, wyrażającego opór całkowity zwojnicy dla prądu zmiennego, a mianowicie:

$$\sqrt{r^2 + (z \pi L)^2},$$

gdzie r oznacza opór omiczny zwojnicy,
z — liczbę zmian prądu na sekundę,
L — spółczynnik samoindukcji.

Przez badaną zwojnicę przepuszczamy prąd i pod napięciem e, poczem, oprócz siły i napięcia prądu, mierzymy jeszcze moc prądu W i liczbę zmian prądu na sekundę z.

Według prawa Ohma:

$$i = \frac{e}{\sqrt{r^2 + (z \pi L)^2}},$$

a według prawa Joule'a

$$W = i^2 . r .$$

Z tych dwuch równań otrzymamy:

$$L = \frac{1}{z \pi . i} \sqrt{e^2 - \frac{W^2}{i^2}} .$$

Wyrażając W w watach, e w woltach, i w amperach, otrzymamy L w **henryach.**

Jeżeli nie chodzi o pomiary bardzo dokładne, to można stosować zwykłe źródła prądu zmiennego, nie wytwarzające siły elektromotorycznej ściśle sinusoidalnej, albowiem składowe napięcia o większej liczbie okresów na sekundę wywierają wpływ bardzo mały na wyniki tego pomiaru.

Powyżej wyłuszczony sposób wyznaczania spółczynnika samoindukcji może być stosowany również w tym razie, gdy zwojnica ma rdzeń żelazny — o ile opór obwodu magnetycznego zmienia się w stopniu nieznacznym w danych warunkach magnesowania żelaza. [1])

Moc prądu, zmierzona watomierzem, stanowi w tym przypadku moc, która przetwarza się na ciepło nietylko w drutach zwojnicy, ale i w żelazie. Wyraz $\frac{W}{i^2}$

[1]) Patrz rozdział XXV, § 3.

oznacza wtedy t. zw. **opór omiczny czynny**, nieco większy od rzeczywistego, wyraz zaś:

$$\sqrt{e^2 - \frac{W^2}{i^2}}$$

oznacza pewną siłę elektromotoryczną, nieco mniejszą od rzeczywistej elektromotorycznej siły samoindukcji.

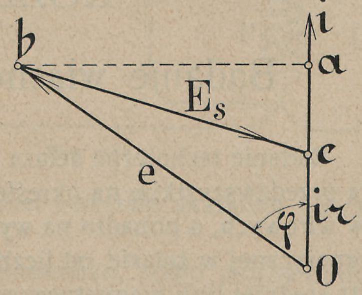
Rys. 413 wyobraża układ wektorów: e — napięcie na końcówkach zwojnicy, i — prąd, $ir = Oc$ — omiczny spadek napięcia, $E_s = bc$ — rzeczywistą siłę elektromotoryczną samoindukcji.

Moc prądu W wyraża się tu wzorem:

$$W = e \,.\, i \,.\, \cos\varphi,$$

przeto:

$$\frac{W}{i} = e \,.\, \cos\varphi.$$



Rys. 413.

Na wykresie $e \,.\, \cos\varphi$ wyraża się długością Oa, wyraz zaś:

$$\sqrt{e^2 - \frac{W^2}{i^2}}$$

długością ab.

Jeżeli więc spółczynnik samoindukcji obliczymy według wzoru:

$$L = \frac{1}{2\pi \,.\, i}\sqrt{e^2 - \frac{W^2}{i^2}},$$

to spółczynnik ten będzie się równał spółczynnikowi samoindukcji pewnej zwojnicy bez żelaza, która ma opór omiczny równy oporowi czynnemu zwojnicy z żelazem.

Jeżeli chodzi o wyznaczenie bardzo małego spółczynnika samoindukcji, to w praktyce porównywa się zwykle taką zwojnicę z inną, mającą wiadomy spółczynnik samoindukcji, przez włączenie obydwuch w układ mostka Wheatstone'a, zasilany naprzemian prądem zmiennym i stałym. [1])

---

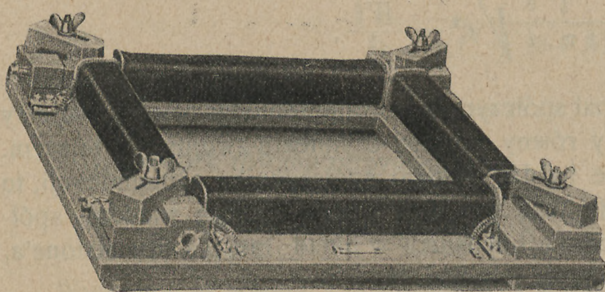
[1]) Szczegóły sposobu takiego porównywania spółczynników samoindukcji znajdzie czytelnik w przytoczonej poprzednio książce p. K. Drewnowskiego.

ROZDZIAŁ XXXVIII.

Badanie własności magnetycznych żelaza.

Badanie techniczne żelaza pod względem jego własności magnetycznych polega przedewszystkim na określeniu strat, ponoszonych skutkiem histerezy i prądów wirowych, a ponadto na wyznaczeniu krzywej, wyrażającej zależność indukcji magnetycznej w żelazie od liczby amperozwojów, przypadających na jeden centymetr średniej linji magnetycznej.

1. **Określenie strat.** W celu określenia strat w żelazie stosuje się obecnie najczęściej przyrząd, zbudowany przez Epsteina (rys. 414), złożony z czterech jednakowych rdzeni żelaznych, utworzonych z pasków blachy żelaznej, wyciętych z dużych arkuszy blachy w połowie wzdłuż kierunku walcowania i w połowie wpoprzek. Długość każdego paska wynosi 500 *mm*, szerokość — 30 *mm*. Wszystkie cztery rdzenie ważą razem 10 *kg*. Ze względu na izolację paski żelazne przełożone są paskami papieru. Na rdzenie nasadza się zwojnice, po 150 zwojów w każdej, i przepuszcza się przez nie prąd zmienny o 50 okresach na sekundę.



Rys. 414.

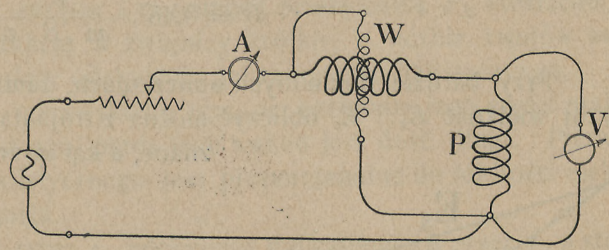
Siłę prądu dobieramy w taki sposób, ażeby w żelazie powstała indukcja magnetyczna o wartości maksymalnej, wynoszącej raz 10000, a drugi raz 15000 gausów.

Za pomocą dokładnego watomierza określamy moc prądu płynącego do zwojnic, amperomierzem mierzymy siłę prądu, a woltomierzem napięcie, w celu kontrolowania gęstości linji magnetycznych. Jednocześnie wyznacza się częstość zmian prądu za pomocą przyrządu, opisanego w rozdziale XXXIII, lub też oblicza się ją według liczby obrotów prądnicy na minutę, dostarczającej prąd zmienny. Jeżeli

prądnica obraca się z prędkością n obrotów na minutę, i liczba biegunów induktora jest p, to liczba zmian prądu na sekundę oblicza się ze wzoru: [1])

$$z = \frac{p \cdot n}{60}.$$

Na rys. 415 wskazany jest układ połączeń przyrządu Epsteina P, z przyrządami pomiarowymi: amperomierzem A, watomierzem W i woltomierzem V. Z lewej strony rysunku wskazana jest prądnica prądu zmiennego, stanowiąca źródło prądu.



Rys. 415.

Wymierzywszy zawczasu opór zwojnic przyrządu P, obliczamy moc prądu, przetwarzającą się na ciepło w zwojnicach. Tę moc odejmujemy od całej mocy, wskazanej przez watomierz; reszta stanowić będzie straty w żelazie, powstałe skutkiem histerezy i prądów wirowych.

Wychodząc ze wskazań, odczytanych na woltomierzu, łatwo można obliczyć gęstość linji magnetycznych w żelazie na podstawie rozumowania następującego: [2])

Napięcie e na końcówkach przyrządu jest prawie równe sile elektromotorycznej samoindukcji, albowiem opór omiczny zwojnic jest niewielki, a kąt φ znaczny. Jeżeli więc nie chodzi o pomiary bardzo dokładne, to można przyjąć, że e równa się E_s, a wtedy według wzorów rozdziału XXV § 3 otrzymamy:

$$\overline{e} = -\overline{E}_s,$$

$$m \cdot N_t = \overline{e} \cdot \frac{T}{2\pi} \cdot \sin \frac{2\pi t}{T},$$

gdzie m oznacza liczbę zwojów wszystkich zwojnic przyrządu (rys. 414), N_t—strumień magnetyczny w żelazie w chwili t. Z tego równania:

$$\overline{N} = \frac{\overline{e}}{m} \cdot \frac{1}{z\pi}.$$

Jeżeli zaś oznaczymy przekrój poprzeczny rdzenia żelaznego przez S, [3]) a maksymalną indukcję magnetyczną w żelazie przez $\overline{B}$, to:

$$\overline{N} = \overline{B} \cdot S,$$

a więc:

$$\overline{B} = \frac{\overline{e}}{m \cdot S} \cdot \frac{1}{z \cdot \pi}.$$

---

[1]) Przy przejściu drutu, w którym wzbudza się prąd indukcyjny, od jednego bieguna do następnego odbywa się zmiana kierunku prądu.

[2]) Uzasadnienie niektórych powołanych tu twierdzeń znajduje się w rozdziale XXV § 3.

[3]) Przekrój określa się podług ciężaru i wymiarów blach. Ciężar właściwy przyjmuje się 7,7 dla żelaza zwykłego i 7,5 dla nakrzemionego.

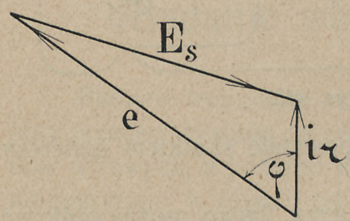
Ponieważ woltomierz wskazuje napięcie czynne w woltach, przeto chcąc otrzymać $\overline{B}$ w jednostkach bezwzględnych, należy wprowadzić wartość czynną napięcia, wyrażoną w jednostkach bezwzględnych:

$$\overline{B} = \frac{e \cdot \sqrt{2} \cdot 10^8}{m \cdot S} \cdot \frac{1}{z \pi},$$

albo:

$$\overline{B} = 0{,}45 \cdot \frac{e}{m \cdot S \cdot z} \cdot 10^8 \cdot {}^{1})$$

Przy bardziej dokładnych obliczeniach, zamiast e, wprowadzić należy w ten wzór wielkość E_s. E_s obliczyć można z trójkąta (rys. 416), w którym e, ir są znane, a kąt φ znajduje się ze wzoru:



Rys. 416.

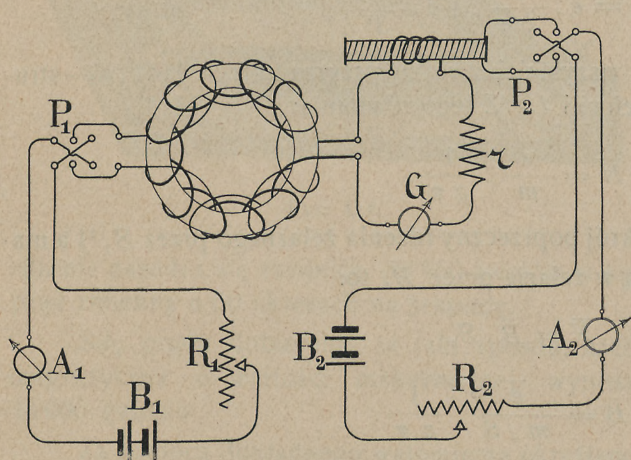
$$\cos \varphi = \frac{W}{e i},$$

gdzie W wyraża moc prądu, wskazaną przez watomierz, a $e i$ — moc pozorną.

Jako wynik omawianych tu pomiarów, otrzymuje się stratę w watach na 1 *kg* żelaza.

W praktyce fabrycznej często stosowane są obecnie sposoby porównawcze. Straty w żelazie nieznanym wyznaczają się przez porównanie ze stratami w żelazie normalnym, uprzednio dokładnie zbadanym.

2. Wyznaczanie krzywej magnetyzmu w żelazie. Krzywa magnetyzmu wyraża zależność indukcji magnetycznej w żelazie od liczby amperozwojów magnesujących, które przypadają na 1 *cm* linji magnetycznej w żelazie. [2]) Najdokładniejszy sposób wyznaczania takiej krzywej opiera się na zastosowaniu galwanometru balistycznego.



Rys. 417.

Żelazo bierzemy w kształcie pierścienia (rys. 417). Pierścień ten owijamy dwoma zwojnicami niezależnemi. Jedną z nich zasilamy prądem z baterji B_1 przez opornik R_1, amperomierz A_1 i przełącznik P_1, za pomocą którego można zmieniać kierunek prądu w tej zwojnicy. Druga zwoj-

[1]) Spółczynnik 0,45 zależy jeszcze od kształtu krzywej napięcia i może różnić się od podanego o parę odsetków.

[2]) Patrz rys. 63 i 64 na str. 64.

nica, znajdująca się na pierścieniu, łączy się przez opór r i zwojnicę pomocniczą z galwanometrem batalistycznym. Wewnątrz zwojnicy pomocniczej znajduje się długa i wązka zwojnica, zasilana prądem z baterji B_2 przez opornik R_2, amperomierz A_2 i przełącznik P_2, za pomocą którego można zmieniać kierunek prądu w tej zwojnicy.

Ażeby wyznaczyć krzywą magnetyzmu w żelazie pierścienia, trzeba przedewszystkiem przewzorcować galwanometr balistyczny. W tym celu puszczamy prąd do zwojnicy długiej, mającej m' zwojów i za pomocą przełącznika P_2 odwracamy kierunek prądu; wtedy przez indukcję w zwojnicy krótkiej o liczbie zwojów m'' powstaje chwilowo prąd, wywołujący odchylenie galwanometru balistycznego.

Galwanometr ten różni się od zwykłego tym, że ruchome jego części mają dość znaczną masę, skutkiem czego okres jego wahań jest dość długi. Pierwsze odchylenie galwanometru balistycznego jest proporcjonalne do tej ilości elektryczności, jaka przezeń przepłynęła.

Oznaczmy prąd w chwili t przez i_t, odchylenie galwanometru przez α, a stałą przez C; otrzymamy wtedy wzór.

$$\int_0^t i_t \,.\, dt = C \,.\, \alpha \qquad \text{(a)}$$

Oznaczmy dalej siłę elektromotoryczną, wywołaną w zwojnicy krótkiej przez E, spółczynnik samoindukcji obwodu przez L, a opór całkowity obwodu, w który jest włączony galwanometr balistyczny przez R; wtedy na zasadzie prawa Ohma:

$$E_t - L \,.\, \frac{di_t}{dt} = i_t \,.\, R.$$

Mnożąc to równanie przez dt i całkując w ciągu czasu t_1, kiedy przebiegał prąd chwilowy, otrzymamy:

$$\int_0^{t_1} E_t \,.\, dt - \int_0^{t_1} L \cdot di_t = R \,.\, \int_0^{t_1} i_t \,.\, dt;$$

czyli, uwzględniając, że $\int_0^{t_1} L \,.\, di_t = o$, ponieważ w chwili o i w chwili t_1 prąd równa się zeru, otrzymamy:

$$\int_0^{t_1} E_t \,.\, dt \,. = R \,.\, \int_0^{t_1} i_t \,.\, dt,$$

albo, ze względu na równanie (a):

$$\int_0^{t_1} E_t \,.\, dt = R \,.\, C \,.\, \alpha \qquad \text{(b)}$$

Oznaczmy teraz strumień magnetyczny, powstający w długiej zwojnicy pod wpływem przebiegającego w niej prądu i_t, przez N_t; wtedy:

$$E_t = - \frac{dN_t}{dt} \,.\, m''$$

$$\int_0^{t_1} E_t \,.\, dt = - [N]_o^{t_1} m''.$$

Prąd indukcyjny w obwodzie galwanometru powstaje skutkiem odwrócenia kierunku prądu, a więc i strumienia magnetycznego w długiej zwojnicy. Oznaczmy strumień magnetyczny w chwili o przez $(+N)$, to w chwili t_1 będzie on $(-N)$, wtedy z poprzedniego równania otrzymamy:

$$\int_0^{t_1} E_t \,.\, dt = 2\,N \,.\, m''.$$

Uwzględniając zaś równanie (b), otrzymamy:

$$2\,N \,.\, m'' = R\,C \,.\, \alpha;$$

skąd:

$$N = \frac{R \,.\, C}{2\,m''} \,.\, \alpha.$$

Albo też, zakładając, że:

$$\frac{R\,C}{2} = K,$$

gdzie K oznacza w danych warunkach stałą, otrzymamy:

$$N = \frac{K}{m''} \,.\, \alpha.$$

Według wzoru, wyprowadzonego na str. 75, strumień indukcji magnetycznej wewnątrz długiej i cienkiej zwojnicy wyraża się wzorem: [1])

$$N = \frac{4\,\pi \,.\, m' \,.\, i}{l} \,.\, s.$$

Mając zaś N i α, obliczymy K z wyrazu:

$$K = \frac{N \,.\, m''}{\alpha}.$$

Znajdując szereg odchyleń α przy różnych N, można sprawdzić, o ile w danych warunkach doświadczenia wielkość K jest stałą.

Mając w ten sposób wywzorcowany galwanometr, puszczamy prąd z baterji B_1 do zwojnicy, nawiniętej na pierścieniu żelaznym, i za pomocą przełącznika P_2 odwracamy kierunek tego prądu, zachowując obwód galwanometru balistycznego bez zmiany. Wtedy w zwojnicy drugiej, nawiniętej na pierścieniu i połączonej z galwanometrem balistycznym, powstanie siła elektromotoryczna indukcji, która wywoła chwilowo prąd w obwodzie galwanometru balistycznego, odchylający go o kąt α'.

Z poprzednich wywodów wypada, że kąt ten będzie proporcjonalny do strumienia magnetycznego w żelazie, który przy odwróceniu kierunku prądu w zwojnicy magnesującej, zmienił swój kierunek. Oznaczmy ten strumień przez N'; wtedy związek pomiędzy strumieniem N' a odchyleniem galwanometru balistycznego wyrazi się wzorem:

$$N' = \frac{K}{m_2} \,.\, \alpha'.$$

---

[1]) Zwojnica nie ma rdzenia żelaznego, więc, w jednostkach bezwzględnych elektromagnetycznych $\mu = 1$.

gdzie K oznacza stałą, otrzymaną z powyższego wzorcowania, a m_2 — liczbę zwojów zwojnicy na pierścieniu żelaznym, połączonej z galwanometrem balistycznym.

Z tego wzoru możemy obliczyć N'. Mając zaś przekrój poprzeczny pierścienia żelaznego S', łatwo też obliczymy indukcję magnetyczną B w żelazie ze wzoru:

$$B = \frac{N'}{S'}.$$

Oznaczając długość średniego obwodu pierścienia przez l', a prąd przez J, otrzymamy liczbę amperozwojów zwojnicy magnesującej, przypadającą na jednostkę długości średniej linji magnetycznej, ze wzoru:

$$\frac{J \cdot m_1}{l'}.$$

Dla uniknięcia większego błędu, z powodu niejednostajnej indukcji w przekroju poprzecznym pierścienia, należy stosować pierścienie o przekroju prostokątnym; bok krótszy przekroju, skierowany wzdłuż średnicy pierścienia, może wynosić najwyżej $\frac{1}{50}$ część tej średnicy. Można także wprowadzać poprawkę na niejednostajny rozkład indukcji magnetycznej przy obliczaniu długości średniej linji indukcji.

Wyznaczenie wielkości B i $\frac{J \cdot m_1}{l'}$ przeprowadza się przy szeregu prądów stopniowo wzrastających, a jako wynik tego badania wykreśla się krzywą, wyrażającą zależność indukcji magnetycznej w żelazie od tej liczby amperozwojów zwojnicy magnesującej, jaka przypada na jeden centymetr średniej linji magnetycznej.

Układ przyrządów, podany na rys. 417, daje także możność wyznaczania całkowitej krzywej histerezy, jeżeli zamiast odwracania kierunku prądu, zmieniać będziemy stopniowo, skokami, siłę prądu magnesującego i przez odchylenie galwanometru balistycznego mierzyć przyrost strumienia magnetycznego.

W praktyce fabrycznej rzadko bywa stosowany sposób badania wyżej podany; najczęściej porównywa się tam tylko żelazo gatunku nieznanego z żelazem znanym. Do takiego porównania uznano obecnie za najwłaściwsze sposoby, oparte na porównywaniu prądów indukcyjnych, wywoływanych za pomocą strumieni magnetycznych, przebiegających przez porównywane ze sobą paczki blach żelaznych.

ROZDZIAŁ XXXIX.

Dokładność pomiarów.

1. **Pojęcia i wzory zasadnicze.** Przy wszelkich pomiarach należy zdawać sobie sprawę z tego, jak wielki jest błąd, który popełniamy przy pomiarze, wykonanie bowiem pomiaru z zupełną dokładnością jest rzeczą niemożliwą.

Należy tu rozważyć pomiary dwojakie: pomiar prosty pewnej wielkości zapomocą jednego przyrządu mierniczego, a następnie pomiar złożony, przy którym wielkość niewiadomą znajduje się przez obliczenie jej z kilku innych wielkości, wyznaczonych przez pomiar prosty.

Rozważmy przedewszystkiem pomiar prosty. Oznaczmy wartość rzeczywistą pewnej wielkości przez A, a wartość, otrzymaną z pomiaru, przez A'; wtedy różnica

$$A - A' = x$$

stanowi **błąd bezwzględny** pomiaru.

Liczba zaś:

$$\frac{x}{A} = y$$

stanowi **błąd względny**. Znaczenie praktyczne ma oczywiście przedewszystkiem błąd względny.

Jeżeli mamy do czynienia z pomiarem złożonym, to wielkość A, stanowiąca przedmiot pomiaru, jest funkcją szeregu innych wielkości, mierzonych bezpośrednio. Oznaczmy te wielkości przez u, v, z i t. d.; wtedy:

$$A = f(u, v, z \ldots).$$

Błąd popełniony przy wyznaczeniu wielkości A wynika z całego szeregu błędów popełnianych przy mierzeniu wielkości u, v, $z \ldots$

Oznaczmy narazie błędy w pomiarze poszczególnych wielkości przez ΔA, Δu, Δv i t. d., wtedy

$$\Delta A = f[(u + \Delta u), (v + \Delta v), (z + \Delta z) \ldots] - f(u, v, z \ldots).$$

Ponieważ błędy dobrych pomiarów są zwykle niewielkie i wynoszą najwyżej setne części odpowiednich wielkości, wyraz ΔA możemy uważać za różniczkę i napisać:

$$dA = \frac{\partial f(u, v, z \ldots)}{\partial u} du + \frac{\partial f(u, v, z \ldots)}{\partial v} dv + \frac{\partial f(u, v, z \ldots)}{\partial z} . dz + \ldots$$ [1]).

---

[1]) $\frac{\partial f(u, v, z \ldots)}{\partial u}$ — oznacza funkcję pochodną od $f(u, v, z \ldots)$ wziętą według zmiennej u przy założeniu, że inne zmienne nie ulegają zmianie.

Błąd względny będzie zatem: $\frac{dA}{A}$.

Załóżmy teraz, że funkcja f ma postać następującą:

$$A = u^m \,.\, v^n \,.\, z^k \ldots\ldots,$$

wtedy:

$$\frac{dA}{A} = \frac{v^n.z^k\ldots.m.u^{m-1}.du + u^m.z^k\ldots.n.v^{n-1}.dv + u^m.v^n\ldots k.z^{k-1}.dz\ldots}{u^m \,.\, v^n \,.\, z^k\ldots},$$

albo:

$$\frac{dA}{A} = m\frac{du}{u} + n\frac{dv}{v} + k\frac{dz}{z} + \ldots.$$

Wzór ten wskazuje, że błąd względny, popełniany przy określaniu wielkości A, równa się w tym przypadku sumie błędów względnych, popełnianych przy mierzeniu wielkości u, v, z..., pomnożonych odpowiednio przez potęgi, w których te wielkości wchodzą w skład funkcji, wyrażającej wielkość A.

Stąd wynika ważna wskazówka praktyczna. Jeżeli np. potęga m jest liczbą całkowitą, to odpowiedni wyraz we wzorze błędu ogólnego będzie m razy większy od samego błędu przy pomiarze wielkości u. Jeżeli natomiast potęga n jest ułamkowa, i równa się np. $\frac{1}{p}$, to odpowiedni wyraz we wzorze błędu ogólnego będzie p razy mniejszy od błędu, popełnionego przy pomiarze wielkości v.

Wobec tego wielkości, wchodzące w skład funkcji w potęgach większych od jednostki, powinny być mierzone z większą dokładnością, niż wielkości, wchodzące w skład fukcji w potęgach jednostkowych lub mniejszych od jednostki, np. pod pierwiastkiem.

Rozważmy jeszcze inny przykład funkcji, mianowicie:

$$A = u + v + z + \ldots.$$

Wtedy:

$$dA = du + dv + dz + \ldots.,$$

a zatem:

$$\frac{dA}{A} = \frac{du + dv + dz + \ldots.}{u + v + z}.$$

W tym przypadku błąd bezwzględny w oznaczeniu wielkości A znajdujemy przez dodawanie błędów bezwzględnych w pomiarach poszczególnych wielkości. Jeżeli znaki błędów są zgóry niewiadome, a więc jeśli błąd może być dodatni lub ujemny, to dla obliczenia **największego możliwego błędu** należy przyjąć dla wszystkich błędów znaki jednakowe.

Dla osiągnięcia jaknajwiększej dokładności przy pomiarach, należy warunki pomiarów tak wybierać, aby błąd względny był jaknajmniejszy.

Poprzednio mieliśmy wzór:

$$dA = \frac{\partial f(u, v, z\ldots)}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial f(u, v, z\ldots)}{\partial v} \cdot dv + \frac{\partial f(u, v, z\ldots)}{\partial z} \cdot dz\ldots$$

skąd błąd względny będzie:

$$\frac{dA}{A} = \frac{\partial f(u, v, z\ldots)}{\partial u} \cdot \frac{du}{f(u, v, z\ldots)} + \frac{\partial f(u, v, z\ldots)}{\partial v} \cdot \frac{dv}{f(u, v, z\ldots)} +$$
$$+ \frac{\partial f(u, v, z\ldots)}{\partial z} \cdot \frac{dz}{f(u, v, z\ldots)} + \ldots.$$

Jeśli $\frac{dA}{A}$ ma być jaknajmniejsze, to i każdy ze składników powinien być jaknajmniejszy, słowem, pomiar należy przeprowadzić w warunkach, gdy funkcje:

$$\frac{1}{f(u, v, z\ldots)} \cdot \frac{\partial f(u, v, z\ldots)}{\partial u}, \quad \frac{1}{f(u, v, z\ldots)} \cdot \frac{\partial f(u, v, z\ldots)}{\partial v}, \quad \frac{1}{f(u, v, z\ldots)} \cdot \frac{\partial f(u, v, z\ldots)}{\partial z} \text{ i t. d.}$$

mają wartość **minimum**. [1]) Jeżeli funkcja nie ma wartości **minimum**, to należy obrać takie warunki pomiarów, aby wartość jej była możliwie małą.

2. Dwa rodzaje błędów. Wśród błędów, popełnianych przy pomiarach, należy odróżniać dwa rodzaje błędów: błędy systematyczne i błędy przypadkowe.

Błędy systematyczne są to takie błędy, które wynikają z jakichkolwiek stałych niedokładności w samym przyrządzie mierniczym, albo też powstają pod działaniem czynników zewnętrznych, wpływających na wskazania przyrządów.

Błędy zaś przypadkowe wynikają głównie z powodu niedoskonałości wzroku, słuchu i uwagi ludzkiej, a nadto także pod działaniem czynników zmiennych, wywołujących niedokładność wskazań przyrządów i zmieniających się w ten sposób, że trudno dostrzedz w tych zmianach jakąkolwiek wyraźną prawidłowość.

Jako przykład tych dwuch rodzajów błędów można przytoczyć błędy, spotykane przy pomiarze siły prądu amperomierzem. Niedokładność we wzorcowaniu przyrządu wywołuje błędy systematyczne, albowiem amperomierz wskazuje stale zbyt mało, lub też zbyt wiele; natomiast błędy, popełniane przez niedokładność spostrzeżenia położenia wskazówki są błędami przypadkowemi i zależnie od okoliczności mogą być dodatnie lub ujemne.

Innego rodzaju błędy systematyczne wyniknąć mogą pod wpływem czynników postronnych. Jeżeli np. mierzyć będziemy prąd stały amperomierzem elektrodynamicznym i nie zwrócimy uwagi na wpływ pola magnetycznego ziemskiego, to przy takim postępowaniu popełniać będziemy również błędy systematyczne.

Dla usunięcia błędów systematycznych, niezbędną jest rzeczą wykryć ich przyczynę. Uskutecznić to można rozmaicie, zależnie od okoliczności. Jeżeli przyczyna tkwi w złym wzorcowaniu przyrządu, to wykryć to łatwo, porównywając ten przyrząd z innym przyrządem, dokładniejszym. Jeżeli natomiast przy pomiarze można się spodziewać wpływów postronnych, to trzeba próbować zmieniać warunki, w jakich odbywa się pomiar.

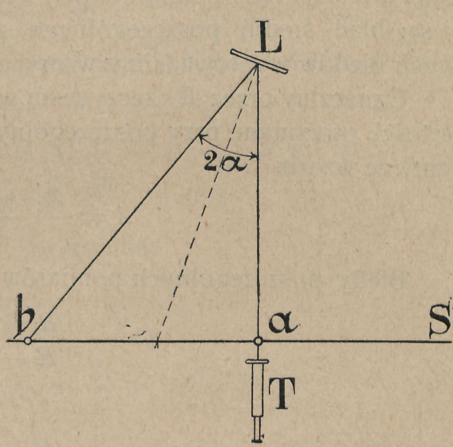
---

[1]) Patrz przykład odnajdywania warunków takiego minimum w rozdziale XXXV, § 4.

Niektórych błędów systematycznych można uniknąć zupełnie, usuwając wpływ czynnika, który je wywołuje. Błąd jednak, wynikający np. z niedokładności wzorcowania przyrządu, może być tylko zmniejszony. Przeprowadzając wzorcowanie jaknajdokładniej, możemy zmniejszyć go do pewnej granicy, lecz nie możemy usunąć go całkowicie.

Błędów przypadkowych usunąć niepodobna. Można je tylko zmniejszyć przez skupienie uwagi i zastosowanie urządzeń pomocniczych dla zwiększenia dokładności wskazań. Przy odczytywaniu wskazań przyrządów wskazówkowych, należy zważać, ażeby kierunek od oka do wskazówki był prostopadły do powierzchni skali; jeżeli zaś pod wskazówką znajduje się lusterko, to przy odczytywaniu położenia wskazówki na skali, wskazówka powinna pokrywać swój obraz w lusterku.

Wogóle przy pomiarach dążyć należy do otrzymania jaknajwiększego odchylenia każdego przyrządu mierniczego, a to dlatego, że błąd względny jest odwrotnie proporcjonalny do wartości bezwzględnej odczytanego wskazania. Wyjątek stanowią tu tylko wskazania, odczytywane na skali prostej, stosowanej przy przyrządach ze zwierciadłem. Na rys. 418 widzimy odpowiedni układ przyrządów, gdzie L oznacza zwierciadło, umocowane na części ruchomej przyrządu mierniczego, S — skalę z podziałkami, T — lunetę.



Rys. 418.

Oznaczając wskazanie na skali ab przez S, odległość osi lusterka od skali przez D i kąt odchylenia lusterka od położenia równoległego do skali przez α, otrzymamy na zasadzie prawa równości kątów padania i odbicia promienia świetlnego:

$$\frac{S}{D} = \text{tang}\, 2\alpha,$$

skąd:

$$S = D \,.\, \text{tang}\, 2\alpha.$$

Wzór ten stwierdza, że wskazanie S nie jest proporcjonalne do α, i że tylko przy niewielkich odchyleniach lusterka można bez popełnienia wielkiego błędu, uważać α za proporcjonalne do S. Dla zdania sobie sprawy, jakie odchylenia czynią zadość powyższemu warunkowi, podaję tu, według Kohlrauscha, krótkie zestawienie liczb, jakie odjąć należy od wskazań odczytanych na skali, ażeby otrzymać wielkości ściśle proporcjonalne do kąta α. Wskazania na skali i odległość D podane są w jednostkach jednakowych:

D \ S	50	100	150	200	250
1000	0,04	0,33	1,11	2,60	5,02
1400	0,02	0,17	0,57	1,34	2,61
1800	0,01	0,10	0,35	0,82	1,59
2400	0,01	0,06	0,19	0,46	0,90

Z tego zestawienia wynika, że przy skali milimetrowej i najczęściej stosowanej odległości lunety od zwierciadła, wynoszącej 1000 *mm*, najodpowiedniejsze odchylenia wynosić powinny około 100 *mm*, wtedy poprawka będzie zaledwie 0,33%. Takie właśnie odchylenia stosowane są najczęściej w praktyce.

Jeżeli zaś zachodzi konieczna potrzeba zastosowania większych odchyleń, to trzeba albo zwiększyć odległość skali i lunety od lusterka, albo też wprowadzić poprawki.

3. Wyrównywanie błędów. Zmniejszenie wpływu błędów przypadkowych na wynik ostateczny może być osiągnięte przez powtórzenie wielokrotne pomiaru. W praktyce przy pomiarach niezbyt dokładnych zwykle powtarzamy pomiar trzy albo pięć razy, przy pomiarach zaś bardzo dokładnych — 10 razy i więcej. Średnia arytmetyczna ze wszystkich wyników takich pomiarów wyraża wartość najprawdopodobniejszą mierzonej wielkości. [1]) O ile warunki wykonania pomiarów pozostają bez zmiany, dokładność pomiaru będzie tym większa, im więcej razy powtórzymy pomiar. Gdy mamy wyniki szeregu pomiarów jednej i tej samej wielkości, to dla oceny wartości tych pomiarów pod względem błędów przypadkowych miarodajnemi są: błąd średni poszczególnego pomiaru i błąd wartości średniej. Dla tych dwuch błędów wyprowadzimy wzory, za pomocą których można je obliczać.

Oznaczmy przez R rzeczywistą wartość mierzonej wielkości przez $A_1, A_2 \ldots A_n$ wartości, otrzymane przy poszczególnych pomiarach, wtedy średnią wartość otrzymamy ze wzoru:

$$A = \frac{A_1 + A_2 + \ldots + A_n}{n} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Błędy poszczególnych pomiarów będą:

$$\begin{aligned} R - A_1 &= x_1, \\ R - A_2 &= x_2, \\ &\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots \\ R - A_n &= x_n. \end{aligned}$$

Średnim błędem poszczególnego pomiaru nazywamy wyraz:

$$s = \pm \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}{n}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

Ponieważ liczb: $x_1, x_2 \ldots x_n$ nie znamy, z tego więc wzoru obliczyć s nie możemy.

Wyprowadzimy wzór inny. Załóżmy:

$$\begin{aligned} A - A_1 &= \alpha_1, \\ A - A_2 &= \alpha_2, \\ &\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots \\ A - A_n &= \alpha_n. \end{aligned}$$

---

[1]) O prawie błędów czytelnik znajdzie wiadomości w książce p. A. B. Danielewicza: „Metoda najmniejszych kwadratów". Tam też przytoczony jest dowód powyższego twierdzenia. Z tego dzieła zaczerpnąłem sposób wyprowadzenia dalej podanych wzorów.

Wtedy, oznaczając dowolne spostrzeżenie znaczkiem λ, otrzymamy:

$$x_\lambda = R - A_\lambda,$$
$$A_\lambda = A - \alpha_\lambda.$$

Z tych dwuch równań wynika, że:

$$x_\lambda = R - A + \alpha_\lambda.$$

Różnica $R - A$ stanowi **błąd średniej wartości**, otrzymanej z rozważanych pomiarów według wzoru (a).

Oznaczmy ten błąd przez S, wtedy:

$$R - A = S.$$
$$x_\lambda = S + \alpha_\lambda. \qquad \text{(c)}$$

Z tego wzoru możemy otrzymać dwa równania w sposób następujący:

Podnosząc obie strony równania (c) do drugiej potegi, otrzymamy:

$$x_\lambda^2 = S^2 + 2S \, . \, \alpha_\lambda + \alpha_\lambda^2.$$

Jeśli n takich równań, napisanych dla poszczególnych spostrzeżeń, dodamy odpowiedniemi stronami, to otrzymamy:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = n \, . \, S^2 + 2S(\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n) +$$
$$+ \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2. \qquad \text{(d)}$$

Z wyrazów dla poszczególnych wielkości α_λ wynika:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = A - A_1 + A - A_2 \ldots + A - A_n,$$

więc:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = n\,A - (A_1 + A_2 + \ldots + A_n).$$

Ze wzoru (a):

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = n \, . \, A,$$

przeto:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 0.$$

Uwzględniając wartość sumy czynników α_λ i używając symbolu Σ dla oznaczenia sumy, otrzymamy z równania (d):

$$\Sigma\, x_\lambda^2 = n \, . \, S^2 + \Sigma\, \alpha_\lambda^2,$$

stąd:

$$\frac{\Sigma\, x_\lambda^2}{n} = S^2 + \frac{\Sigma\, \alpha_\lambda^2}{n}.$$

Według wzoru (b):

$$\frac{\Sigma\, x_\lambda^2}{n} = s^2,$$

przeto:

$$s^2 = S^2 + \frac{\Sigma\, \alpha_\lambda^2}{n} \qquad \text{(e)}$$

Z równania (c) otrzymamy jeszcze równanie inne. Dodajmy odpowiedniemi stronami wszystkie równania (c), napisane dla różnych spostrzeżeń, których liczba jest n, otrzymamy wtedy:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = n \,.\, S + \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n \,.$$

Według poprzednio podanego dowodzenia:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 0 \,,$$

przeto:

$$\Sigma\, x_\lambda = n \,.\, S \,.$$

Podnieśmy teraz obie strony tego równania do drugiej potęgi, wtedy otrzymamy:

$$\Sigma\, x_\lambda^2 + 2\, \Sigma\, x_\mu \,.\, x_\lambda = n^2 \,.\, S^2 \,.$$

W równości tej suma: $\Sigma\, x_\lambda^2$ ma wszystkie składniki niewątpliwie dodatnie, w sumie zaś: $2\, \Sigma\, x_\mu \,.\, x_\lambda$ będą składniki dodatnie i ujemne, ponieważ błędy rzeczywiste bywają dodatnie i ujemne; wobec tego możemy twierdzić, że wyrazy w tej sumie do pewnego stopnia znosić się będą; korzystając z tej okoliczności, przyjmujemy w przybliżeniu, że:

$$\Sigma\, x_\mu \,.\, x_\lambda = 0 \,,$$

wtedy, pozostawiając oznaczenie S dla błędu średniej wartości i mając na względzie, że będzie to teraz wartość przybliżona tego błędu, otrzymamy:

$$\Sigma\, x_\lambda^2 = n^2 \,.\, S^2 \,,$$

albo:

$$\frac{\Sigma\, x_\lambda^2}{n} = n \,.\, S^2 \,.$$

Według wzoru (b):

$$\frac{\Sigma\, x_\lambda^2}{n} = s^2$$

przeto:

$$s^2 = n \,.\, S^2 \,. \qquad \text{(f)}$$

Z dwuch równań: (e) i (f) znajdziemy:

$$S = \pm \sqrt{\frac{\Sigma\, \alpha_\lambda^2}{n\,(n-1)}} \,,$$

$$s = \pm \sqrt{\frac{\Sigma\, \alpha_\lambda^2}{n-1}} \,.$$

Za pomocą tych wyrazów obliczamy s — przybliżony błąd średni każdego pomiaru i S — przybliżony błąd najprawdopodobniejszej wartości wielkości mierzonej. [1])

[1]) Prócz tego odróżniamy jeszcze wartości błędów prawdopodobne. O tych wartościach czytelnik może zasięgnąć wiadomości w książce poprzednio wspomnianej p. Danielewicza.

Rozważmy jeszcze przypadek pomiaru złożonego. Dla wyznaczenia pewnej wielkości A, mierzymy kilka innych, $a_1, a_2 \ldots a_m$. Zależność A od $a_1, a_2 \ldots a_m$ wyraża się, biorąc ogólnie pewną funkcją:

$$A = f(a_1, a_2 \ldots . a_m).$$

Błąd przy wyznaczeniu wielkości A oznaczymy przez x, a przy pomiarze wielkości a_1, a_2 i t. d. przez x_1, x_2 i t. d.

Wtedy według § 1 niniejszego rozdziału:

$$x = \frac{\partial f}{\partial a_1} . x_1 + \frac{\partial f}{\partial a_2} . x_2 + \ldots . + \frac{\partial f}{\partial a_n} . x_n .$$

Po podniesieniu obu stron równania do drugiej potęgi, otrzymamy:

$$x^2 = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial a_\lambda}\right)^2 . x_\lambda^2 + 2 \sum \frac{\partial f}{\partial a_\lambda} . \frac{\partial f}{\partial a_\mu} . x_\lambda . x_\mu .$$

Jeżeli pomiar każdej wielkości a_1, a_2 i t. d. powtarzamy po n razy, to powyższych równań otrzymamy n, a dodając te równania odpowiedniemi stronami i dzieląc przez n, znajdziemy wzór dla kwadratów błędów średnich. Ze względu na pewne prawdopodobieństwo otrzymywania błędów dodatnich i ujemnych, przyjmujemy:

$$\sum 2 \sum \frac{\partial f}{\partial a_\lambda} . \frac{\partial f}{\partial a_\mu} . x_\lambda . x_\mu = 0 .$$

Wtedy:

$$s^2 = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial a_\lambda}\right)^2 . s_\lambda^2 ,$$

a przeto:

$$s = \pm \sqrt{\sum \left(\frac{\partial f}{\partial a_\lambda}\right)^2 . s_\lambda^2} .$$

P r z y k ł a d I. Załóżmy, że mamy funkcję: [1])

$$A = a_1 . a_2 .$$

A, a_1 i a_2 są średniemi wartościami, otrzymanemi z pomiarów, wtedy:

$$\frac{\partial A}{\partial a_1} = a_2 , \quad \frac{\partial A}{\partial a_2} = a_1 ,$$

więc:

$$s = \pm \sqrt{a_2^2 . s_1^2 + a_1^2 . s_2^2} .$$

P r z y k ł a d II. Załóżmy, że mamy funkcję:

$$A = a_1 + a_2 .$$

[1]) a_1, a_2 wyznaczamy za pomocą pomiaru prostego.

A, a_1 i a_2 są średniemi wartościami, otrzymanemi z pomiarów, wtedy:

$$\frac{\partial A}{\partial a_1} = 1, \quad \frac{\partial A}{\partial a_2} = 1,$$

więc:

$$s = \pm \sqrt{s_1^2 + s_2^2}.$$

4. Błąd największy i najmniejszy pomiaru. Gdy uwzględnimy błędy systematyczne i błędy przypadkowe, to suma tych błędów wskaże nam całkowity błąd pomiaru.

Suma arytmetyczna wszystkich błędów systematycznych i największego możliwego błędu przypadkowego, stanowi tak zwany **błąd graniczny**, od którego nie może być większy żaden błąd pomiaru.

Oznaczmy całkowity błąd pomiaru przez X, sumę błędów systematycznych przez x, a błąd przypadkowy wartości średniej przez S, wtedy:

$$X = x + S.$$

Wykonywając pomiar bardzo starannie i powtarzając go wielokrotnie, możemy otrzymać S bardzo małe, zawsze jednak będzie:

$$X > x.$$

Najmniejszy błąd możliwy do osiągnięcia przy pomiarze jest zawsze większy od błędu systematycznego, którego w danych warunkach pomiaru usunąć nie można.

Większa część pomiarów elektrotechnicznych ma tak wielkie błędy systematyczne, że błędy przypadkowe przy starannym wykonaniu pomiaru są znikomo małe; wtedy powtarzanie wielokrotne pomiaru nie daje możności zmniejszenia popełnianego błędu, dlatego też, jak to wspomniałem poprzednio, tylko w wyjątkowych przypadkach warto powtarzać pomiar więcej, niż np. trzy razy.

Rozważmy przykład pomiaru oporu mostkiem Wheatstone'a przy zastosowaniu prostych skrzynek oporowych. Takie skrzynki, jak to podano w § 5, wzorcują się z dokładnością do 0,2%. W tych warunkach doprowadzanie wartości błędów przypadkowych do setnej części procentu nie ma żadnego praktycznego znaczenia.

Pozatym zachodzą często wpływy postronne, które nieraz nie dają się usunąć i wywołują błędy znacznie przewyższające dokładność odczytań badacza. Do takich wpływów przy pomiarze oporu mostkiem Wheatstone'a należą prądy termoelektryczne, wywołujące niespodziewane odchylenia galwanometru i zmniejszające wskutek tego wielokrotnie dokładność pomiarów.

5. Dane liczbowe. Ażeby ułatwić wymiarkowanie, jaką mianowicie dokładność osiągnąć się daje przy pomiarach elektrycznych, przytaczam tu szereg liczb, wyrażających błędy względne, popełniane przy wyznaczaniu różnych wielkości.

Wielkość wzorca oma, sporządzonego z rtęci, znaną jest z dokładnością do 0,02%.

Ilość srebra, wydzielonego przez prąd o sile jednego ampera w ciągu sekundy, znana jest z dokładnością do 0,05%.

Siłę elektromotoryczną ogniwa normalnego Westona wyznaczamy z dokładnością do 0,02%. [1])

Wielkość oporów normalnych z manganinu wyznaczamy z dokładnością od 0,015 do 0,02%.

Wielkość oporów w skrzynkach oporowych dokładnych podaje się zazwyczaj z dokładnością do 0,05%, w skrzynkach zaś prostych z dokładnością do 0,2%.

Kondensatory wyrabiane są z rozmaitą dokładnością. Dokładne kondensatory mikowe o pojemności od 0,5 do 0,001 μF dają się wykonać i wymierzyć z dokładnością od 0,5% do 5%, a to zależnie od pojemności.

Dokładne kondensatory z izolacją papierową wymierzane są z dokładnością do 5%. Kondensatory techniczne papierowe mają zwykle pojemność, określoną z dokładnością do 10%.

Dokładne amperomierze i woltomierze ze skalą zwierciadłową, o ile są w dobrym stanie, dają wskazania z błędem w granicach od 0 do 1%. Skale w tych przyrządach zaopatrzone w zwierciadła, mają takie podziałki, że wskazanie można odczytywać przy małych odchyleniach z dokładnością około 2%, a przy większych odchyleniach — z dokładnością około 0,15%.

Przyrządy pomiarowe techniczne, mianowicie: amperomierze, woltomierze i watomierze, wskazują zwykle z błędem, wynoszącym od jednego do kilku procent. Skale w tych przyrządach mają podziałki zazwyczaj dość duże, a wskazówki z grubemi końcami, skutkiem czego przy małych odchyleniach odczytywanie wskazań możliwe jest z błędem od 2% do 10%, przy znacznych zaś odchyleniach — z błędem od 0,5 do 1%.

Liczniki pracy prądu uważane są za zdatne do użytku, gdy błąd wynosi od $\pm$ 12% do $\pm$ 6,6% przy zmianie siły prądu głównego od 0,1 J do J, gdzie J oznacza prąd normalny, dla którego licznik został zbudowany. [2])

---

[1]) Siła elektromotoryczna ogniwa Westona wyznacza się przez porównanie z napięciem na końcach znanego oporu, prąd przepływający przez ten opór mierzy się za pomocą wyznaczania ilości srebra, wydzielonej z roztworu azotanu srebra w określonym czasie.

[2]) Błędy dopuszczalne w licznikach określają szczegółowe przepisy, wydawane przez zarządy elektrowni i inne instytucje.

UZUPEŁNIENIE.

ROZDZIAŁ XL.

Zasady rachunku wektorowego, w zastosowaniu do rozważania prądów zmiennych.

1. Określenia zasadnicze. Zależność od czasu pewnej wielkości zmiennej w czasie można wyrazić analitycznie i wykreślnie. Jeżeli wielkość ta zmienia się sinusoidalnie, to wyrażenie matematyczne jest następujące:

$$y_t = \overline{y} \,.\, \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \varphi\right) \quad \text{(a)}$$

y_t — wartość wielkości y w chwili t,

$\overline{y}$ — wartość maksymalna tej wielkości,

T — okres zmienności,

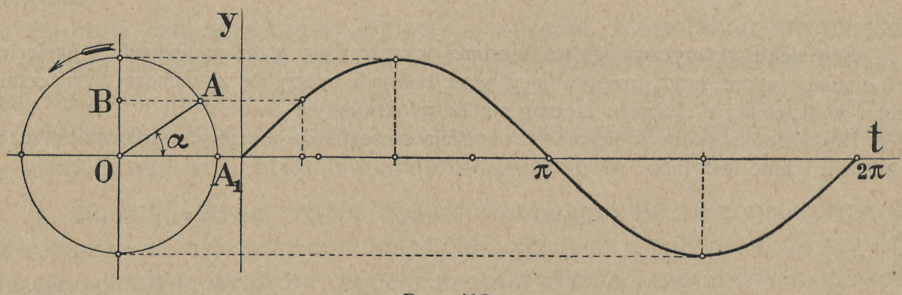
φ — kąt stały.

t — czas—zmienny.

Linję krzywą, wyrażającą taką funkcję we współrzędnych prostokątnych y i t, nazywamy sinusoidą.

Sinusoida może być wykreślona za pomocą wyznaczania poszczególnych punktów w sposób następujący. Rozważmy przypadek, gdy $\varphi = 0$:

Bierzemy odcinek OA (rys. 418), którego długość wyrażać będzie w pewnej



Rys. 418.

skali wartość maksymalną wielkości y, a więc $\overline{y}$, i zakładamy, że ten odcinek znajduje się w położeniu, wskazanym na rysunku, t. j. pod kątem α względem linji po-

ziomej. Rzutem tego odcinka na kierunek pionowy będzie odcinek $\overline{OB}$, zależność którego od długości odcinka $\overline{OA}$ wyraża wzór:

$$\overline{OB} = \overline{OA} \,.\, \sin \alpha .$$

Załóżmy następnie, że odcinek $\overline{OA}$ obracać się będzie jednostajnie z prędkością kątową $\frac{2\pi}{T}$ około punktu O i że w chwili zero znajdzie się on w położeniu $\overline{OA_1}$; w takim razie:

$$\alpha = \frac{2\pi}{T} \,.\, t ,$$

a więc:

$$\overline{OB} = \overline{OA} \sin \frac{2\pi t}{T} \qquad \text{(b)}$$

Z równania (a) na str. 406 przy $\varphi = 0$, wypada:

$$y_t = \overline{y} \,.\, \sin \frac{2\pi t}{T} .$$

Porównywając to równanie z poprzednim równaniem (b) i mając na uwadze, że $\overline{OA}$ wyraża $\overline{y}$, wnioskujemy, że $\overline{OB}$ wyraża y_t.

Korzystając zaś z tego, że rzut odcinka OA na kierunek pionowy wyraża wartość wielkości y w danej chwili, z łatwością znaleźć można szereg punktów sinusoidy, wyznaczając dla różnych wartości czasu t rzuty odcinka OA na kierunek pionowy i odkładając t jako rzędne, a $OB = y_t$ jako odcięte.

Jeżeli mamy dwie wielkości sinusoidalnie zmienne y i y' o jednakowym okresie zmienności, osiągające wartość maksymalną nie jednocześnie, to wyrażenia matematyczne dla takich wielkości będą:

$$y_t = \overline{y} \,.\, \sin \frac{2\pi t}{T} ,$$

$$y_t' = \overline{y'} \,.\, \sin \frac{2\pi \,.\, (t \pm \tau)}{T} .$$

Drugi z tych wzorów można napisać inaczej, mianowicie:

$$y_t' = \overline{y'} \,.\, \sin \left(\frac{2\pi t}{T} \pm \frac{2\pi\tau}{T} \right) ,$$

albo, oznaczając $\frac{2\pi\tau}{T}$ przez φ, mamy:

$$y_t' = \overline{y'} \,.\, \sin \left(\frac{2\pi t}{T} \pm \varphi \right) .$$

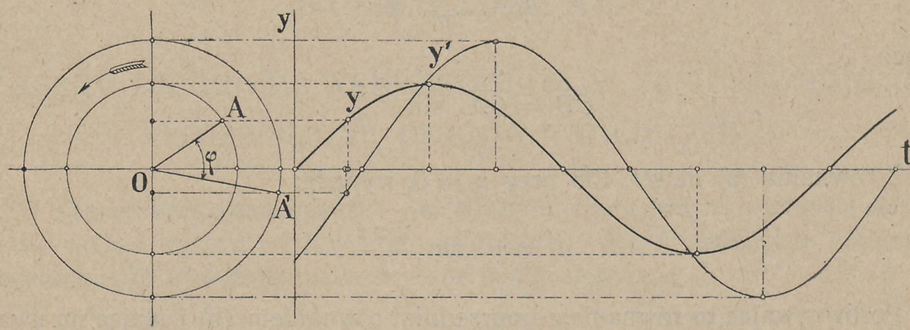
Na rys. 419 wykreślone są dwie sinusoidy za pomocą wyznaczania rzutów odcinków OA' i OA, obracających się z prędkością jednakową. Odcinki te tworzą kąt φ, który nie zmienia się przy ich obrocie.

W ten sposób otrzymane sinusoidy wyrażają zależność od czasu dwuch wielkości y i y' zmiennych sinusoidalnie, które można wyrazić wzorami:

$$y_t = \bar{y} \cdot \sin \frac{2\pi t}{T},$$

$$y_t' = y' \cdot \sin \left(\frac{2\pi t}{T} - \varphi \right).$$

Ponieważ wielkość y już przeszła przez wartość zero, gdy y' staje się zerem, mówimy, że wielkość y wyprzedza y'. Odpowiednio do tego widzimy na rysun-



Rys. 419.

ku, że odcinek OA w ruchu **wyprzedza** odcinek OA'. Sinusoida zaś, wyrażająca zmienność wielkości wyprzedzającej, jest przesunięta **wstecz** wzdłuż osi czasu, przy takim bowiem położeniu wzajemnym, rzędne tej sinuscidy **wcześniej** niż sinusoidy drugiej przechodzą przez odpowiednie fazy, np. wartości zerowe, maksymalne i t. p.

Można również mówić, że wielkość y' **spóźnia** się względem wielkości y; wyraża to oczywiście to samo, co orzeczenie, że y **wyprzedza** wielkość y'. Odpowiednio do tego sposobu wyrażenia, z rysunku widzimy, że odcinek OA' **spóźnia** się względem odcinka OA.

Kąt φ nazywa się **rożnicą faz** wielkości y i y'.

Można jednak różnicę faz wyrażać także w częściach okresu. Kąt 2π odpowiada całemu okresowi T, więc kąt φ będzie odpowiadał pewnej części okresu, która wyraża się ułamkiem:

$$\frac{\varphi}{2\pi}.$$

Tym sposobem jeżeli np. $\varphi = \frac{\pi}{2}$, to różnica faz wynosi $\frac{1}{4}$ część okresu, przy $\varphi = \pi$ pół okresu i t. d.

Z powyższych rozumowań widzimy, że dla wykreślenia sinusoid, wyrażających wielkości sinusoidalnie zmienne, znać musimy: długości odcinków, wyrażających wartości maksymalne, kąty, wskazujące różnicę faz pomiędzy poszczególnemi wielkościami, i długość okresu; te dane wystarczają wtedy, gdy nie chodzi o to, od kiedy ma być liczony czas przy wykreślaniu sinusoid. Opierając się na nich, można wyrażać wielkości sinusoidalnie zmienne o jednakowym okresie za pomocą

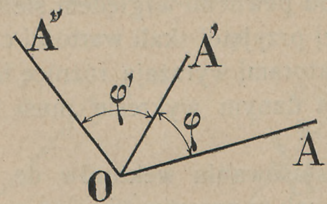
odcinków, wykreślonych pod pewnemi kątami, jeden względem drugiego, np. OA, OA', OA'' (rys. 420); długość tych odcinków wyraża wartości maksymalne odpowiednich wielkości, a kąty φ i φ' wyrażają różnicę faz.

Taki sposób wyobrażania wykreślnego ma jednak tę złą stronę, że kąt pomiędzy dwoma odcinkami nie jest wielkością jednoznaczną.

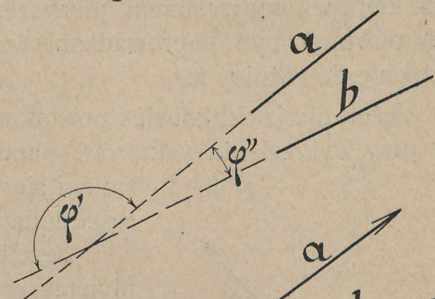
Dwa odcinki a i b (rys 421) tworzą pomiędzy sobą dwa różne kąty φ' i φ'', których suma $= 180^0$. Otóż, jeżeli mowa o różnicy faz, to niewiadomo, który z tych kątów ma tę różnicę wyrażać.

Dla uniknięcia tej dwuznaczności oznaczamy kierunek odcinków, mianowicie zaopatrujemy je na rysunku w strzałki (rys 422). Takim odcinkom o kierunku oznaczonym nadano nazwę **wektorów**. Różnicą faz będzie tu kąt φ pomiędzy wektorami, wybrany w taki sposób, ażeby oba kierunki wychodziły z wierzchołka kąta, jaki tworzą.

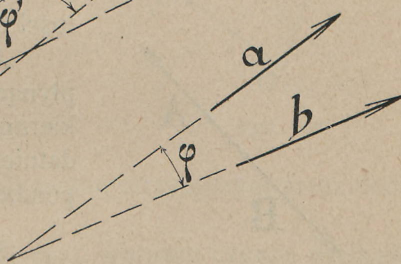
Właściwie i tutaj mogłaby być mowa jeszcze o kącie $360^0 - \varphi$ i t. p., ale tego rodzaju kąty na wykresie sinusoid odpowiadają temu samemu ich położeniu, natomiast dwie sinusoidy, przesunięte o 180^0, będą zupełnie różne.



Rys. 420.

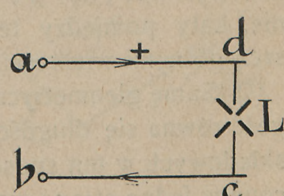


Rys. 421.



Rys. 422.

Dla nadania wektorom zupełnie określonego znaczenia fizycznego, zachodzi jeszcze konieczność założenia, jaki kierunek wielkości zmiennej będzie przyjęty za dodatni, a więc np. przy sile prądu elektrycznego, płynącego przez lampkę (rys. 423), który z kierunków prądu, $adcb$, czy też $bcda$, będzie uważany za dodatni? Jeżeli zaś chodzi np. o napięcie na lampce e_{dc}, to jaki kierunek napięcia przyjęty będzie za dodatni, od d do c, czy też od c do d?



Rys. 423.

Nadto należy jeszcze zwrócić uwagę na tę okoliczność, że w praktyce mamy bardzo rzadko do czynienia z wartościami maksymalnemi rozważanych tu wielkości, przeważnie zaś z wielkościami czynnemi, t. j. z pierwiastkami kwadratowymi z przeciętnej kwadratów.

Z rozdziału I wiemy, że wartość czynna wyraża się wzorem:

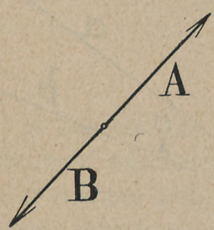
$$y = \frac{\bar{y}}{\sqrt{2}},$$

można więc przyjąć, że wektor wyraża również, aczkolwiek w pewnej odmiennej skali, wartość czynną.

Z powyższego rozumowania wynika, że, zakładając pewien dodatni kierunek dla siły prądu, napięcia lub siły elektromotorycznej i t. p., możemy w przypadku zmienności okresowej tych wielkości, wyrazić je za pomocą wektorów, poprowadzonych pod pewnemi względem siebie kątami. Długości tych wektorów wyrażają w pewnej przyjętej skali wartości czynne odpowiednich wielkości, kąty zaś pomiędzy wektorami wyrażają różnicę faz. [1]) Skala dla wektorów wielkości jednorodnych na danym wykresie musi być oczywiście dla wszystkich wektorów jednakowa.

Przy stosowaniu wektorów do wyobrażania wielkości sinusoidalnie zmiennych, kierunek w przestrzeni pierwszego wektora jest dowolny; następne zaś wektory powinny być poprowadzone względem pierwszego pod pewnemi kątami, stosownie do różnicy faz.

Jeżeli dla jakichkolwiek powodów wypadnie zmienić kierunek dodatni, przyjęty przy wykreślaniu wektorów, pamiętać należy o tym, że odpowiedni wektor zmieni się wtedy również na odwrotny, albowiem wartości dodatnie staną się wtedy ujemnemi i odwrotnie.



Rys. 424.

Jeżeli więc np. wektor A (rys. 424) wyraża prąd płynący w obwodzie lampy (rys. 423), przy dodatnim kierunku prądu $adcb$, to w razie zmiany kierunku dodatniego na $bcda$, wypadnie wyrazić ten sam prąd za pomocą wektora B (rys. 424).

Sposób przedstawiania za pomocą wektorów wielkości sinusoidalnie zmiennych ma nader ważne znaczenie ze względu na ułatwienie w dodawaniu i odejmowaniu tych wielkości w tym przypadku, gdy okresy tych wielkości są jednakowe.

2. Dodawanie wektorów. Dajmy na to, że mamy dowolną liczbę wektorów (rys. 425), np. y^{I}, y^{II}, y^{III} i y^{IV}, które wyrażają wielkości zmienne sinusoidalnie, kąty pomiędzy temi wektorami przedstawiają różnicę faz pomiędzy poszczególnemi wielkościami.

Sumę gieometryczną takich wektorów stanowić będzie wektor, którego długość równa się długości zamykającego boku wielokąta, utworzonego z wektorów składowych w ten sposób, że strzałki wszystkich wektorów składowych są zwrócone w jedną stronę, np. w kierunku ruchu wskazówek zegarka. Wektor, wyrażający sumę, ma strzałkę zwróconą w stronę odwrotną względem strzałek innych wektorów.

Na rys. 426 wektor y jest sumą wektorów y^{I}, y^{II}, y^{III}, y^{IV}. Ma on tę własność, że suma algebraiczna rzutów wektorów składowych na pewien dowolny

[1]) Jeżeli wielkość y_1 wyprzedza y_2, to wektor y_1 kreśli się dalej o kąt różnicy faz w kierunku odwrotnym względem ruchu wskazówek zegarka, ponieważ ten kierunek przyjmujemy jako kierunek dodatni obrotu wektorów.

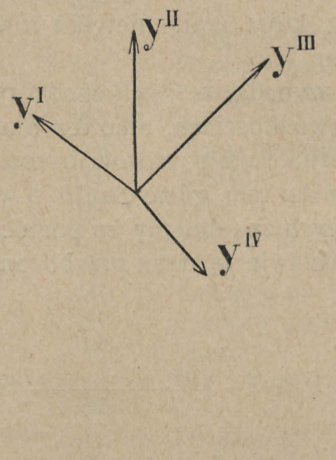
kierunek równa się rzutowi wektora, wyrażającego sumę, czyli wektora wypadkowego.

Z rys. 426 widzimy, że :

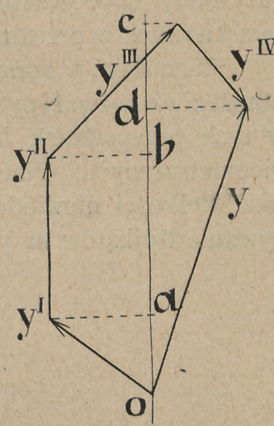
$$\overline{od} = \overline{oa} + \overline{ab} + \overline{bc} - \overline{cd}.$$

Wektory wyrażają wielkości sinusoidalnie zmienne o okresie jednakowym, przeto suma rzutów tych wektorów na kierunek pionowy będzie wyrażała sumę wartości chwilowych tych wielkości.

Ta suma rzutów równa się, jak widzieliśmy, rzutowi wektora wypadkowego, więc rzut ten w każdej chwili będzie wyrażał sumę wartości chwilowych powyższych wielkości. Z tego wynika, że suma szeregu wielkości sinusoidalnie zmiennych jest wielkością również sinusoidalnie zmienną i że wektor, wyrażający tę sumę, jest wektorem wypadkowym, otrzymanym przez dodawanie gieometryczne wektorów składowych.



Rys. 425.



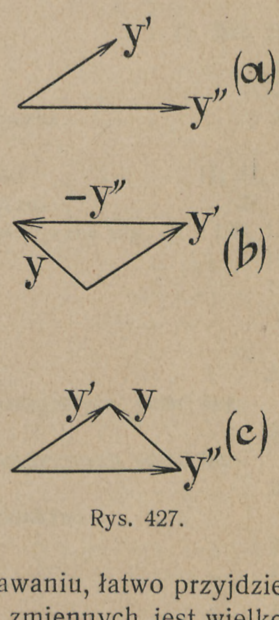
Rys. 426.

Jeżeli wektory składowe wyrażają w pewnej skali wartości czynne wielkości składowych, to oczywiście wektor wypadkowy będzie wyrażał w tej samej skali wartość czynną sumy.

Taką sumę wartości czynnych danych wielkości, dla odróżnienia jej od zwykłej sumy algebraicznej, nazywamy sumą gieometryczną. Szczególnie ważne znaczenie, przy zastosowaniu dodawania wektorów do prądów zmiennych, ma ten przypadek, kiedy suma równa się zeru; wtedy, jak widać z rys. 426, y będzie $= 0$ i wielobok wektorów składowych będzie zamknięty.

3. **Odejmowanie wektorów.** Różnicą gieometryczną dwuch wektorów y' i y'' [rys. 427 (a)], nazywamy wektor y, stanowiący sumę wektorów y' i $(-y'')$ [rys. 427 (b)].

Łatwo spostrzedz, że wektor, otrzymany przez połączenie końców wektorów y' i y'' [rys. 427 (c)], ze strzałką, zgodną z odjemnikiem y'', wyraża również sumę $y' + (-y'')$, a więc jest różnicą wektorów y' i y''.



Rys. 427.

Na podstawie podobnego rozumowania, jak przy dodawaniu, łatwo przyjdziemy do wniosku, że różnica dwuch wielkości sinusoidalnie zmiennych jest wielko-

ścią również sinusoidalnie zmienną i wyraża się za pomocą wektora, stanowiącego różnicę gieometryczną wektorów wielkości składowych.

4. Rozwiązywanie równań. Mając w ten sposób określone działania dodawania i odejmowania, możemy zestawiać równania gieometryczne i przekształcać je tak, jak równania algebraiczne, mając oczywiście na względzie zawsze znaczenie symbolów (+), (—) i (=).

Co do znaku równości, należy pamiętać, że w rachunku wektorowym równymi nazywamy takie wektory, które mają nietylko równe długości, ale zarazem ten sam kierunek w przestrzeni.

Zaznaczyć w końcu wypada, że jeżeli chodzi tylko o powzięcie pewnego wyobrażenia o rozważanych wielkościach, albo też o niezbyt dokładne obliczenia, to w tych przypadkach można śmiało stosować rozwiązywanie wykreślne równań gieometrycznych. Natomiast tam, gdzie chodzi o wyniki możliwie dokładne, wartość wielkości niewiadomych znajdujemy za pomocą trygonometrycznego rozwiązywania trójkątów na podstawie wykresu przybliżonego.

Spis alfabetyczny.